HACIA UNA TEORÍA DE MODELOS PARA ESPACIOS TOPOLÓGICOS

PEDRO H. ZAMBRANO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ.

MOTIVACIÓN TOPOLÓGICA

CUANTALES: Retículos introducidos para tratar con LOCALES (generalización del ideal de conjuntos abiertos de un espacio topológico) y RETÍCULOS MULTIPLICATIVOS DE IDEALES de la Teoría de anillos y Análisis funcional (e.g., álgebras C^* y de von Neumann).

R. FLAGG (1997): Espacios topológicos vistos como espacios pseudo-métricos, donde las distancias toman valores ¡NO en $[0, +\infty]$ sino en un cuantal adecuado construido a partir de la topología.

MOTIVACIÓN MODELO-TEÓRICA

(*) Shelah-Stern (70's): Mal comportamiento de los espacios de Banach (lógica de segundo orden de relaciones binarias).

(*) Chang-Keisler (60's), Henson-Iovino (70s), Ben-Yaacov et al (2000's): Lógica continua.

(*) Hirvonen-Hyttinen, Villaveces-Z., Boney-Z. (2000's–2010's): Clases elementales abstractas MÉTRICAS.

(*) Flum-Ziegler, Kucera, Pillay (80's): Teoría de modelos para estructuras topológicas algebraicas ⤳ MÓDULOS.

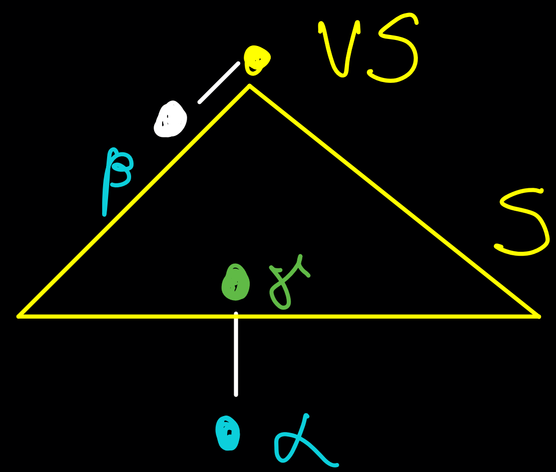
(*) Lawvere (70's): Marco CATEGÓRICO para una lógica con valores de verdad generalizados para estudiar espacios métricos.

(*) Liebermann-Rosický-Z. (2023): Generalización de

Clases elementales abstractas métricas con distancias tomando valores en un co-cuantal (cuantal de Flagg).

DEFINICIONES BÁSICAS

DEFINICIÓN Sea $(V,\le)$ un retículo completo. Dados $\alpha,\beta\in V$, decimos que α está TOTALMENTE POR DEBAJO de β ($\alpha\prec\beta$), ssi, si $S\subseteq V$ y $\beta\le\bigvee S$ entonces existe $\gamma\in S$ tal que $\alpha\le\gamma$



DEFINICIÓN Un CUANTAL CONMUTATIVO CON UNIDAD consiste de $\mathbb{V}=(V,*,\eta,\le)$ donde $(V,\le)$ es un retículo completo,

$(V, *, \eta)$ es un monoide conmutativo y $*$ distribuye con respecto a supremos arbitrarios.

Un CO-CUANTAL (cuantal de Flagg) consiste de una tupla $\mathbb{V} = (V, +, 0, \leq)$ donde $(V, *, \eta, \leq)^{op} = (V, *, \eta, \geq)$ es un cuantal conmutativo con unidad donde $+ := *$ y $0 := \eta = \perp_{\leq}$.

DEFINICIÓN Un co-cuantal $\mathbb{V}$ se dice COMPLETAMENTE CONSTRUCTIVAMENTE DISTRIBUTIVO (C.C.D.), ssi, para todo $a \in V$

$$a = \bigwedge \{ b \in V : a \prec b \}.$$

Un VALUE CO-CUANTAL $\mathbb{V}$ es un co-cuantal C.C.D. tal que

(*) $0 = \perp \prec \top$ y

(*) Si $\delta, \delta' \in V$ satisfacen $0 \prec \delta, \delta'$, entonces $0 \prec \delta \wedge \delta'$.

$\boxed{\text{EJEMPLOS}}$

① $(2 := \{0,1\}, +_{tr}, \leq)$, $0 < 1$.

② $\mathbb{I} := ([0,1], +_{tr}, \leq)$

③ Locales libres: Dado R un conjunto,

$$\downarrow(X) := \{Y \in \mathcal{P}_{fin}(R) : Y \subseteq X\} \quad (X \in \mathcal{P}_{fin}(R)).$$

$$\Omega(R) := \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_{fin}(R)) : X \in P \text{ implica } \downarrow(X) \subseteq P\}$$

$(\Omega(R), \cap, \mathcal{P}_{fin}(R), \supseteq)$ es un value co-cuantal.

CASO QUE NOS INTERESA: (X, τ) espacio topológico

$R := \tau$.

ESPACIOS DE CONTINUIDAD:

DEFINICIÓN Dados $X \neq \phi$ conjunto, $\mathbb{V}$ un value co-cuantal y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{V}$, decimos que (X, d) es un $\mathbb{V}$- espacio de continuidad, ssi,

(*) (reflexividad) para todo $x \in X$, $d(x, x) = 0$.

(*) (transitividad) para todo $x, y, z \in X$,

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

DEFINICIÓN Dados (X, d) un $\mathbb{V}$- espacio de continuidad, $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{V}^{+} := \{ \delta \in \mathbb{V} : 0 \prec \delta \}$,

$$B_{\varepsilon}(x) := \{ y \in X : d(x, y) \prec \varepsilon \}.$$

τ_d: topología inducida por (X, d).

TEOREMA (Flagg, 1997) Cualquier espacio topológico (X, τ) es topológicamente equivalente al $\Omega(\tau)$-espacio de continuidad (X, τ_d), donde $d : X \times X \longrightarrow \Omega(\tau)$ está definida por

$$d(a,b) := \{ A \in \mathcal{P}_{fin}(\tau) : \text{para todo } \mathcal{U} \in A,\ a \in \mathcal{U} \text{ implica } b \in \mathcal{U} \}.$$

IDEA: Fijando $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{fin}(\tau)$ y $x \in X$, notemos que $B_{\downarrow(\mathcal{F})}(x) = \bigcap \{ \mathcal{U} \in \mathcal{F} : x \in \mathcal{U} \}$.

[**CLAVES:** $\{ B_{\downarrow(\mathcal{F})}(x) \}_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{fin}(\tau)}$ forman una base para x,

$0 \prec \mathcal{P}$, ssi, para algún $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{fin}(\tau)$ $\mathcal{P} \subseteq \downarrow(\mathcal{F})$,

$x, y \in X$ y $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{fin}(\tau)$: $y \in B_{\downarrow(\mathcal{F})}(x)$, ssi, $\mathcal{F} \in d(x,y)$].

Hacia una Teoría de Modelos

Lenguaje de Primer Orden ($\mathcal{L}$): símbolos de función ($\mathcal{L}_F$), relación ($\mathcal{L}_R$) y constante ($\mathcal{L}_C$).

$\mathcal{L}$-Estructura: $\mathcal{M} := (M, \square^{\mathcal{M}}) \quad \square \in \mathcal{L}$

$R^k \in \mathcal{L}_R \rightsquigarrow R^{\mathcal{M}} \subseteq M^k$

$F^n \in \mathcal{L}_F \rightsquigarrow F^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$

$c \in \mathcal{L}_C \rightsquigarrow c^{\mathcal{M}} \in M.$

Observación $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^k$ se puede representar usando su función característica $\chi_{R^m} : M^k \longrightarrow \{0, 1\}$

$$\bar{x} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in R^m \\ 0 & \text{si } \bar{x} \notin R^m \end{cases}$$

LÓGICA CONTINUA: Fijemos (M, d) un espacio métrico (completo).

CLAVE: "Valores de verdad" en $[0, 1]$ (qué tan lejos estamos de la "verdad").

$R^k \in \mathcal{L}_R \rightsquigarrow R^m : M^k \longrightarrow [0, 1]$

(uniformemente) continua.

$R^m(\bar{a}) = 0$: "$\bar{a} \in R^m$".

$\mathbb{V}$- ESTRUCTURAS CONTINUAS:

Fijo $(M, d: M\times M \to \mathbb{V})$ un $\mathbb{V}$-espacio de continuidad, definimos una $\mathcal{L}$-estructura continua $\mathcal{M} = ((M,d), \square^{\mathcal{M}} \in \mathcal{L})$ de manera análoga como en lógica continua:

$$R^K \in \mathcal{L}_R \rightsquigarrow R^{\mathcal{M}}: M^K \longrightarrow \mathbb{V}.$$

(uniformemente) continua.

¿QUÉ TAN DIFERENTE ES LO OBTENIDO DE LA LÓGICA CONTINUA?

TEOREMA (Reyes - Z.) Si $\mathbb{V}$ es un value co-cuantal co-Girard, se satisface la propiedad de cadenas elementales contable.

PROPOSICIÓN (Reyes–Zo) Sea $\mathbb{V}$ es un co-cuantal que tiene restas y es un $\mathbb{V}$-dominio junto a su topología simétrica (i.e., tomar la simetrización de d). Dado $(M_i, d_i)_{i\in I}$ una sucesión de $\mathbb{V}$-espacios de continuidad, $\left(\prod_{i\in I} M_i, d_D\right)$ es un $\mathbb{V}$-espacio de continuidad donde

$$d\left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) := \lim_{i,D} d_i(x_i, y_i)$$

(D: ultrafiltro sobre I).

TEOREMA (Teorema de Łoś, Reyes–Zo) Si $\varphi(\overline{x})$ es una $\mathcal{L}$-fórmula y $(a_i^1)_{i\in I}, \dots, (a_i^n)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$,

$$\varphi^{\prod_{i\in I} M_i}\left((a_i^1)_{i\in I}, \dots, (a_i^n)_{i\in I}\right) = \lim_{i,D} \varphi^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n).$$

COROLARIO Esta lógica satisface COMPACIDAD.

TEOREMA (Iovino, 2001) ¡NO existe una lógica para estructuras analíticas que extienda propiamente a la lógica continua que satisfagan la propiedad de cadenas elementales y compacidad.

LÓGICA CONTINUA: $\mathbb{I} := ([0,1], +, 0, \leq)$.

$\mathbb{V}$ value co-cuantal, co-Girard, $\mathbb{V}$-dominio con restas.

PREGUNTA Si quitamos alguna de estas condiciones adicionales (e.g., $[0,+\infty]$ ¡NO es $\mathbb{V}$-dominio), ¿qué tipo de lógica obtenemos?

REFERENCIAS

(*) R. Flagg, Quantales and Continuity spaces, Algebra Univ. 37 (1997), 257-276.

(*) M. Lieberman, J. Rosický, P.H. Zambrano, Tameness of generalized metric structures, Archive for Mathematical Logic 62 (2023), 531-558.

(*) D. Reyes, P.H. Zambrano, A characterization of continuous logic by using quantale-valued logics, preprint, arxiv: 2102.06067

¡MUCHAS GRACIAS!