Los objetos de Ore en una categoría
VII Simposio de Topología - Carlos Ruiz Salguero

Reinaldo Montañez
jrmontanezp@unal.edu.co

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, Colombia, octubre de 2025

"En memoria del profesor Carlos Ruiz Salguero" Profesor UN

Problemas

1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría ¿Para cuáles objetos A de $\mathcal{C}$, la categoría $\mathcal{C}/A$ es una categoría topológica fibrada sobre $\mathcal{C}$?

$$O : \mathcal{C}/A \longrightarrow \mathcal{C}$$

2. La categoría $\mathcal{C}/A$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

3. Definición
Un topos $\mathcal{E}$ es una categoría que verifica los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{E}$ tiene objeto clasificador
2. $\mathcal{E}$ tiene exponenciación
3. $\mathcal{E}$ tiene límites finitos

Afirmación $\mathcal{E}/A$ es un topos.

4. Sea *Top* la categoría de los espacios topológicos.
Se determina la categoría Top^*/I, $B_n(I)$; de los pares sobre I

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

f es haz, *f* es homeomorfismo local.

5. Se $\mathcal{C}$ una categoría pequeña se determina la categoría de los prehaces sobre $\mathcal{C}$, $\hat{C}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & Conj \\ u & & F(u) \\ \downarrow & & \uparrow \\ v & & F(v) \end{array}$$

$\hat{C}$ es un topos de Grothendicck.

6. Sea (I, E) un espacio topológico θ abiertos de I.
A partir de la categoría $B_n(I)$ se determina la categoría de las prehaces sobre θ

$$F_f : \theta \longrightarrow Conj \qquad X \xrightarrow{f} I$$

$$F_f(v) = \{S : v \to x \mid f \circ s = i_v\}$$

7. Inquietud:
¿Cuáles son las condiciones sobre F

$$F \quad \theta \longrightarrow Conj$$

para que F sea de la forma F_f?
Rta: F debe cumplir el axioma de “pegamiento”

8. Sea $S(t)$ la categoría de los prehaces sobre θ: que cumplen la condición de "pegamiento".
Entonces

$$-B_n(I) \cong S_t(I)$$

La noción de categoría topológica

Definición

[1] Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que $\mathcal{C}$ es una categoría topológica relativa a F y a $\mathcal{D}$, si se cumplen las siguientes condiciones:

i) F es fiel.

ii) F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.

iii) Para cada objeto X de $\mathcal{D}$, la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

Ejemplos

1. Las categorías de los espacios Uniformes, Pretopológicos y Pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos [1].
2. La categoría de los espacios métricos no tiene productos, por lo tanto no es una categoría topológica fibrada sobre la categoría de los conjuntos.
3. las categorías de los grupos topológicos y de los espacios vectoriales topológicos son categorías topológicas fibradas sobre las categorías bases de sus álgebras correspondientes, [1].

La categoría Ore y el clasificador de las categorías topológicas

La categoría *Ore* tiene por objetos las clases con estructura de retículo completo.
A partir de la categoría *Ore*, se determina la categoría $\widetilde{Ore}$, cuyos objetos son de la forma $(X, \leq, x_0)$, siendo $(X, \leq)$ un objeto de *Ore* y x_0 un elemento de X.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "F"'] & \widetilde{Ore} \arrow[d, "O_p"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "G"'] & Ore \end{tikzcd}$$

Ejemplos

1. La categoría topológica asociada a las Cribas en una categoría C.
2. La categoría topológica asociada a los subobjetos en una categoría C.

Los objetos de Ore en una categoría

¿Existe un objeto A en $\mathcal{C}$ de tal manera que el funtor $O_A : \mathcal{C}/A \longrightarrow \mathcal{C}$ sea un funtor topológico?

La noción de Ore funtor

Definición

Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow Conj$ un funtor. Decimos que F es un $Ore - Funtor$, si existe un funtor $F_0 : \mathcal{C} \longrightarrow Ore$ tal que $O \circ F_0 = F$, donde $O : Ore \longrightarrow Conj$ es el funtor definido por $O(X, \leq) := X$ y $O(s, d) := s$.

Definición

Sea A un objeto de una categoría $\mathcal{C}$. Se dice que A es un $Ore-$ Objeto de $\mathcal{C}$, si el funtor $[-, A]_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^o \longrightarrow Conj$ es un $Ore-$ funtor.

Es decir, A es un $Ore - objeto$, si y solamente si, existe un funtor $F_A : \mathcal{C}^o \longrightarrow Ore$ tal que $O \circ F_A = [-, A]_{\mathcal{C}}$; lo cual, haciendo uso del isomorfismo $Ore \cong Ore^o$, es equivalente a que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. Para cada objeto X de $\mathcal{C}$, $F_A(X) = [X, A]_{\mathcal{C}}$, lo cual implica que $[X, A]_{\mathcal{C}}$ tiene estructura de retículo completo.
2. Para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, la función $s : [Y, A]_{\mathcal{C}} \longrightarrow [X, A]_{\mathcal{C}}$ definida por $s(g) := g \circ f$ es monótona no decreciente y admite adjunto a derecha.

La categoría Ore($\mathcal{C}$)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. La categoría *Ore*($\mathcal{C}$) se define como la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ formada por los *Ore*−objetos de $\mathcal{C}$.

Proposition

Sea $(A, \leq)$ un retículo completo y τ una topología sobre A. Entonces, (A, τ) es un Ore−espacio topológico principal, si y solamente si, τ es la topología grosera.

Sea $\mathcal{C}$ un constructo topológico y A un objeto de $\mathcal{C}$. Si $(A, \leq)$ es un retículo completo, entonces para cada objeto X de $\mathcal{C}$, $[X, A]_{\mathcal{C}}$ es un conjunto ordenado por la relación:

$$\text{“}f \leq_X g, \text{ si y solamente si, } f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in X\text{”}$$

Se dice que A es un *Ore*−objeto principal de $\mathcal{C}$ si A es un *Ore*−objeto siendo para cada objeto X de $\mathcal{C}$, $[X, A]_{\mathcal{C}}$ un retículo completo con el orden descrito anteriormente.

Proposition

Sea A un conjunto no vacío. Entonces, A es un Ore−conjunto, si y solamente si, A tiene estructura de retículo completo.

Un funtor topológico asociado a un Ore-objeto

Sean $\mathcal{C}$ una categoría y A un objeto de la categoría $Ore(\mathcal{C})$. Entonces, existe un funtor $F_A : \mathcal{C}^o \to Ore$ tal que para cada objeto X de $\mathcal{C}$, $F_A(X) = [X, A]_{\mathcal{C}}$ y por lo tanto existe una relación de orden "$\leq_X$" en $[X, A]_{\mathcal{C}}$, tal que $([X, A]_{\mathcal{C}}, \leq_X)$ es un retículo completo.

Entonces, se determina una categoría relativa al funtor F_A, que notamos $\mathcal{C}/\widehat{A}$, omitiendo F_A, la cual se define de la siguiente manera:

1. Objetos de $\mathcal{C}/\widehat{A}$: colección de las parejas de la forma (X, f) donde f es un morfismo con dominio X y codominio A en $\mathcal{C}$.
2. Morfismos de $\mathcal{C}/\widehat{A}$: se dice que h es un morfismo con dominio (X, f) y codominio (Y, g) en $\mathcal{C}/\widehat{A}$, si h es un morfismo con dominio X y codominio Y en $\mathcal{C}$ y tal que $g \circ h \leq_X f$.

1. Dados los morfismos $h : (X, f) \longrightarrow (Y, g)$ y $k : (Y, g) \longrightarrow (Z, t)$, se define la composición de h y k, como el morfismo $k \circ h : (X, f) \longrightarrow (Z, t)$. Nótese que h determina una función $\phi : [Y, A]_{\mathcal{C}} \to [X, A]_{\mathcal{C}}$ monótona no decreciente que se define por composición, por lo tanto $t \circ k \leq g$ implica $t \circ (k \circ h) \leq_X f$. La ley de composición en los morfismos de $\mathcal{C}/\widehat{A}$ está bien definida, es asociativa y para cada objeto (X, f), su identidad viene dada por el morfismo $1_X : (X, f) \longrightarrow (X, f)$ determinado por el morfismo identidad $1_X : X \longrightarrow X$ de $\mathcal{C}$.

Por lo tanto se determina el funtor $O_A : \mathcal{C}/\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}$, definido por $O_A(X, f) := X$ y $O_A(h) := h$.

Proposition

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y A un objeto de Ore$(\mathcal{C})$ relativo a un funtor F_A. Entonces, $O_A : \mathcal{C}/\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor topológico, siendo O_A el funtor definido por: $O_A(X, f) := X$ y $O_A(h) := h$.

Referencias

- J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.
- A. Donado-Núñez, J. Hernández-Pardo, R. Montañez, *Estructuras topológicas asociadas a una categoría*, Revista Vínculos, **19**, no. 1, (2022)p-p 7-20 .
- C. Ruiz, *El clasificador universal de las categorías topológicas*, Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Junio, 1992.
- R. Montañez, *Los objetos de Ore en una categoría*, Boletín de Matemáticas, Preprint.