VII Simposio de Topología
Carlos Javier Ruiz Salguero

Libro de Resúmenes

Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Índice

1 Resúmenes

1.1. Grupos de Veech para cubrimientos de la superficie de Chamanara

Autor: Mauro Artigiani (Universidad Nacional de Colombia)
martigiani@unal.edu.co

Resumen: La superficie de Chamanara es un ejemplo clásico de superficie de traslación con grupo fundamental infinitamente generado y con área finita. Además, posee muchos automorfismos afines. En esta charla, vamos a estudiar cubrimientos normales finitos de la superficie de Chamanara, caracterizando cuáles tienen un grupo de automorfismos afines con índice finito en el grupo correspondiente de la superficie de base. Además, estudiamos en detalle estos grupos en el caso de que los cubrimientos sean de grado 2. Esto es un trabajo en colaboración con A. Randecker, C. Sadanand, F. Valdez y G. Weitze-Schmithüsen.

1.2. Hopf: de la topología al álgebra y del álgebra a la topología

Autor: Fabio Calderón (Universidad Industrial de Santander)
facalmat@uis.edu.co

Resumen: Heinz Hopf, destacado topólogo, legó a las matemáticas contemporáneas una de las nociones algebraicas más influyentes: *Las álgebras de Hopf*. Estas aparecieron en el estudio de la topología algebraica, vinculadas a los H-espacios, y desde entonces se han convertido en un puente fértil entre topología, álgebra no conmutativa y teoría de categorías.

En esta charla, diseñada para todo público, exploraremos cómo las estructuras modernas derivadas de las álgebras de Hopf se entrelazan con ideas topológicas. Abordaremos, por ejemplo, las extensiones Hopf–Galois, concebidas como análogos algebraicos de fibrados principales en geometría no conmutativa. También destacaremos aspectos categóricos donde convergen álgebra y topología, como la clasificación de categorías de fusión y el papel de las álgebras de Frobenius. Estas estructuras sustentan la construcción de invariantes topológicos cuánticos y se manifiestan en las TQFT (teorías topológicas de campo), lo que ilustra la profunda doble vía de influencias entre topología y álgebra.

1.3. Dinámicas discretas con funciones multivaluadas

Autor: Javier Camargo (Universidad Industrial de Santander)
jcamargo@saber.uis.edu.co

Resumen: Un sistema dinámico se define como un par (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ es una función continua. Sea un punto $p \in X$, definimos la órbita como la sucesión $\{p, f(p), f^2(p), \ldots\}$. Podemos afirmar que un sistema dinámico se considera "resuelto" cuando somos capaces de describir con precisión el comportamiento de todas las órbitas del sistema dinámico. Las órbitas constituyen la base conceptual sobre la cual se fundamenta el análisis de las propiedades dinámicas.

Recientemente, diferentes investigadores han explorado la posibilidad de reemplazar f con una función multivaluada; esto es, una función $F\colon X \to 2^X$, donde 2^X representa la familia de cerrados no vacíos de X. En este contexto, se define una órbita de p como una sucesión $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ tal que $x_0 = p$ y $x_{i+1} \in F(x_i)$ para cada $i \geq 0$. Así, para cada punto $p \in X$, se tiene un conjunto de órbitas que denotamos como $\mathcal{O}_F(p)$. En esta presentación, exhibiremos propiedades del conjunto $\mathcal{O}_F(p)$ como subespacio de $X^{\mathbb{N}}$. Asimismo, presentaremos definiciones de propiedades dinámicas tales como: punto periódico, transitividad y sensibilidad; en el contexto de los sistemas dinámicos con funciones multivaluadas. Formularemos interrogantes en torno a estos conceptos.

1.4. Relaciones entre espacios moduli de conexiones y curvas elípticas

Autor: Leonardo Cano (Universidad Nacional de Colombia)
lcanog@unal.edu.co

Resumen: En la charla hablaré de algunas interacciones básicas entre el espacio moduli de conexiones de superficies de género 1 y el espacio moduli de las curvas elípticas.

1.5. El semigrupo de semicaracteres de un semigrupo pseudocompacto y localmente compacto

Autor: Julio Hernández - Albeiro Herrera (Universidad de Cartagena)
jhernandeza2@unicartagena.edu.co

Resumen: En [1] se dan condiciones bajo las cuales, dado un semigrupo compacto S, $\hat{\hat{S}}$ es topológicamente isomorfo a S, bajo el homomorfismo evaluación. En esta charla se exploran resultados similares para semigrupos localmente compactos y pseudocompactos.

Referencias

[1] Austin, C. W. (1963). Duality theorems for some commutative semigroups. Transactions of the American Mathematical Society, 109(2), 245-256.

1.6. Anillos de matrices sobre $C(X)$ cuando X es fuertemente cero-dimensional

Autor: Ramiro Lafuente (University of South Dakota)
ramiro.lafuenterodri@usd.edu

Resumen: Estudiamos ciertas propiedades del anillo de matrices triangulares superiores con elementos en $C(X)$, el anillo de funciones reales continuas sobre un espacio topológico X, particularmente cuando X es un espacio fuertemente cero-dimensional. Determinamos cuándo éste anillo de matrices es fuertemente limpio y establecemos una caracterización completa de sus elementos fuertemente limpios. Finalmente, establecemos las condiciones necesarias y suficientes sobre X para que $C(X)$, y el anillo de matrices sobre $C(X)$, sean fuertemente limpios.

Un elemento de un anillo es limpio si puede ser expresado como la suma de un idempotente y una unidad, éste elemento es fuertemente limpio cuando el idempotente y la unidad conmutan. Un anillo es denominado limpio (fuertemente limpio) si todos sus elementos son limpios (fuertemente limpios). Se dice que un espacio es cero-dimensional si tiene una base de conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados (a los cuales se los denomina clopen). Un espacio X es fuertemente cero-dimensional si para cada $A \subseteq X$ y cada abierto U de X tal que $A \subseteq U$, existe un subconjunto clopen V de X tal que $A \subseteq V \subseteq U$.

1.7. Topologías de Grothendieck localizadas y dualidades Tipo-Stone

Autor: Joaquín Luna (Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas)
jlunator@gmail.com

Resumen: En esta charla disertaremos sobre los siguientes aspectos:

- Dada una categoría C, X un objeto de C y J una topología de Grothendieck en C, decimos que $J(X)$ es una G-topología localizada en X y que $(X, J(X))$ es un G-espacio topológico localizado.

- Sea C una categoría finitamente completa y J una topología de Grothendieck en C. Para un morfismo $f : B \to C$ en C y una criba $S \in J(C)$, sea

$$f^*(S) = \{\psi \mid \mathrm{cod}(\psi) = B,\ f \circ \psi \in S\}$$

la criba correspondiente en B. Entonces

$$f^*(J(C)) := \{g^*(S) \mid S \in J(C)\}$$

es una G-topología localizada en B.

- Para J una topología de Grothendieck en una categoría C: (1) Un morfismo $f : B \to C$ se llama G-continuo si la G-topología localizada en B, $f^*(J(C))$, satisface $J(B) \subseteq f^*(J(C))$. (2) $f^*(J(C))$ es la G-topología más burda en B para la cual f es G-continuo, y se denomina *topología inicial* G en B.

- La categoría G-Top_C de G-espacios localizados comprende los siguientes datos: (1) Objetos: espacios de G-topología localizados $(X, J(X))$. (2) Morfismos: morfismos de C que son G-continuos.

- El funtor de olvido de las estructuras $U : G\text{-}\mathrm{Top}_C \to C$ es un funtor topológico.

- Recordemos que un *marco* ($frame$) L es un conjunto parcialmente ordenado con todas las uniones y todos los encuentros finitos que satisfacen la ley distributiva infinita:

$$x \wedge \left(\bigvee_i y_i\right) \ = \ \bigvee_i (x \wedge y_i).$$

Un homomorfismo de marcos $\varphi : L \to M$ es una función que preserva los encuentros finitos y las uniones arbitrarias. Los marcos y sus homomorfismos forman la categoría **Frm**.

- Por definición, la categoría **Locale** de los locales es la opuesta a la categoría de marcos:

$$\mathbf{Locale} = \mathbf{Frm}^{op}.$$

- Para cada objeto X de C, el conjunto

$$\{J_\alpha(X) \mid \alpha \in A\}$$

  es un marco ($frame$).

- Esto nos permite estudiar el funtor de olvido $U : G\text{-Top}_C \to \mathbf{Frm}$. Dicho funtor y sus posibles adjuntos permiten estudiar dualidades tipo-Stone.

1.8. Los objetos de Ore en una categoría

Autor: José Reinaldo Montañez (Universidad Nacional de Colombia)
jrmontanezp@unal.edu.co

Resumen: Se presenta el clasificador universal de las categorías topológicas a través de la categoría Ore, e inspirados en ésta, se muestra cómo se construyen las categorías topológicas. Finalmente, se presenta la noción de objeto de Ore en una categoría y se muestran resultados relacionados con la construcción de categorías topológicas.

1.9. Trazas y Determinantes en Operadores Pseudodiferenciales

Autor: Carolina Neira (Universidad Nacional de Colombia)
cneiraj@unal.edu.co

Resumen: En variedades cerradas de dimensión mayor que uno, existe una clasificación de trazas funcionales sobre ciertos conjuntos de operadores pseudodiferenciales clásicos que actúan sobre la variedad. Asociados a estas trazas, existen aplicaciones multiplicativas conocidas como determinantes, las cuales satisfacen propiedades similares a las de los determinantes en matrices. En esta charla consideramos algunos de estos funcionales y estudiamos algunas de sus propiedades.

1.10. Funciones de Jordan: un tema de topología que nació en la lógica gráfica

Autor: Arnold Oostra (Universidad del Tolima)
noostra@ut.edu.co

Resumen: Un desarrollo del todo gráfico tanto de la lógica proposicional como de la lógica de primer orden se puede lograr mediante el sistema de gráficos existenciales, inventado por C. S. Peirce a fines del siglo XIX [**roberts**, **zalamea**] y aplicado luego a la lógica intuicionista a comienzos del siglo XXI [**oostra1**, **oostra3**, **ortizsegura**]. Los gráficos Alfa de la lógica proposicional clásica se pueden representar como clases de homotopía de ciertas funciones continuas [**bradytrimble**, **martinez**], pero tal definición presenta obstáculos insalvables en el caso de los gráficos para la lógica proposicional intuicionista [**martinez**, **oostra2**]. En esta ponencia se presentan las funciones de Jordan como aquellas transformaciones del plano que preservan las curvas de Jordan y su interior [**arboledadiaz**]. El análisis topológico de esta idea conduce a una novedosa caracterización geométrica de la continuidad [**arboledadiaz**, **munkres**, **willard**] y permite la representación de los gráficos Alfa intuicionistas [**arboledadiaz**].

Referencias

[1] Arboleda, Guillermo y Díaz, Miguel Ángel (2025). *Un modelo topológico para los gráficos Alfa intuicionistas*, trabajo de grado (Matemáticas con énfasis en Estadística), Ibagué: Universidad del Tolima.

[2] Brady, Geraldine and Trimble, Todd (2000). *A categorical interpretation of C.S. Peirce's propositional logic Alpha*, Journal of Pure and Applied Algebra, 149, pp. 213-239

[3] Martínez, Yorladys M. (2014). *Un modelo real para los gráficos Alfa*, trabajo de grado (Matemáticas con énfasis en Estadística), Ibagué: Universidad del Tolima.

[4] Munkres, James R. (2000). *Topology*, second edition, Upper Saddle River (New Jersey): Prentice Hall.

[5] Oostra, A. (2010). *Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista*, Cuadernos de Sistemática Peirceana, 2, pp. 25-60

[6] Oostra, A. (2019). *Representación compleja de los gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción*, Boletín de Matemáticas, 26(1), pp. 31-50

[7] Oostra, A. (2021). *Equivalence Proof for Intuitionistic Existential Alpha Graphs*, in: A. Basu *et.al.* (Eds.), Diagrams 2021, Lecture Notes in Computer Science, 12909, pp. 188-195.

[8] Ortiz, Jorge E. y Segura, Juan A. (2018). *Gráficos Alfa intuicionistas*, trabajo de grado (Matemáticas con énfasis en Estadística), Ibagué: Universidad del Tolima.

[9] Roberts, Don D. (1973). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton.

[10] Willard, Stephen (1970). *General Topology*, Reading (Massachusetts): Addison-Wesley.

[11] Zalamea, Fernando (2010). *Los gráficos existenciales peirceanos*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

1.11. Título: Espacio Moduli de Fibrados Vectoriales

Autor: Leonardo Roa (Universidade de Campinas)
leoroale@unicamp.br

Resumen: El espacio moduli de fibrados vectoriales estables sobre variedades proyectivas fue construido por Mumford, Newstead, Seshadri, Maruyama, Gieseker y Simpson en 1975. Desde entonces, estos espacios moduli han sido estudiados desde diferentes puntos de vista por sus conexiones con diferentes áreas de matemáticas, en particular geometría simpléctica y diferencial, topología, física, entre otras. Varias preguntas relacionadas con no vacuidad, irreducibilidad, conexidad, etc, no tienen una respuesta general. En esta charla presentaremos resultados sobre propiedades topológicas y geométricas del espacio moduli de fibrados vectoriales sobre curvas proyectivas suaves y presentaremos algunos resultados de la Teoría de Brill-Noether.

1.12. Grupos topológicos y espacios de Alexandroff

Autor: Ibeth Marcela Rubio (Universidad Nacional de Colombia)
imrubiop@unal.edu.co

Resumen: Se presenta un resultado de M.C. Thornton y una generalización del mismo: dado un grupo G, existe una correspondencia biyectiva entre sus subgrupos normales y las topologías de Alexandroff que lo dotan de estructura de grupo topológico. (Esta charla se basa en un trabajo realizado con Alejandra Medina).

1.13. Un levantamiento del invariante de Le-Murakami-Ohtsuki.

Autor: Anderson Vera (Universidad Nacional de Colombia)
aaveraa@unal.edu.co

Resumen: El invariante de Le-Murakami-Ohtsuki es un invariante muy poderoso de 3-variedades (es universal con respecto a los invariantes cuánticos y con respecto a los invariantes de tipo finito); en particular, domina todos los invariantes de Reshetikhin-Turaev. El invariante LMO toma valores en un espacio de grafos llamados diagramas de Jacobi o diagramas de Feynman. Su definición original utiliza la integral de Kontsevich de nudos, las llamadas funciones iota y varias funciones de proyección entre diferentes cocientes de espacios de diagramas de Jacobi. En esta charla, explicamos cómo omitir una de estas funciones de proyección sin perder la propiedad de invariancia. (Esta charla se basa en un trabajo conjunto con Benjamin Enriquez).

1.14. Matemáticas condensadas: modular la topología

Autor: Andrés Villaveces (Universidad Nacional de Colombia)
avillavecesn@unal.edu.co

Resumen: Una construcción bastante reciente (2018) debida a Clausen y Scholze, llamada «condensación», pretende modular o mejorar ciertas construcciones en categorías que mezclan álgebra con topología. El ejemplo primordial es la categoría de grupos abelianos topológicos, que no es abeliana. Al «condensar» los grupos abelianos, se pospone la topologización, y se reparte o modula mediante un funtor (que resulta ser un haz) de la categoría de espacios compactos de Hausdorff en la categoría de grupos abelianos. Este paso, que aparentemente complica la topologización del grupo, en realidad termina dando lugar a una categoría con un comportamiento mucho mejor que la de grupos abelianos topológicos. El proceso es bastante canónico y permite «condensar» muchas otras categorías algebraicas - y logra una modulación de la introducción de la estructura topológica. Más recientemente, varios autores notaron que esta construcción no solo tiene fuertes analogías con la construcción de forcing en teoría de conjuntos, sino que permite organizar de manera coherente algunas etapas de estas construcciones, dando lugar a universos intermedios (entre el universo base y la extensión genérica) con mayor regularidad (por ejemplo, en algunos de estos universos resulta que todos los conjuntos de reales son medibles Lebesgue - la famosa construcción de Solovay ahora se puede lograr mediante matemáticas condensada).

1.15. Hacia una Teoría de Modelos para Espacios Topológicos.

Autor: Pedro Zambrano (Universidad Nacional de Colombia)
phzambranor@unal.edu.co

Resumen: El estudio modelo-teórico de primer orden de los Espacios de Banach tiene un mal comportamiento (cercano a lógica de segundo orden relacional, [SS78]), lo que llevó a plantear un desarrollo alternativo conocido como Lógica Continua [BBHU08], el cual aunque es muy similar a la Lógica de Primer Orden deja ejemplos muy conocidos por fuera de este estudio (e.g., espacios de Hilbert de operadores no acotados). El estudio de este tipo de estructuras que no son axiomatizables en Lógica Continua se puede realizar usando la maquinaria de las clases no elementales ([HH09]), aunque este punto de vista deja por fuera ejemplos topológicos más generales. Aunque en los 80 hubo un intento de hacer Teoría de Modelos de Espacios Topológicos con estructura algebraica ([FZ80]), esta no prosperó mucho y se centró en el caso particular de la Teoría de Módulos ([Pre88]). Los cuantales son un tipo de retículos muy cercanos a Espacios Topológicos (cualquier Espacio Topológico puede verse como un pseudo Espacio Métrico donde la distancia toma valores en un cuantal adecuado, [Fla97]). Lieberman, Rosický y Zambrano ([LRZ18]) empezaron a explorar propiedades modelo-teóricas de clases no elementales basadas en una generalización de las estructuras métricas de la Lógica Continua pero con distancias cuanta-valuadas, utilizando herramientas de la Teoría de Categorías (Categorías Accesibles). Reyes y Zambrano ([RZ24]) propusieron una generalización de la Lógica Continua basadas en las estructuras definidas en [LRZ18]. En esta charla, hablaremos un poco sobre la historia que nos ha llevado a estos desarrollos recientes en esta propuesta de una Teoría de Modelos de Espacios Topológicos.

Referencias:

[BBHU08] I. BenYaacov, A. Berenstein, C.W. Henson, and A. Usvyatsov. Model theory for metric structures. In Model Theory with Applications to Algebra and Analysis (London Mathematical Society Lecture Notes Series), volume 349, pages 315-427. Cambridge University Press, 2008.

[Fla97] R. Flagg. Quantales and continuity spaces. Algebra universalis, 37:257-276, 1997.

[FZ80] J. Flum and M. Ziegler. Topological model theory. In Lecture Notes in Mathematics, volume 769. Springer-Verlag Berlin, 1980.

[HH09] A. Hirvonen and T. Hyttinen. Categoricity in homogeneous complete metric spaces. Arch. Math. Logic, 48:269-322, 2009.

[LRZ18] M. Lieberman, J. Rosický, and P. Zambrano. Tameness in generalized metric structures, 2018. preprint, https://arxiv.org/abs/1810.02317, sometido.

[Pre88] M. Prest. Model theory and modules. In London Mathematical Society Lecture Notes Series, volume 130. Cambridge University Press, 1988.

[RZ24] D. Reyes and P. Zambrano. A characterization of continuous logic by using quantalevalued logics, 2024. preprint, https://arxiv.org/abs/2102.06067.

[SS78] S. Shelah and J. Stern. The Hanf number of the first order theory of Banach Spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 244:147-171, 1978.

Editado por Julián Mateo Espinosa Ospina.
Estudiante Maestría en Actuaría y Finanzas.
Septiembre, 2025