Universidad Nacional de Colombia

Cálculo diferencial

Taller 2

Cálculo de límites

1. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 1} g(x) = -1$ y $\lim_{x\to 1} h(x) = 0$. Determine los siguientes límites (si no existe, explique por qué).

   a) $\lim_{x\to 1} f(x) + 5 =$

   b) $\lim_{x\to 1}[-f(x) + 3g(x)]$

   c) $\lim_{x\to 1}[g(x)]^4$

   d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{h(x)}$

   e) $\lim_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$

   f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{g(x)}$

2. Calcule los siguientes límites, si existen:

   a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$

   b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$

   c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

   d) $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2 + 5x - 3x^3}{x^2 - 1}}$

   e) $\lim_{x\to 15} \sqrt{2}$

   f) $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

   g) $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

   h) $\lim_{x\to 5} \dfrac{2x - 10}{|x - 5|}$

   i) $\lim_{x\to 4} \dfrac{7}{x - 4}$

   j) $\lim_{x\to -10^-} \dfrac{x + 10}{\sqrt{(x + 10)^2}}$

   k) $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - 16}}{x + 4}$

   l) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

   m) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

   n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

   ñ) $\lim_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

   o) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 9}{|x + 3|}$

   p) $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{t - 1}$

   q) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{8}{2 - x} + \dfrac{32}{x^2 - 4}\right)$

   r) $\lim_{\theta\to 0} \theta \cot\theta$

   s) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

   t) $\lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

   u) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

   v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$

   w) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$

   x) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x}{x}$

3. Determine el valor de la constante k para que el límite $\lim_{x\to 3} h(x)$ exista, donde:

$$h(x) = \begin{cases} kx - 2, & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - kx + 1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Límites trigonométricos

4. Utilice el teorema del emparedado

   a) $\lim_{x\to 0} x^6 \cos(-3x)$

   b) $\lim_{x\to 0} x^4 \sin(\frac{1}{x})$

   c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)}$

5. Calcule los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{\sin 3h}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

c) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2-2\cos x}$

e) $\lim_{\theta\to 0} \theta\cot\theta$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin(3x))^2}{x^2\cos x}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\sin x}$

h) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin kt}{t}$; $\quad k\in\mathbb{R}$

i) $\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

6. Demuestre que si c es un número real no negativo y $0 \le f(x) \le c$ para todo x, entonces

$$\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0.$$

7. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Explique qué sucede si $v \to c^-$?. Por qué se necesita el límite por la izquierda?

Interpretación gráfica de límites y límites laterales

8. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < -1 \\ 2x+1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ (x+1)^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

.

Halle si existe (si este no existe, explique por qué)

a) $\lim_{x\to -10} f(x)$

b) $\lim_{x\to -2} f(x)$

c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to -1} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

f) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

g) $\lim_{x\to 0} f(x)$

h) $\lim_{x\to 1} f(x)$

i) $\lim_{x\to 5} f(x)$

j) asíntotas horizontales

k) asíntotas verticales

l) asíntotas oblicuas

9. Encuentre los límites de cada función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$$f(x) = \frac{2}{x} - 3, \qquad f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{8 - \frac{5}{x^2}}, \qquad h(x) = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}.$$

10. Dada la gráfica de f, halle si existe (si este no existe, explique por qué)

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

g) $\lim_{x\to 4} f(x)$

h) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

i) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

j) $\lim_{x\to 5} f(x)$

k) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

l) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$

m) $\lim_{x\to 2} f(x)$

n) $f(8)$

ñ) $\lim_{x\to 8} f(x)$

o) $f(10)$

p) $\lim_{x\to 10} f(x)$

q) $\lim_{x\to 11^+} f(x)$

r) $\lim_{x\to 11^-} f(x)$

s) $\lim_{x\to 11} f(x)$

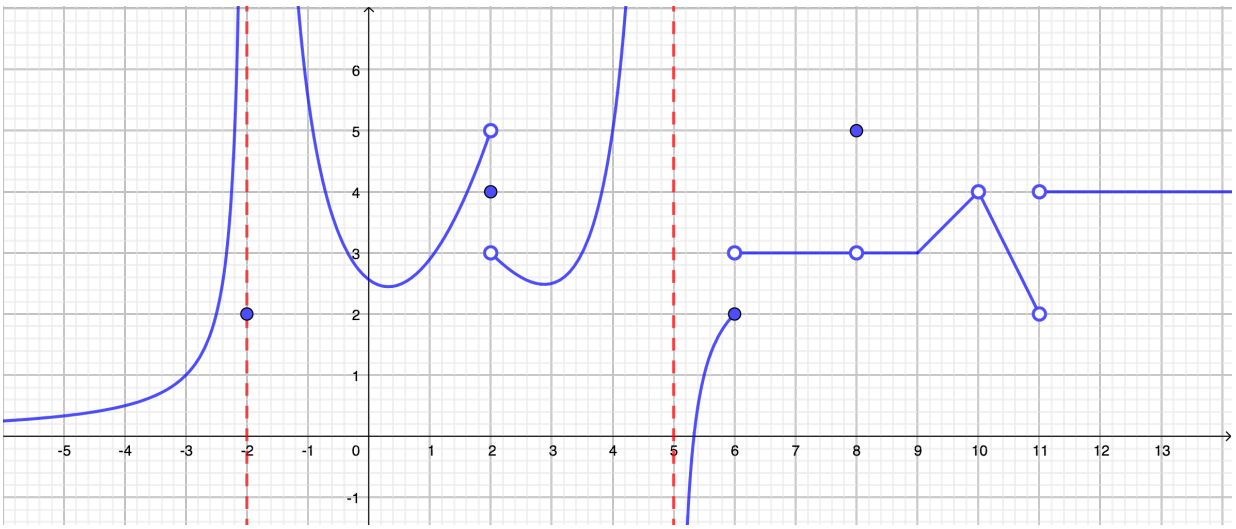
t) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

u) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

v) asíntotas horizontales

w) asíntotas verticales

x) asíntotas oblicuas



Límites al infinito y hacia infinito

11. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} -x$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{7-5x}{x-4}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{8x^2+5x-7}{3x^2-x+4}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x-7}{3x^2-x+4}$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^2+5x-7}{x+4}$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-6x^5+4x}{3x^5+x+5}$

h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

i) $\lim_{x\to 4^-} \frac{7-5x}{x-4}$

j) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{|x-3|}$

k) $\lim_{x\to -3^+} \frac{x^5-x^3}{x^2-9}$

l) $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-x}{x^2-4}$

m) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-\cos x}{x}$

n) $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

ñ) $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1-t}} - \frac{1}{t}\right)$

o) $\lim_{s\to 1} \frac{\sqrt{s}-s^2}{1-\sqrt{s}}$

p) $\lim_{x\to 0} (x^2-x)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

q) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

r) $\lim_{\theta\to 0} \sqrt{|\theta|} \sin\left(\frac{1}{\theta}\right)$

s) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(4\theta)}{\sin(3\theta)}$

t) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2(x)}{x}$

u) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{2x}$

$v)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{|x-2|}$

$w)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - x}\right)$

$y)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$

$x)$ $\lim\limits_{x\to \frac{7}{3}^+} [3x-1]$

12. Determine todas las asíntotas en cada caso:

$a)$ $y = \dfrac{2}{x-3}$

$b)$ $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$c)$ $y = \dfrac{x}{1-x}$

$d)$ $y = \dfrac{2}{x^2-3x+2}$

$e)$ $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$f)$ $y = \dfrac{2x^3-5x^2+4x}{(x-1)^2}$

$g)$ $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

$h)$ $y = \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2+x-6}$

$i)$ $f(x) = \dfrac{x^2+\sin x}{x}$

$j)$ $f(x) = \dfrac{-2x^2-4x+6}{x^3-1}$

$k)$ $f(x) = \dfrac{x^4-7x^2+12}{x^4-x^2-12}$

$l)$ $y = \sqrt{x^2+1}$

$m)$ $y = \sqrt{x^2-1}$

$n)$ $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$

13. En cada caso defina dé un ejemplo de una función f que satisfagan las condiciones dadas.

$a)$ $y = x+3$ es asíntota oblicua de $y = f(x)$ y $f(1) = 5$.

$b)$ Las rectas $x = 6$ y $y = x$ son las únicas asíntotas de $y = f(x)$ y $f(0) = -1$.

$c)$ Las rectas $y = 1$ y $x = -1$ son las únicas asíntotas de $y = f(x)$.

$d)$ Las rectas $x = \pm 1$ y $y = x$ son las únicas asíntotas de $y = f(x)$.

Límites de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas

14. Calcule los siguientes límites

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$.

$b)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$.

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

$d)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2x)}{x}$.

$e)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(3x)}{\sin(2x)}$.

$f)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$.

$g)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\tan x)}{x}$.

$h)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$i)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$.

$j)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$.

Aplicaciones

1. Modelo farmacocinético de concentración de medicamento. La concentración de un antibiótico en el torrente sanguíneo de un paciente (medida en miligramos por litro, mg/L), t horas después de haber sido administrado por vía oral, está modelada por la función:

$$C(t) = \frac{40t}{t^2 + 9}, \quad t \geq 0$$

   a) Concentración inicial: Evalúe la concentración del medicamento en el instante de la administración ($t = 0$).

   b) Comportamiento a corto plazo: Complete la siguiente tabla de valores para observar la evolución de la concentración durante las primeras horas:

t (horas)	1	2	3	4	5
$C(t)$ (mg/L)					

   ¿En qué hora de la tabla se registra la mayor concentración del fármaco?

   c) Comportamiento a largo plazo (Límite al infinito):Calcule analíticamente el límite:

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{40t}{t^2 + 9}$$

   d) Interpretación médica: Explique el significado biológico del resultado obtenido en el inciso c) en términos de la eliminación del fármaco por el organismo del paciente.

   e) Asíntota horizontal: Identifique la ecuación de la asíntota horizontal de la función $C(t)$ y describa qué representa gráficamente en el contexto del tratamiento.

2. En telecomunicaciones aparece frecuentemente la función

$$S(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t}, \qquad t \neq 0.$$

   El programa que procesa la señal debe asignar una lectura también en $t = 0$. Además, los ingenieros quieren conocer el comportamiento de la señal mucho tiempo después de iniciada la transmisión.

   a) La fórmula no permite evaluar directamente la señal en $t = 0$. Determine qué valor debe programarse en ese instante para evitar una interrupción o salto en la señal.

   b) Justifique que el valor propuesto produce una señal continua.

   c) Determine todos los instantes diferentes de cero en los que la señal se anula.

   d) Si la transmisión permanece activa durante un tiempo cada vez mayor, ¿hacia qué valor se aproximan las lecturas del sensor?

   e) ¿Puede considerarse que la señal se aproxima a una línea horizontal? En caso afirmativo, determine su ecuación.

   f) Un estudiante sostiene que no es posible predecir el comportamiento a largo plazo porque el numerador oscila permanentemente entre -1 y 1. Analice su afirmación.

g) Utilice una desigualdad apropiada para garantizar que, después de cierto tiempo, la magnitud de la señal sea menor que cualquier tolerancia positiva establecida.

3. En un modelo simplificado, la deformación de una columna sometida a una carga P está dada por

$$D(P) = \frac{0{,}03P}{800 - P}, \qquad 0 \leq P < 800,$$

donde P se mide en kilonewtons y $D(P)$ en centímetros.

a) Determine los valores de la carga para los cuales el modelo tiene sentido físico y matemático.

b) Calcule la deformación predicha para las siguientes cargas:

$$P = 400, \qquad P = 600, \qquad P = 750, \qquad P = 790, \qquad P = 799.$$

c) Los ingenieros realizan ensayos aumentando progresivamente la carga sin alcanzar los 800 kN. Describa matemáticamente qué predice el modelo sobre la deformación de la columna a medida que la carga se acerca a ese valor.

d) ¿Qué característica de la gráfica representa el valor crítico de 800 kN?

e) Un diseño se considera admisible únicamente cuando la deformación no supera 0,45 cm. Determine el intervalo de cargas permitido por el modelo.

f) Si la carga supera los 800 kN, la fórmula todavía puede producir algunos valores algebraicos. ¿Deben considerarse físicamente válidos? Explique.

g) ¿Puede concluirse que una columna real alcanza una deformación infinita al llegar a 800 kN? Explique qué señala realmente el resultado matemático.

h) Redacte una recomendación para el equipo de ingeniería sobre la conveniencia de operar cerca de 800 kN.