SEMIGRUPO DE SEMICARACTERES DE SEMIGRUPOS LOCALMENTE COMPACTOS PSEUDOCOMPACTOS
VII SIMPOSIO DE TOPOLOGÍA CARLOS JAVIER RUIZ SALGUERO
Universidad Nacional de Colombia

JULIO CÉSAR HERNÁNDEZ ARZUSA
Programa de Matemáticas-Universidad de Cartagena

10 de octubre de 2025

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).
En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).
En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:
Todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto, cancelativo, conmutativo y con traslaciones abiertas es compacto (por ende un grupo).

INTRODUCCIÓN

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).
En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:
Todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto, cancelativo, conmutativo y con traslaciones abiertas es compacto (por ende un grupo).
Desde entonces se han hecho esfuerzos por eliminar la conmutatividad en el resultado anterior, dando origen a la siguiente pregunta más general:

INTRODUCCIÓN

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).
En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:
Todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto, cancelativo, conmutativo y con traslaciones abiertas es compacto (por ende un grupo).
Desde entonces se han hecho esfuerzos por eliminar la conmutatividad en el resultado anterior, dando origen a la siguiente pregunta más general:
¿Es todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto y con traslaciones abiertas, compacto?

SEMIGRUPOS INVERSOS

Un semigrupo es inverso o Clifford si es unión de grupos.
Según [3], un semigrupo S es in verso si y solo si dado $x \in S$, existe $y \in S$ tal que $xy = yx$, $xyx = x$ y $yxy = y$.

SEMIGRUPOS INVERSOS

Un semigrupo es inverso o Clifford si es unión de grupos.
Según [3], un semigrupo S es in verso si y solo si dado $x \in S$, existe $y \in S$ tal que $xy = yx$, $xyx = x$ y $yxy = y$.
Si S es un semigrupo localmente compacto y pseudocompacto, $\beta(S \times S) = \beta S \times \beta S$. Por tanto la operación de semigrupo de S se puede extender de forma continua a βS.

Un semigrupo es inverso o Clifford si es unión de grupos.
Según [3], un semigrupo S es in verso si y solo si dado $x \in S$, existe $y \in S$ tal que $xy = yx$, $xyx = x$ y $yxy = y$.
Si S es un semigrupo localmente compacto y pseudocompacto, $\beta(S \times S) = \beta S \times \beta S$. Por tanto la operación de semigrupo de S se puede extender de forma continua a βS.

Proposición

Sea S localmente compacto y pseudocompacto. Entonces

1. *Si S es Clifford, βS es Clifford.*
2. *Si S es abeliano, βS es abeliano.*

Sea

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}.$$

Un semicaracter de un semigrupo topológico S es un homomorfismo continuo, no nulo, de S en $\mathbb{D}$. El conjunto de todos los semicaracteres de S lo notaremos por S^*.

Teorema

Existe un isomorfismo continuo de $(\beta S)^*$ en S^*.

S^* siendo S compacto

Si $x \in S$ definamos $\hat{x} \in (S^*)^*$ por $\hat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in S^*$.

S^* siendo S compacto

Si $x \in S$ definamos $\hat{x} \in (S^*)^*$ por $\hat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in S^*$.

Teorema

[2] Si S es compacto, abeliano, Clifford y sus semicaracteres separan puntos, entonces la aplicación de S en $(S^*)^*$, dada por $x \mapsto \hat{x}$ es un isomorfismo topológico.

Si $x \in S$ definamos $\hat{x} \in (S^*)^*$ por $\hat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in S^*$.

Teorema

[2] Si S es compacto, abeliano, Clifford y sus semicaracteres separan puntos, entonces la aplicación de S en $(S^*)^*$, dada por $x \mapsto \hat{x}$ es un isomorfismo topológico.

Pongamos $\hat{S} = \{\chi \in S^* : \chi = 0 \text{ o } |\chi(x)| = 1 \text{ para todo } x \in S\}$

Si $x \in S$ definamos $\hat{x} \in (S^*)^*$ por $\hat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in S^*$.

Teorema

[2] Si S es compacto, abeliano, Clifford y sus semicaracteres separan puntos, entonces la aplicación de S en $(S^*)^*$, dada por $x \mapsto \hat{x}$ es un isomorfismo topológico.

Pongamos $\hat{S} = \{\chi \in S^* : \chi = 0 \text{ o } |\chi(x)| = 1 \text{ para todo } x \in S\}$

Teorema

[2] Si S es compacto y conmutativo, $\hat{S}$ es discreto en S^*. Por tanto, si S es además Clifford, S^* es discreto.

S^* siendo S compacto

Definamos en S la siguiente relación: $x \sim y$ si $\chi(x) = \chi(y)$ para cada $\chi \in S^*$. Entonces $\sim$ define una congruencia en S, $CS =: S/\sim$ es un semigrupo topológico y existe una biyección continua de $\Theta : (CS)^* \longrightarrow S^*$.

Definamos en S la siguiente relación: $x \sim y$ si $\chi(x) = \chi(y)$ para cada $\chi \in S^*$. Entonces $\sim$ define una congruencia en S, $CS =: S/\sim$ es un semigrupo topológico y existe una biyección continua de $\Theta : (CS)^* \longrightarrow S^*$.

Teorema

Si S es compacto, Clifford y abeliano, Θ es un isomorfismo topológico. Por tanto, induce un isomorfismo topológico:

$$\Theta^* \colon (S^*)^* \longrightarrow ((CS)^*)^* = CS$$

S^* siendo S compacto

Teorema

El siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Psi"'] & CS \\
(S^*)^* \arrow[ur, "\Theta^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Teorema

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Psi"'] & CS \\ (S^*)^* \arrow[ur, "\Theta^*"'] & \end{tikzcd}$$

Ψ es sobre, por tanto, dado $\chi \in (S^*)^*$ existe $x \in S$ tal que $\chi = \hat{x}$.

- Arkhangelskii, A. V., and Mikhail Tkachenko. Topological groups and related structures. Vol. 1. Atlantis press, 2008.
- Austin, C. W. "Duality theorems for some commutative semigroups." Transactions of the American Mathematical Society 109.2 (1963): 245-256.
- Gutik, Oleg, DuSan Pagon, and DuSan RepovS. "The continuity of the inversion and the structure of maximal subgroups in countably compact topological semigroups..Acta Mathematica Hungarica 124.3 (2009): 201-214.
- Hernández, Julio C., and Karl H. Hofmann. .A note on locally compact subsemigroups of compact groups." Semigroup Forum. Vol. 103. No. 1. New York: Springer US, 2021.