NACIONAL | Facultad de Ciencias

VI SIMPOSIO DE TOPOLOGÍA

Carlos Javier Ruiz Salguero

2023

22 y 23

de Septiembre

2023

Índice general

Acerca de

Simposio de Topología Carlos Javier Ruiz Salguero

Comité Organizador

Ibeth Marcela Rubio Perilla   José Reinaldo Montañez Puentes
Lorenzo Acosta Gempeler

Docentes - Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.

Lista de Resúmenes – Conferencias

Modelos de Kripke y haces

Arnold Oostra

Universidad del Tolima

Saul Kripke formalizó una semántica de mundos posibles para las lógicas modales y poco después la adaptó a la lógica intuicionista. Un modelo de Kripke intuicionista es un ejemplo bien conocido de un haz sobre cierto espacio topológico. En esta ponencia se presenta una construcción novedosa de un fibrado topológico (*bundle*), al cual a su vez se asocia un haz de manera estándar. Por este camino cualquier modelo de Kripke modal también se puede ver como un haz.

References

[1] B. F. Chellas, *Modal logic. An Introduction*. Cambridge (MA): Cambridge University Press, 1980.
[2] R. Goldblatt, *Topoi*. Amsterdam: North-Holland, 1984.
[3] S. Kripke, "Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Modal Propositional Calculi". *Zeitschr. f. math. Logik and Grundlagen d. Math.* **9** (1963) 67–96.
[4] S. Kripke, "Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I". In: J. N. Crossley and M. A. E. Dummett, *Proceedings of the Eighth Logic Colloquium, July 1963*. Amsterdam: North-Holland, 1965, pp. 92–130.
[5] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*. New York: Springer-Verlag, 1992.
[6] A. Oostra, "Los cuadernos de Peirce-Kripke". En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* **25** (2022) 39–44. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
[7] J. R. Prada, *Gráficos existenciales Gama, modelos de Kripke y haces*. Tesis (Maestría en Matemáticas). Ibagué: Universidad del Tolima, 2018.
[8] D. Rosiak, *Sheaf Theory Through Examples*. Cambridge (MA): The MIT Press, 2022.
[9] F. Zalamea, *Los gráficos existenciales peirceanos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2010.
[10] F. Zalamea, *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2021.

Operadores de clausura e interior en la categoría de las topologías formales

Joaquín Luna Torres

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D. C., Colombia (profesor pensionado)

El propósito de la **topología formal** es desarrollar la topología en un marco constructivo donde aquí se entiende que "constructivo" incluye tanto lo intuicionista como lo predicativo.

Una **topología formal** es una triple $(S; \lhd; \mathbf{Pos})$ donde $(S; \lhd)$ es una cobertura convergente y $\mathbf{Pos} \subseteq S$ es un subconjunto de división tal que $a \lhd \{a\} \cap \mathbf{Pos}$ por cada $a \in S$. Las cubiertas convergentes y sus morfismos forman una categoría, llamada $\mathbf{C}\mathcal{C}ov$.

El objetivo principal de esta charla es mostrar la construcción de las categorías concretas $\mathbf{I}$-$\mathbf{C}\mathcal{C}ov$ (de operadores interiores) y C-$\mathbf{C}\mathcal{C}ov$ (de operadores de clausura), sobre la categoría $\mathbf{C}\mathcal{C}ov$ de cubiertas convergentes, y el hecho de que son topológicas.

References

[1] Peter Aczel, *Aspects of general topology in constructive set theory*, Annals of Pure and Applied Logic 137, 2006.
[2] Jiri Adamek, Horst Herrlich, George Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
[3] G. Battilotti, G. Sambin, *Pretopologies and a uniform presentation of sup-lattices, quantales and frames*, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Universitá di Padova, Italy, 1989.
[4] F. Ciraulo, G. Sambin, *Embedding locales and formal topologies into positive topologies*, Archive for Mathematical Logic, 2018.
[5] T.Coquand, G. Sambin, J. Smith, S. Valentini, *Inductively generated formal topologies*, Annals of Pure and Applied Logic 124, 2003.
[6] D. Dikranjan, W. Tholen, *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Academic Publishers,Dordrecht/ Boston/ London, 1995.
[7] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium*. Two volumes, Oxford University Press, Oxford, 2002.
[8] J. Luna-Torres, C. Ochoa, *Interior operators and topological categories*, Adv. Appl. Math. Sci., 10, 2011.
[9] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to Topos theory*, Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin,1992.
[10] J. R. Montanẽz, *Funtores elevadores y coelevadores de estructuras*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, 2007.

[11] G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces- a first communication*, Mathematical logic and its applications (Druzhba, 1986), Plenum, New York 1987.

Una breve introducción a tipos conformes de encajamientos Euclidianos

Leonardo A. Cano G.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

En la charla recordamos que las clases conformes de métricas Riemanianas sobre el toro son parametrizadas por el cociente del plano superior complejo por la acción de $SL(2,)$ y damos una idea de cómo mostrar que cada una de estas clases conformes puede ser representada por una métrica Riemaniana inducida por un encajamiento del toro en el espacio euclideano tridimensional. Este último resultado fue mostrado en los años 60 por Adriano Garsia.

Retículos versus espacios bi-topológicos — Un trabajo de Andrés Felipe Ríos Moreno

Lorenzo Acosta Gempeler

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

En esta charla se exponen los resultados del Trabajo de Grado de Andrés Felipe Ríos Moreno, presentado en el año 2017 en la Universidad Nacional de Colombia.

Este trabajo presenta una generalización de resultados conocidos sobre retículos distributivos al contexto de los retículos generales. El autor estudió con cuidado la famosa dualidad de Stone que establece una co-equivalencia entre la categoría de los retículos distributivos y la categoría de los espacios topológicos de Balbes-Dwinger. La correspondencia entre los objetos de las categorías fue establecida por Marshall Stone en los años treinta del siglo pasado. Una vez estuvieron disponibles las herramientas de la teoría de categorías, el resultado de Stone fue expresado, en los años setenta, por varios autores (Johnstone, Balbes y Dwinger) como una co-equivalencia (o dualidad) de categorías, pero restringida en un principio al caso de retículos distributivos acotados (con 0 y 1). Más tarde, en los años noventa, Acosta introdujo unos morfismos adecuados y extendió esta dualidad a la categoría de los retículos distributivos (no necesariamente acotados).

Por otro lado, también en los años setenta, Priestley presentó otra generalización de la teoría de Stone, esta vez utilizando espacios topológicos ordenados. Poco más tarde, Urquhart descubrió una dualidad entre la categoría de los retículos acotados y una cierta categoría de espacios topológicos doblemente pre-ordenados, que extiende la dualidad de Priestley.

Ríos, en su Trabajo de Grado, extracta, expone y utiliza, de manera magistral, las ideas fundamentales de los trabajos anteriores para establecer una dualidad entre la categoría de retículos (no necesariamente acotados y no necesariamente distributivos) y una cierta categoría de espacios bi-topológicos que él llamó R-espacios. La dualidad de Ríos generaliza a la vez todas las dualidades que hemos mencionado. Muchos de los resultados presentados en el trabajo son completamente originales y constituyen las versiones adecuadas, en el contexto general de los retículos, de los resultados fundamentales de la teoría de representación de retículos distributivos.

References

[1] Acosta, L., *Tópicos de teoría de retículos*, Universidad Nacional de Colombia, 2016
[2] Balbes, R. and Dwinger P., *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974
[3] Priestley, H. A., *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proceedings of the London Mathematical Society 2(2) (1972), p. 507-530

[4] Ríos, A.F., *Sobre la naturaleza bi-topológica de la teoría de retículos*, Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, 2017
[5] Stone, M.H., *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 67(1) (1938), p. 1-25
[6] Urquhart, A., *A topological representation theory for lattices*, Proceedings of the London Mathematical Society 2(2) (1972), pp. 507-530

Espacios funcionales de Alexandroff y algunas relaciones categóricas

Ibeth Marcela Rubio Perilla

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Los espacios de Alexandroff son aquellos en que la intersección arbitraria de abiertos es de nuevo un abierto. Una subclase propia de estos espacios es la de los espacios funcionales de Alexandroff, que son generados a partir de una función de un conjunto en sí mismo. En la charla se presentan unas interesantes propiedades categóricas de estos espacios funcionales de Alexandroff al considerar el orden de especialización correspondiente. Se obtienen isomorfismos entre las categorías de los espacios funcionales de Alexandroff que son T_0, una subcategoría de la categoría de los conjuntos ordenados y la categoría de los flujos de Kolmogoroff, considerando en cada una de ellas los morfismos apropiados.

Trabajo conjunto con Julián David Mesa Bueno [9].

References

[1] Alexandroff, P., *Diskrete Räume,* Mat. Sb. (N.S.) **2**, 501-518, 1937.
[2] Ayatollah Zadeh Shirazi, F. and Golestani, N., *Functional Alexandroff Spaces,* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **40** (4), 515-522, 2011.
[3] Ayatollah Zadeh Shirazi, F. and Golestani, N., *More about Functional Alexandroff Topological Spaces,* Scientia Magna, **6**(4) 64-69, 2010.
[4] Dubuc, E., *Categorías. Los 30 primeros años,* La Gaceta de la RSME. Vol, 17, Núm. 2, Págs. 333-347, 2014.
[5] Echi, O., *The categories of flows of Set and Top,* Topology and its Applications, 159, 2357-2366, 2012.
[6] Lorrain, F., *Notes on Topological Spaces with Minimum Neighborhoods,* The American Mathematical Monthly, **76** (6), 616-627, 1969.
[7] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician,* Springer, New York, 1971.
[8] Mesa, J., *Sobre espacios de Alexandoff.* Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, 2019.
[9] Mesa, J., *Espacios funcionales de Alexandroff.* Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2021.
[10] Munkres, J.R., *Topology,* Prentice Hall, Englewood Clifss, N.J., 1975.

Mapper and some ideas to optimizing the coverings and filter map

Mario Andrés Velásquez Méndez

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

In this note we describe some general ideas behind the topological data analysis, in particular, we show a way to optimize the choose of the filter map and the coverings algorithm, for this we define a poset structure on the set of coverings by intervals of R and we show that this poset can be reduced to a finite one. This is joint work with Eduardo Martınez Pedroza.

The *Topological Data Analysis (TDA)* provides a general framework to analyze numerical data sets in a way that is insensitive to the particular metric chosen and provides dimensionality reduction and robustness to noise. One idea used in TDA is try to recover the relevant information of a certain data set or graph by assigning a topological space X and computing *topological invariants* of X such as homology groups. For details the reader can consult [1].

What kind of characteristics can be detected by topological invariants?

- Connected components (via the 0-homology group)
- The number of loops (via the first homology group, or the fundamental group)

Metric characteristics cannot be detected, for example the diameter. In this note we give an outline of some results that we will publish in [2] together with Eduardo Martınez Pedroza.

References

[1] Gunnar Carlsson and Mikael Vejdemo-Johansson. *Topological data analysis with applications.* Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

[2] Martınez Eduardo and Velásquez Mario. *Optimizing Filter Maps and Coverings in the MAPPER Algorithm.* In preparation.

[3] Michael C. McCord. Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers. *Proc. Am. Math. Soc.*, 18:705–708, 1967.

[4] Gurjeet Singh, Facundo Memoli, and Gunnar Carlsson. Topological Methods for the Analysis of High Dimensional Data Sets and 3D Object Recognition. In M. Botsch, R. Pajarola, B. Chen, and M. Zwicker, editors, *Eurographics Symposium on Point-Based Graphics.* The Eurographics Association, 2007.

De los datos a la grupos de homología

Mauricio Restrepo

Departamento de Matemáticas, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá

El Análisis Topológico de Datos (TDA de su sigla en inglés) es una metodología de uso reciente que busca patrones geométricos que están presentes en diferentes conjuntos de datos.

Un conjunto de datos numéricos, puede ser visto como una nube de puntos en el espacio n-dimensional. Construyendo de manera apropiada un complejo simplicial sobre esta nube y estudiando su homología, es posible establecer diferencias entre nubes de puntos, de acuerdo con qué tan diferentes son sus grupos de homología. Se introducen las nociones básicas de la homología persistente y se presenta un caso de aplicación.

References

[1] G. Gunnar. Topology and Data. Bulletin (New Series) AMS. Volume 46, Number 2, April 2009, Pages 255–308
[2] Smith A., Dlotko P., Zavala V., Topological data analysis: Concepts, computation, and applications in chemical engineering, Computers & Chemical Engineering, Volume 146, 2021.
[3] Munch E., A user's Guide to Topological Data Analysis. Journal of Learning Analytics 4 (2) 47-61 (2017)
[4] Sheffar D., Introductory Topological Data Analysis. Department of Mathematics and Statistics. University of Victoria, Canada. arXiv:2004.04108v1 [math.HO] 7 Apr 2020.
[5] Gidea M. Topological Data Analysis of Critical Transitions in Financial Networks. International Winter School and Conference on Network Science. Springer Proceedings in Complexity. (2017)

Ambientes categóricos para la topología

Jose Reinaldo Montanez Puentes

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

La teoría de categorías aparece como una teoría que unifica el trabajo de las diferentes áreas de la matemática y en particular se ocupa de estudiar los objetos por sus relaciones con los otros más que por estudiarlos interiormente. Para el caso que nos ocupa, se trata de mostrar como algunas categorías como las categorías topológicas y los topos, objetos de estudio en esta exposición, son motivadas desde la topología. En particular las conexiones que se exponen permiten un mayor conocimiento de cada espacio topológico y una relación mas estrecha entre topología y topos. Creemos que el trabajo enriquece la teoría de los espacios topológicos en aspectos que poco se consideran y que giran alrededor de las topologías iniciales y finales. A su vez, esta teoría, al demostrar que no es exclusiva de los espacios topológicos, enriquece la teoría de categorías. Es de anotar que este trabajo toma como base [4] y [5] en donde se desarrolla una teoría más general.

References

[1] J. Adámek, H. Herrlich, , G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.
[2] P.T. Johnstone,(1977). Topos Theory, Academic Press, London.
[3] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to topos Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.
[4] R. Montañez , Funtores elevadores y coelevadores de estructura, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2007.
[5] R. Montañez, C. Ruiz, (2006). *Elevadores de Estructura*, Boletín de Matemáticas, 111 - 135.
[6] A. Oostra, *Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales*, Lecturas Matemáticas, **16** (1995), 63-72.
[7] O. Wyler, (1991). *Lecture Notes on Topoi and Quasitopoi*. Singapure: World Scientific.

Leyes 0-1 en lógica continua

Xavier Caicedo

Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá

Según las leyes 0-1 para la lógica de primer orden, obtenidas independientemente por Fagin (1976) y Glebskii, Kogan, Ligonkij, Talanov (1969), la probabilidad $\mu_n(\varphi)$ de que una sentencia φ de tipo relacional τ valga en una estructura escogida aleatoriamente en el conjunto de τ-estructuras con dominio $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ converge a 0 o a 1 cuando n va a infinito. Así, φ es asintóticamente verdadera o asintóticamente falsa con probabilidad 1. Con G. Badia y C. Noguera (2023) hemos demostrado análogos de este fenómeno para cualquier lógica multivaluada $\mathcal{L}^A$ con valores de verdad en un álgebra reticulada finita A, lo mismo que para la lógica continua $\mathcal{L}^{[0,1]}$. En el caso finito tenemos:

Dada $\varphi \in \mathcal{L}^A$, *existe un único valor* $a \in A$ *tal que* $\text{lím}_n\, \mu_n(\varphi = a) = 1$.

En el caso infinito, para una amplia clase de probabilidades en los modelos [0,1]-valuados con dominio $[n]$, v.gr. la medida de Lebesgue, tenemos para la lógica continua:

Dada $\varphi \in \mathcal{L}^{[0,1]}$, *existe un único* $a \in [0, 1]$ *tal que* $\text{lím}_n\, \mu_n(|\varphi - a| < \varepsilon) = 1$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

References

[1] G. Badía, X. Caicedo, C. Noguera, *Asymptotic truth-values in many valued logic.* arXiv:2306.13904v1 [math.LO] 24 Jun 2023.
[2] G. Badia and C. Noguera. *A 0-1 Law in Mathematical Fuzzy Logic*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 30:3833–3840 (2022).
[3] X. Caicedo and J. N. Iovino, *Omitting uncountable types and the strength of [0,1]-valued logics*, Ann. Pure Appl. Logic 165 (2014).
[4] X. Caicedo, *Maximality of continuous logic*. In José Iovino (ed.) *Beyond First Order Model Theory, Volume I:* 107-134. Chapman and Hall/CRC (2017).
[5] K. J. Compton, C. W. Henson, and S. Shelah. *Nonconvergence, undecidability, and intractability in asymptotic problems*. Annals of Pure and Applied Logic 36 (1987).
[6] R. Fagin, *Probabilities on Finite Models*, Journal of Symbolic Logic 41(1):50–58 (1976).
[7] Y.V. Glebskii, D.I. Kogan, M. Liogon'kii, and V. Talanov, *Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus.* Cybernetics and Systems Analysis 5:142–154 (1969).
[8] I. Goldbring, B. Hart, and A. Kruckman, *The asymptotic theory of finite metric spaces*, Bulletin of the London Mathematical Society 53:1740–1748 (2021).

[9] E. Grädel, H. Helal, M. Naaf, and R. Wilke, *Zero-One Laws and asymptotic Valuations of First-Order Logic in Semiring Semantics*. In Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2022) (C. Baier and D. Fisman, Eds.), pp. 41:1–41:12. ACM (2022).
[10] J. Lynch, *Probabilities of first-order sentences about unary functions*. Transactions of the American Mathematical Society 287 (1985).
[11] W. Oberschelp, *Asymptotic 0-1 laws in combinatorics*. In D. Jungnickel (ed.) *Combinatorial theory, Lecture Notes in Mathematics* 969:276–292, Springer (1982).

Editado por Ricardo H. Arteaga B. Estudiante de doctorado en ciencias – Matemáticas. Septiembre 2025.