

Los objetos de Ore en una categoría

VII Simposio de Topología - Carlos Ruiz Salguero

Reinaldo Montañez
jrmontanezp@unal.edu.co

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, Colombia, octubre de 2025

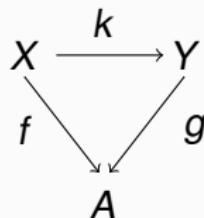
"En memoria del profesor Carlos Ruiz Salguero" Profesor UN

Problemas

1. Sea C una categoría ¿Para cuáles objetos A de C , la categoría C/A es una categoría topológica fibrada sobre C ?

$$O : C/A \longrightarrow C$$

2. La categoría C/A



3. Definición

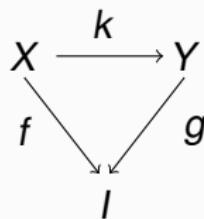
Un topos \mathcal{E} es una categoría que verifica los siguientes axiomas:

- 1 \mathcal{E} tiene objeto clasificador
- 2 \mathcal{E} tiene exponenciación
- 3 \mathcal{E} tiene límites finitos

Afirmación \mathcal{E}/A es un topos.

4. Sea Top la categoría de los espacios topológicos.

Se determina la categoría Top^*/I , $B_n(I)$; de los pares sobre I



f es haz, f es homeomorfismo local.

5. Se C una categoría pequeña se determina la categoría de los prehaces sobre C , \hat{C} ,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & \textit{Conj} \\ u \downarrow & & \uparrow F(u) \\ & & F(v) \end{array}$$

\hat{C} es un topos de Grothendieck.

6. Sea (I, E) un espacio topológico θ abiertos de I .

A partir de la categoría $B_n(I)$ se determina la categoría de las prehaces sobre θ

$$F_f : \theta \longrightarrow Conj \quad X \xrightarrow{f} I$$

$$F_f(v) = \{S : v \rightarrow x \mid f \circ s = i_v\}$$

7. Inquietud:

¿Cuáles son las condiciones sobre F

$$F : \theta \longrightarrow Conj$$

para que F sea de la forma F_f ?

Rta: F debe cumplir el axioma de “pegamiento”

8. Sea S_t la categoría de los prehaces sobre θ : que cumplen la condición de “pegamiento”.

Entonces

$$-B_n(I) \cong S_t(I)$$

La noción de categoría topológica

Definición

[1] Sea $F : C \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que C es una categoría topológica relativa a F y a \mathcal{D} , si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) F es fiel.
- ii) F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.
- iii) Para cada objeto X de \mathcal{D} , la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

Ejemplos

- ① Las categorías de los espacios Uniformes, Pretopológicos y Pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos [1].
- ② La categoría de los espacios métricos no tiene productos, por lo tanto no es una categoría topológica fibrada sobre la categoría de los conjuntos.
- ③ las categorías de los grupos topológicos y de los espacios vectoriales topológicos son categorías topológicas fibradas sobre las categorías bases de sus álgebras correspondientes, [1].

La categoría Ore y el clasificador de las categorías topológicas

La categoría *Ore* tiene por objetos las clases con estructura de retículo completo.

A partir de la categoría *Ore*, se determina la categoría $\widetilde{\text{Ore}}$, cuyos objetos son de la forma (X, \leq, x_0) , siendo (X, \leq) un objeto de *Ore* y x_0 un elemento de X .

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{H} & \widetilde{\text{Ore}} \\ F \downarrow & & \downarrow O_p \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{G} & \widetilde{\text{Ore}} \end{array}$$

Ejemplos

- ① La categoría topológica asociada a las Cribas en una categoría C .
- ② La categoría topológica asociada a los subobjetos en una categoría C .

Los objetos de Ore en una categoría

¿Existe un objeto A en C de tal manera que el functor
 $O_A : C/A \longrightarrow C$ sea un functor topológico?

La noción de Ore functor

Definición

Sea $F : C \rightarrow Conj$ un functor. Decimos que F es un *Ore – Functor*, si existe un functor $F_0 : C \rightarrow Ore$ tal que $O \circ F_0 = F$, donde $O : Ore \rightarrow Conj$ es el functor definido por $O(X, \leq) := X$ y $O(s, d) := s$.

Definición

Sea A un objeto de una categoría C . Se dice que A es un *Ore– Objeto* de C , si el functor $[-, A]_C : C^o \rightarrow Conj$ es un *Ore– functor*.

Es decir, A es un *Ore – objeto*, si y solamente si, existe un functor $F_A : C^o \rightarrow Ore$ tal que $O \circ F_A = [-, A]_C$; lo cual, haciendo uso del isomorfismo $Ore \cong Ore^o$, es equivalente a que se verifiquen las siguientes condiciones:

- ➊ Para cada objeto X de C , $F_A(X) = [X, A]_C$, lo cual implica que $[X, A]_C$ tiene estructura de retículo completo.
- ➋ Para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ de C , la función $s : [Y, A]_C \rightarrow [X, A]_C$ definida por $s(g) := g \circ f$ es monótona no decreciente y admite adjunto a derecha.

La categoría $Ore(C)$

Sea C una categoría. La categoría $Ore(C)$ se define como la subcategoría plena de C formada por los Ore -objetos de C .

Proposition

Sea (A, \leq) un retículo completo y τ una topología sobre A . Entonces, (A, τ) es un Ore–espacio topológico principal, si y solamente si, τ es la topología grosera.

Sea C un constructo topológico y A un objeto de C . Si (A, \leq) es un retículo completo, entonces para cada objeto X de C , $[X, A]_C$ es un conjunto ordenado por la relación:

“ $f \leq_X g$, si y solamente si, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ ”

Se dice que A es un Ore–objeto principal de C si A es un Ore–objeto siendo para cada objeto X de C , $[X, A]_C$ un retículo completo con el orden descrito anteriormente.

Proposition

Sea A un conjunto no vacío. Entonces, A es un Ore-conjunto, si y solamente si, A tiene estructura de retículo completo.

Un functor topológico asociado a un Ore-objeto

Sean C una categoría y A un objeto de la categoría $Ore(C)$. Entonces, existe un functor $F_A : C^o \rightarrow Ore$ tal que para cada objeto X de C , $F_A(X) = [X, A]_C$ y por lo tanto existe una relación de orden " \leq_X " en $[X, A]_C$, tal que $([X, A]_C, \leq_X)$ es un retículo completo.

Entonces, se determina una categoría relativa al functor F_A , que notamos C/\widehat{A} , omitiendo F_A , la cual se define de la siguiente manera:

- ① Objetos de C/\widehat{A} : colección de las parejas de la forma (X, f) donde f es un morfismo con dominio X y codominio A en C .
- ② Morfismos de C/\widehat{A} : se dice que h es un morfismo con dominio (X, f) y codominio (Y, g) en C/\widehat{A} , si h es un morfismo con dominio X y codominio Y en C y tal que $g \circ h \leq_X f$.

- 1 Dados los morfismos $h : (X, f) \rightarrow (Y, g)$ y $k : (Y, g) \rightarrow (Z, t)$, se define la composición de h y k , como el morfismo $k \circ h : (X, f) \rightarrow (Z, t)$. Nótese que h determina una función $\phi : [Y, A]_C \rightarrow [X, A]_C$ monótona no decreciente que se define por composición, por lo tanto $t \circ k \leq g$ implica $t \circ (k \circ h) \leq_X f$. La ley de composición en los morfismos de C/\widehat{A} está bien definida, es asociativa y para cada objeto (X, f) , su identidad viene dada por el morfismo $1_X : (X, f) \rightarrow (X, f)$ determinado por el morfismo identidad $1_X : X \rightarrow X$ de C .

Por lo tanto se determina el funtor $O_A : C/\widehat{A} \rightarrow C$, definido por $O_A(X, f) := X$ y $O_A(h) := h$.

Proposition

Sea C una categoría y A un objeto de $Ore(C)$ relativo a un functor F_A . Entonces, $O_A : C/\widehat{A} \longrightarrow C$ es un functor topológico, siendo O_A el functor definido por: $O_A(X, f) := X$ y $O_A(h) := h$.

Referencias

-  J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.
-  A. Donado-Núñez, J. Hernández-Pardo, R. Montañez, *Estructuras topológicas asociadas a una categoría*, Revista Vínculos, **19**, no. 1, (2022)p-p 7-20 .
-  C. Ruiz, *El clasificador universal de las categorías topológicas*, Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Junio, 1992.
-  R. Montañez, *Los objetos de Ore en una categoría*, Boletín de Matemáticas, Preprint.