

SEMIGRUPO DE SEMICARACTERES DE  
SEMIGRUPOS LOCALMENTE COMPACTOS  
PSEUDOCOMPACTOS  
VII SIMPOSIO DE TOPOLOGÍA CARLOS  
JAVIER RUIZ SALGUERO  
Universidad Nacional de Colombia

JULIO CÉSAR HERNÁNDEZ ARZUSA  
Programa de Matemáticas-Universidad de Cartagena

10 de octubre de 2025

# INTRODUCCIÓN

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).

En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:

# INTRODUCCIÓN

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).

En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:

Todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto, cancelativo, conmutativo y con traslaciones abiertas es compacto (por ende un grupo).

# INTRODUCCIÓN

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).

En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:

Todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto, cancelativo, conmutativo y con traslaciones abiertas es compacto (por ende un grupo).

Desde entonces se han hecho esfuerzos por eliminar la conmutatividad en el resultado anterior, dando origen a la siguiente pregunta más general:

# INTRODUCCIÓN

Es sabido que todo grupo topológico localmente compacto y pseudocompacto es compacto (ver [1]).

En [4] se dio un resultado similar para semigrupos:

Todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto, cancelativo, conmutativo y con traslaciones abiertas es compacto (por ende un grupo).

Desde entonces se han hecho esfuerzos por eliminar la conmutatividad en el resultado anterior, dando origen a la siguiente pregunta más general:

¿Es todo semigrupo localmente compacto, pseudocompacto y con traslaciones abiertas, compacto?

# SEMIGRUPOS INVERSOS

Un semigrupo es inverso o Clifford si es unión de grupos.

Según [3], un semigrupo  $S$  es inverso si y solo si dado  $x \in S$ , existe  $y \in S$  tal que  $xy = yx$ ,  $xyx = x$  y  $yxy = y$ .

# SEMIGRUPOS INVERSOS

Un semigrupo es inverso o Clifford si es unión de grupos.

Según [3], un semigrupo  $S$  es inverso si y solo si dado  $x \in S$ , existe  $y \in S$  tal que  $xy = yx$ ,  $xyx = x$  y  $yxy = y$ .

Si  $S$  es un semigrupo localmente compacto y pseudocompacto,  $\beta(S \times S) = \beta S \times \beta S$ . Por tanto la operación de semigrupo de  $S$  se puede extender de forma continua a  $\beta S$ .



# SEMIGRUPOS INVERSOS

Un semigrupo es inverso o Clifford si es unión de grupos.

Según [3], un semigrupo  $S$  es inverso si y solo si dado  $x \in S$ , existe  $y \in S$  tal que  $xy = yx$ ,  $xyx = x$  y  $yxy = y$ .

Si  $S$  es un semigrupo localmente compacto y pseudocompacto,  $\beta(S \times S) = \beta S \times \beta S$ . Por tanto la operación de semigrupo de  $S$  se puede extender de forma continua a  $\beta S$ .

## Proposición

*Sea  $S$  localmente compacto y pseudocompacto. Entonces*

- 1. Si  $S$  es Clifford,  $\beta S$  es Clifford.*
- 2. Si  $S$  es abeliano,  $\beta S$  es abeliano.*

Sea

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}.$$

Un semicaracter de un semigrupo topológico  $S$  es un homomorfismo continuo, no nulo, de  $S$  en  $\mathbb{D}$ . El conjunto de todos los semicaracteres de  $S$  lo notaremos por  $S^*$ .

## Teorema

*Existe un isomorfismo continuo de  $(\beta S)^*$  en  $S^*$ .*

## $S^*$ siendo $S$ compacto

Si  $x \in S$  definamos  $\hat{x} \in (S^*)^*$  por  $\hat{x}(f) = f(x)$  para cada  $f \in S^*$ .

## $S^*$ siendo $S$ compacto

Si  $x \in S$  definamos  $\hat{x} \in (S^*)^*$  por  $\hat{x}(f) = f(x)$  para cada  $f \in S^*$ .

### Teorema

*[2] Si  $S$  es compacto, abeliano, Clifford y sus semicaracteres separan puntos, entonces la aplicación de  $S$  en  $(S^*)^*$ , dada por  $x \mapsto \hat{x}$  es un isomorfismo topológico.*

## $S^*$ siendo $S$ compacto

Si  $x \in S$  definamos  $\hat{x} \in (S^*)^*$  por  $\hat{x}(f) = f(x)$  para cada  $f \in S^*$ .

### Teorema

*[2] Si  $S$  es compacto, abeliano, Clifford y sus semicaracteres separan puntos, entonces la aplicación de  $S$  en  $(S^*)^*$ , dada por  $x \mapsto \hat{x}$  es un isomorfismo topológico.*

Pongamos  $\hat{S} = \{\chi \in S^* : \chi = 0 \text{ o } |\chi(x)| = 1 \text{ para todo } x \in S\}$

## $S^*$ siendo $S$ compacto

Si  $x \in S$  definamos  $\hat{x} \in (S^*)^*$  por  $\hat{x}(f) = f(x)$  para cada  $f \in S^*$ .

### Teorema

[2] Si  $S$  es compacto, abeliano, Clifford y sus semicaracteres separan puntos, entonces la aplicación de  $S$  en  $(S^*)^*$ , dada por  $x \mapsto \hat{x}$  es un isomorfismo topológico.

Pongamos  $\hat{S} = \{\chi \in S^* : \chi = 0 \text{ o } |\chi(x)| = 1 \text{ para todo } x \in S\}$

### Teorema

[2] Si  $S$  es compacto y conmutativo,  $\hat{S}$  es discreto en  $S^*$ . Por tanto, si  $S$  es además Clifford,  $S^*$  es discreto.

## $S^*$ siendo $S$ compacto

Definamos en  $S$  la siguiente relación:  $x \sim y$  si  $\chi(x) = \chi(y)$  para cada  $\chi \in S^*$ . Entonces  $\sim$  define una congruencia en  $S$ ,  $CS =: S/\sim$  es un semigrupo topológico y existe una biyección continua de  $\Theta : (CS)^* \longrightarrow S^*$ .

## $S^*$ siendo $S$ compacto

Definamos en  $S$  la siguiente relación:  $x \sim y$  si  $\chi(x) = \chi(y)$  para cada  $\chi \in S^*$ . Entonces  $\sim$  define una congruencia en  $S$ ,  $CS =: S / \sim$  es un semigrupo topológico y existe una biyección continua de  $\Theta : (CS)^* \longrightarrow S^*$ .

### Teorema

*Si  $S$  es compacto, Clifford y abeliano,  $\Theta$  es un isomorfismo topológico. Por tanto, induce un isomorfismo topológico:*

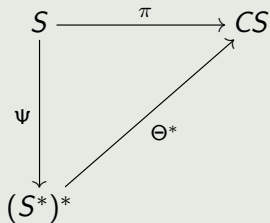
$$\Theta^* : (S^*)^* \longrightarrow ((CS)^*)^* = CS$$



$S^*$  siendo  $S$  compacto

### Teorema

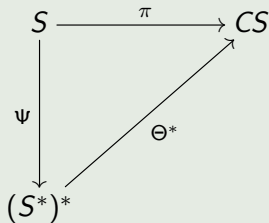
*El siguiente diagrama conmuta*







$S^*$  siendo  $S$  compacto

### Teorema

*El siguiente diagrama conmuta*



$\psi$  es sobre, por tanto, dado  $\chi \in (S^*)^*$  existe  $x \in S$  tal que  $\chi = \hat{x}$ .

-  Arkhangel'skii, A. V., and Mikhail Tkachenko. Topological groups and related structures. Vol. 1. Atlantis press, 2008.
-  Austin, C. W. "Duality theorems for some commutative semigroups." Transactions of the American Mathematical Society 109.2 (1963): 245-256.
-  Gutik, Oleg, DuSan Pagon, and DuSan Repovš. "The continuity of the inversion and the structure of maximal subgroups in countably compact topological semigroups." Acta Mathematica Hungarica 124.3 (2009): 201-214.
-  Hernández, Julio C., and Karl H. Hofmann. "A note on locally compact subsemigroups of compact groups." Semigroup Forum. Vol. 103. No. 1. New York: Springer US, 2021.