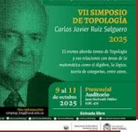
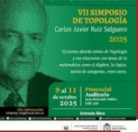


Topologías de Grothendieck localizadas y dualidades de tipo Stone

Joaquín Luna Torres

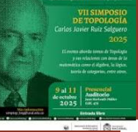
Séptimo Simposio de topología Carlos Javier Ruiz Salguero

9 de octubre – 11 de octubre de 2025



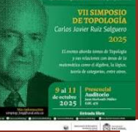
En esta charla disertaremos sobre los siguentes aspectos:

- Dada una categoría $\mathscr{C}$, X un objeto de $\mathscr{C}$ y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$, decimos que $J(X)$ es una $\mathfrak{G}$-**topología localizada en** X y que $(X, J(X))$ es un $\mathfrak{G}$-**espacio topológico localizado**.
- Sea $\mathscr{C}$ una categoría finitamente completa y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$. Para un morfismo $f : B \to C$ en $\mathscr{C}$ y una criba $\mathcal{S} \in J(C)$, sea $f^*(\mathcal{S}) = \{\psi \mid cod(\psi) = B, f \circ \psi \in \mathcal{S}\}$ la criba correspondiente en B, entonces $f^*(J(C)) =: \{g^*(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \in J(C)\}$ es una $\mathfrak{G}$-topología localizada en B.



En 1937, M. Stone demostró que existe una correspondencia biyectiva entre la clase de todos los espacios booleanos y la clase de todas las álgebras booleanas generalizadas. En la clase de espacios booleanos compactos (espacios de Stone), esta biyección puede extenderse a una dualidad $T : Stone \to Boole$ entre la categoría de espacios de Stone y funciones continuas y la categoría Boole de álgebras booleanas y homomorfismos booleanos; este es el teorema clásico de dualidad de Stone.

$$\begin{tikzcd}
Stone \arrow[rr, bend right] & & Boole \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$



Dualidad de Stone y lógica modal

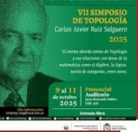
Alexander Kurz [7] nos dice :Hay una signatura (operaciones booleanas más un operador unario $\Box$) y un conjunto de ecuaciones E ($\Box$ preserva los extremos inferiores finitos) y hay operadores (definibles) 1 y $\leftrightarrow$ tales que

$\vdash_{\mathcal{ML}} \phi \Leftrightarrow_{BA} +E \vdash_{\mathcal{EL}} \phi = 1$

$E_{BA} + E \vdash \mathcal{EL}\phi = \phi \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{ML}} \phi \leftrightarrow \psi$

Un álgebra modal es un conjunto de fórmulas modales cerradas bajo operadores booleanos y modales y cociente por equivalencia lógica (dos términos ϕ y ψ son lógicamente equivalentes sólo si $\vdash_{\mathcal{ML}} \phi \leftrightarrow \psi$.

La categoría de álgebras modales es isomorfa a la categoría de álgebras por el funtor $L : \mathcal{BA} \to BA$ que asigna un álgebra booleana A al álgebra booleana libre generada por $\{\Box a \mid a \in A\}$ cuyo cociente es la congruencia más pequeña que contiene a $(\Box 1; 1)$ y $(\Box a \wedge \Box b; \Box(a \wedge b), (a; b \in A)$.



Dualidad de Stone y lógica modal

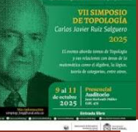
Alexander Kurz [7] nos dice :Hay una signatura (operaciones booleanas más un operador unario $\Box$) y un conjunto de ecuaciones E ($\Box$ preserva los extremos inferiores finitos) y hay operadores (definibles) 1 y $\leftrightarrow$ tales que

$\vdash_{\mathcal{ML}} \phi \Leftrightarrow_{BA} +E \vdash_{\mathcal{EL}} \phi = 1$

$E_{BA} + E \vdash \mathcal{EL}\phi = \phi \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{ML}} \phi \leftrightarrow \psi$

Un álgebra modal es un conjunto de fórmulas modales cerradas bajo operadores booleanos y modales y cociente por equivalencia lógica (dos términos ϕ y ψ son lógicamente equivalentes sólo si $\vdash_{\mathcal{ML}} \phi \leftrightarrow \psi$.

La categoría de álgebras modales es isomorfa a la categoría de álgebras por el funtor $L : \mathcal{B}A \to BA$ que asigna un álgebra booleana A al álgebra booleana libre generada por $\{\Box a \mid a \in A\}$ cuyo cociente es la congruencia más pequeña que contiene a $(\Box 1; 1)$ y $(\Box a \wedge \Box b; \Box(a \wedge b), (a; b \in A)$.



Dualidad de Stone y lógica modal

Alexander Kurz [7] nos dice :Hay una signatura (operaciones booleanas más un operador unario $\Box$) y un conjunto de ecuaciones E ($\Box$ preserva los extremos inferiores finitos) y hay operadores (definibles) 1 y $\leftrightarrow$ tales que

$\vdash_{\mathcal{ML}} \phi \Leftrightarrow_{BA} +E \vdash_{\mathcal{EL}} \phi = 1$

$E_{BA} + E \vdash \mathcal{EL}\phi = \phi \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{ML}} \phi \leftrightarrow \psi$

Un álgebra modal es un conjunto de fórmulas modales cerradas bajo operadores booleanos y modales y cociente por equivalencia lógica (dos términos ϕ y ψ son lógicamente equivalentes sólo si $\vdash_{\mathcal{ML}} \phi \leftrightarrow \psi$.

La categoría de álgebras modales es isomorfa a la categoría de álgebras por el funtor $L : \mathcal{BA} \to BA$ que asigna un álgebra booleana A al álgebra booleana libre generada por $\{\Box a \mid a \in A\}$ cuyo cociente es la congruencia más pequeña que contiene a $(\Box 1; 1)$ y $(\Box a \wedge \Box b; \Box(a \wedge b), (a; b \in A)$.

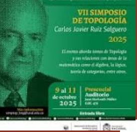
Dualidades de tipo Stone a través de 'puentes' de teoría de topos

Olivia Caramelo [3] plantea algunas dualidades de tipo Stone en términos de la existencia de un topos común $Sh(\mathcal{C}; J) \simeq Sh(\mathcal{D}; K)$ adjunto naturalmente a cada una de las estructuras independientemente una de la otra.

Una fuente natural de equivalencias de topos

$$Sh(\mathcal{C}; J) \simeq Sh(\mathcal{D}; K);$$

se obtiene del lema de comparación de Grothendieck: $\mathcal{C}$ es una subcategoría completa K-densa de $\mathcal{D}$ (es decir, una subcategoría completa $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ tal que, para cualquier objeto d de $\mathcal{D}$, la criba generada por las flechas desde los objetos de $\mathcal{C}$ a d es un K-cubrimiento) y J es la topología de Grothendieck inducida $K|_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}$.



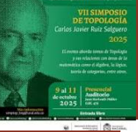
Dualidades de tipo Stone a través de ‘puentes’ de teoría de topos

Olivia Caramelo [3] plantea algunas dualidades de tipo Stone en términos de la existencia de un topos común $Sh(\mathcal{C}; J) \simeq Sh(\mathcal{D}; K)$ adjunto naturalmente a cada una de las estructuras independientemente una de la otra.

Una fuente natural de equivalencias de topos

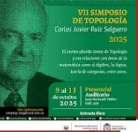
$$Sh(\mathcal{C}; J) \simeq Sh(\mathcal{D}; K);$$

se obtiene del lema de comparación de Grothendieck: $\mathcal{C}$ es una subcategoría completa K-densa de $\mathcal{D}$ (es decir, una subcategoría completa $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ tal que, para cualquier objeto d de $\mathcal{D}$, la criba generada por las flechas desde los objetos de $\mathcal{C}$ a d es un K-cubrimiento) y J es la topología de Grothendieck inducida $K|_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}$.



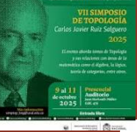
Sección 1

Consideraciones iniciales



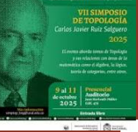
Trabajaremos con una categoría $\mathscr{C}$ que es finitamente completa. De S. MacLane e I. Moerdijk [9], se tiene lo siguiente:

- Una criba $\mathcal{S}$ sobre $\mathscr{C}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{C}$, todos con codominio C, tales que $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow f \circ g \in \mathcal{S}$ siempre que esta composición tenga sentido.
- Si $\mathcal{S}$ es una criba sobre $\mathscr{C}$ y $h : D \to C$ es cualquier flecha a C, entonces $h^*(\mathcal{S}) = \{g \mid cod(g) = D, h \circ g \in \mathcal{S}\}$ es una criba sobre D.
- Una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathscr{C}$ es una función J que asigna a cada objeto C de $\mathscr{C}$ una colección $J(C)$ de cribas sobre C, de tal manera que
  (i) la criba máximal $t_c = \{f \mid cod(f) = C\}$ está en $J(C)$;
  (ii) (axioma de estabilidad) si $\mathcal{S} \in J(C)$, entonces $h^*(\mathcal{S}) \in J(D)$ para cualquier flecha $h : D \to C$;
  (iii) (axioma de transitividad) si $\mathcal{S} \in J(C)$ y $\mathcal{R}$ es cualquier criba en C tal que $h^*(\mathcal{R}) \in J(D)$ para todo $h : D \to C$ en $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R} \in J(C)$



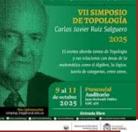
Trabajaremos con una categoría $\mathscr{C}$ que es finitamente completa. De S. MacLane e I. Moerdijk [9], se tiene lo siguiente:

- Una criba $\mathcal{S}$ sobre $\mathscr{C}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{C}$, todos con codominio C, tales que $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow f \circ g \in \mathcal{S}$ siempre que esta composición tenga sentido.
- Si $\mathcal{S}$ es una criba sobre $\mathscr{C}$ y $h : D \to C$ es cualquier flecha a C, entonces $h^*(\mathcal{S}) = \{g \mid cod(g) = D, h \circ g \in \mathcal{S}\}$ es una criba sobre D.
- Una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathscr{C}$ es una función J que asigna a cada objeto C de $\mathscr{C}$ una colección $J(C)$ de cribas sobre C, de tal manera que
  (i) la criba máximal $t_c = \{f \mid cod(f) = C\}$ está en $J(C)$;
  (ii) (axioma de estabilidad) si $\mathcal{S} \in J(C)$, entonces $h^*(\mathcal{S}) \in J(D)$ para cualquier flecha $h : D \to C$;
  (iii) (axioma de transitividad) si $\mathcal{S} \in J(C)$ y $\mathcal{R}$ es cualquier criba en C tal que $h^*(\mathcal{R}) \in J(D)$ para todo $h : D \to C$ en $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R} \in J(C)$.



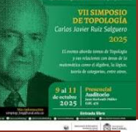
Trabajaremos con una categoría $\mathscr{C}$ que es finitamente completa. De S. MacLane e I. Moerdijk [9], se tiene lo siguiente:

- Una criba $\mathcal{S}$ sobre $\mathscr{C}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{C}$, todos con codominio C, tales que $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow f \circ g \in \mathcal{S}$ siempre que esta composición tenga sentido.
- Si $\mathcal{S}$ es una criba sobre $\mathscr{C}$ y $h : D \to C$ es cualquier flecha a C, entonces $h^*(\mathcal{S}) = \{g \mid cod(g) = D, h \circ g \in \mathcal{S}\}$ es una criba sobre D.
- Una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathscr{C}$ es una función J que asigna a cada objeto C de $\mathscr{C}$ una colección $J(C)$ de cribas sobre C, de tal manera que
  (i) la criba máximal $t_c = \{f \mid cod(f) = C\}$ está en $J(C)$;
  (ii) (axioma de estabilidad) si $\mathcal{S} \in J(C)$, entonces $h^*(\mathcal{S}) \in J(D)$ para cualquier flecha $h : D \to C$;
  (iii) (axioma de transitividad) si $\mathcal{S} \in J(C)$ y $\mathcal{R}$ es cualquier criba en C tal que $h^*(\mathcal{R}) \in J(D)$ para todo $h : D \to C$ en $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R} \in J(C)$.

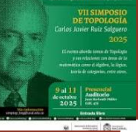


Trabajaremos con una categoría $\mathscr{C}$ que es finitamente completa. De S. MacLane e I. Moerdijk [9], se tiene lo siguiente:

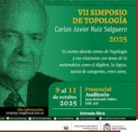
- Una criba $\mathcal{S}$ sobre $\mathscr{C}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{C}$, todos con codominio C, tales que $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow f \circ g \in \mathcal{S}$ siempre que esta composición tenga sentido.
- Si $\mathcal{S}$ es una criba sobre $\mathscr{C}$ y $h : D \to C$ es cualquier flecha a C, entonces $h^*(\mathcal{S}) = \{g \mid cod(g) = D, h \circ g \in \mathcal{S}\}$ es una criba sobre D.
- Una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathscr{C}$ es una función J que asigna a cada objeto C de $\mathscr{C}$ una colección $J(C)$ de cribas sobre C, de tal manera que
  - (i) la criba máximal $t_c = \{f \mid cod(f) = C\}$ está en $J(C)$;
  - (ii) (axioma de estabilidad) si $\mathcal{S} \in J(C)$, entonces $h^*(\mathcal{S}) \in J(D)$ para cualquier flecha $h : D \to C$;
  - (iii) (axioma de transitividad) si $\mathcal{S} \in J(C)$ y $\mathcal{R}$ es cualquier criba en C tal que $h^*(\mathcal{R}) \in J(D)$ para todo $h : D \to C$ en $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R} \in J(C)$.



- Un sitio significará un par $(\mathscr{C}, J)$ que consiste en una categoría pequeña $\mathscr{C}$ y una topología de Grothendieck J en $\mathscr{C}$.
- Si $\mathcal{S} \in J(C)$, decimos que $\mathcal{S}$ es una criba cubriente, o que $\mathcal{S}$ cubre a C.
- Si $\mathcal{S} \in J(C)$, decimos que $\mathcal{S}$ es una criba cubriente,o que $\mathcal{S}$ cubre a C. Tambien decimos que una criba $\mathcal{S}$ en $\mathscr{C}$ cubre una flecha $f : D \to C$ si $f^*(\mathcal{S})$ cubre a D. (De esta manera $\mathcal{S}$ cubre a C sii $\mathcal{S}$ cubre la flecha idéntica de C).

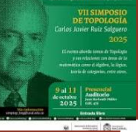


- Un sitio significará un par $(\mathscr{C}, J)$ que consiste en una categoría pequeña $\mathscr{C}$ y una topología de Grothendieck J en $\mathscr{C}$.
- Si $\mathcal{S} \in J(C)$, decimos que $\mathcal{S}$ es una criba cubriente, o que $\mathcal{S}$ cubre a C.
- Si $\mathcal{S} \in J(C)$, decimos que $\mathcal{S}$ es una criba cubriente,o que $\mathcal{S}$ cubre a C. Tambien decimos que una criba $\mathcal{S}$ en $\mathscr{C}$ cubre una flecha $f : D \to C$ si $f^*(\mathcal{S})$ cubre a D. (De esta manera $\mathcal{S}$ cubre a C sii $\mathcal{S}$ cubre la flecha idéntica de C).

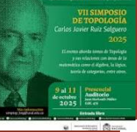


Sección 2

Topologías de Grothendieck iniciales y morfismos continuos



En topología general y áreas afines de las matemáticas, la topología inicial (o topología débil, topología límite o topología proyectiva) de un conjunto X, con respecto a una familia de funciones sobre X, es la topología menos fina en X que hace que dichas funciones sean continuas (véase N. Bourbaki [2]). Estas topologías se utilizan, por ejemplo, en el estudio de la topología de subespacios, la topología de productos, el límite inverso de cualquier sistema inverso de espacios y aplicaciones continuas, y en un espacio localmente convexo.



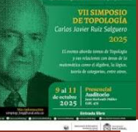
En esta sección, estudiaremos las topologías iniciales en algunas categorías enriquecidas con topologías de Grothendieck.

Definición

Dada una categoría $\mathscr{C}$, X un objeto de $\mathscr{C}$ y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$, decimos que $J(X)$ es una **$\mathfrak{G}$-topología localizada en** X *y que $(X, J(X))$ es un* **$\mathfrak{G}$-espacio topológico localizado**.

Proposición

Sea $\mathscr{C}$ una categoría finitamente completa y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$. Para un morfismo $f : B \to C$ en $\mathscr{C}$ y una criba $\mathcal{S} \in J(C)$, sea $f^*(\mathcal{S}) = \{\psi \mid cod(\psi) = B, f \circ \psi \in \mathcal{S}\}$ la criba correspondiente en B, entonces $f^*(J(C)) =: \{g^*(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \in J(C)\}$ es una $\mathfrak{G}$-topología localizada en B.



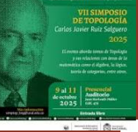
En esta sección, estudiaremos las topologías iniciales en algunas categorías enriquecidas con topologías de Grothendieck.

Definición

Dada una categoría $\mathscr{C}$, X un objeto de $\mathscr{C}$ y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$, decimos que $J(X)$ es una **$\mathfrak{G}$-topología localizada en X** *y que $(X, J(X))$ es un* **$\mathfrak{G}$-espacio topológico localizado**.

Proposición

Sea $\mathscr{C}$ una categoría finitamente completa y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$. Para un morfismo $f : B \to C$ en $\mathscr{C}$ y una criba $\mathcal{S} \in J(C)$, sea $f^*(\mathcal{S}) = \{\psi \mid cod(\psi) = B, f \circ \psi \in \mathcal{S}\}$ la criba correspondiente en B, entonces $f^*(J(C)) =: \{g^*(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \in J(C)\}$ es una $\mathfrak{G}$-topología localizada en B.

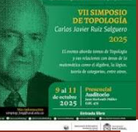


Demostración.

(i) Como f está en la criba maximal t_c, entonces, para cualquier flecha α con codominio B, $f \circ \alpha \in t_C$, por lo tanto, $f^*(t_C) = t_B$.

(ii) Supóngamos que $S \in f^*(J(C))$, entonces $T = \{f \circ h \mid h \in S\}$ es una criba en $J(C)$, por lo tanto, para $g : A \to B$, $(g \circ f)^*(T) \in J(A)$. Dado que, en el siguiente diagrama, el cuadrado derecho y el rectángulo exterior son pullbacks, también lo es el cuadrado izquierdo:

∎

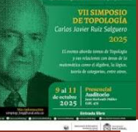


Demostración.

(iii) Sea R cualquier criba en B y $S \in f^*(J(C))$. Entonces $T = \{f \circ h \mid h \in S\}$ es una criba en $J(C)$ y $R' = \{f \circ r \mid r \in R\}$ es una criba en C. Usando de nuevo el diagrama (1), tenemos $R' \in J(C)$, es decir, $R \in f^*(J(C))$.

$$\begin{tikzcd}
(f \circ g)^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & f^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & S \arrow[d, tail] \\
\mathcal{C}(-, A) \arrow[r] & \mathcal{C}(-, B) \arrow[r] & \mathcal{C}(-, C)
\end{tikzcd} \quad (1)$$

(donde las flechas inferiores son las transformaciones naturales inducidas por g y f). (Ver S. MacLane [8], pg 72).

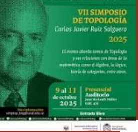


Demostración.

(iii) Sea R cualquier criba en B y $S \in f^*(J(C))$. Entonces $T = \{f \circ h \mid h \in S\}$ es una criba en $J(C)$ y $R' = \{f \circ r \mid r \in R\}$ es una criba en C. Usando de nuevo el diagrama (1), tenemos $R' \in J(C)$, es decir, $R \in f^*(J(C))$.

$$\begin{tikzcd}
(f \circ g)^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & f^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & S \arrow[d, tail] \\
\mathcal{C}(-, A) \arrow[r] & \mathcal{C}(-, B) \arrow[r] & \mathcal{C}(-, C)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

(donde las flechas inferiores son las transformaciones naturales inducidas por g y f). (Ver S. MacLane [8], pg 72)

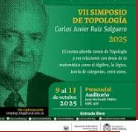


Demostración.

(iii) Sea R cualquier criba en B y $S \in f^*(J(C))$. Entonces $T = \{f \circ h \mid h \in S\}$ es una criba en $J(C)$ y $R' = \{f \circ r \mid r \in R\}$ es una criba en C. Usando de nuevo el diagrama (1), tenemos $R' \in J(C)$, es decir, $R \in f^*(J(C))$.

$$\begin{tikzcd}
(f\circ g)^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & f^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & S \arrow[d, tail] \\
\mathcal{C}(-,A) \arrow[r] & \mathcal{C}(-,B) \arrow[r] & \mathcal{C}(-,C)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

(donde las flechas inferiores son las transformaciones naturales inducidas por g y f). (Ver S. MacLane [8], pg 72)



Por esta razon,

$$(g \circ f)^*(T) = g^*\left(f^*(T)\right) = g^*(S) \text{ is a sieve in } J(A).$$

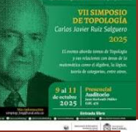
Definición

Para J una topología de Grothendieck en una categoría $\mathscr{C}$,

- *un morfismo $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$ se llama $\mathfrak{G}$-**continuo** si la $\mathfrak{G}$-**topología localizada en** B, $f^*(J(C))$ satisface*

$$J(B) \subseteq f^*(J(C)).$$

- *$f^*(J(C))$ es la $\mathfrak{G}$-topología menos fina en B para la cual f es $\mathfrak{G}$-continua y se denomina $\mathfrak{G}$-**topología inicial en** B.*



Por esta razon,

$$(g \circ f)^*(T) = g^*\left(f^*(T)\right) = g^*(S) \text{ is a sieve in } J(A).$$

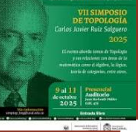
Definición

Para J una topología de Grothendieck en una categoría $\mathscr{C}$,

- *un morfismo $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$ se llama* **$\mathfrak{G}$-continuo** *si la* **$\mathfrak{G}$-topología localizada en** B, *$f^*(J(C))$ satisface*

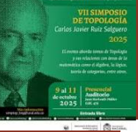
$$J(B) \subseteq f^*(J(C)).$$

- *$f^*(J(C))$ es la $\mathfrak{G}$-topología menos fina en B para la cual f es $\mathfrak{G}$-continua y se denomina* **$\mathfrak{G}$-topología inicial en** B.



Proposición

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos morfismos de $\mathscr{C}$ $\mathfrak{G}$-continuos, entonces $g \bullet f$ es un morfismo de $\mathscr{C}$ que es $\mathfrak{G}$-continuo.



Ya que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son $\mathfrak{G}$-continuas, tenemos

$$J(X) \subseteq f^*(J(Y)) \text{ and } J(Y) \subseteq g^*(J(Z)),$$

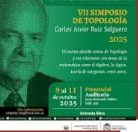
por lo tanto

$$f^*(J(Y)) \subseteq f^*(g^*(J(Z)))$$

luego

$$J(X) \subseteq f^*(g^*(J(Z))) = (g \circ f)^*(J(Z)).$$

Esto completa la prueba.



Ya que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son $\mathfrak{G}$-continuas, tenemos

$$J(X) \subseteq f^*(J(Y)) \text{ and } J(Y) \subseteq g^*(J(Z)),$$

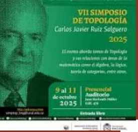
por lo tanto

$$f^*(J(Y)) \subseteq f^*(g^*(J(Z)))$$

luego

$$J(X) \subseteq f^*(g^*(J(Z))) = (g \circ f)^*(J(Z)).$$

Esto completa la prueba.



Ya que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son $\mathfrak{G}$-continuas, tenemos

$$J(X) \subseteq f^*(J(Y)) \text{ and } J(Y) \subseteq g^*(J(Z)),$$

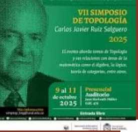
por lo tanto

$$f^*(J(Y)) \subseteq f^*(g^*(J(Z)))$$

luego

$$J(X) \subseteq f^*(g^*(J(Z))) = (g \circ f)^*(J(Z)).$$

Esto completa la prueba.

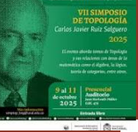


Como consecuencia, obtenemos

Definición

La categoría $\mathfrak{G}$–$Top_{\mathscr{C}}$ de $\mathfrak{G}$-espacios localizados comprende los siguientes datos:

1. **Objetos**: *Espacios de $\mathfrak{G}$-topología localizados $(X, J(X))$*
2. **Morfismos**: *Morfismos de $\mathscr{C}$ que son $\mathfrak{G}$-continuos.*

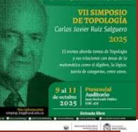


Como consecuencia, obtenemos

Definición

La categoría $\mathfrak{G}$–$Top_{\mathscr{C}}$ de $\mathfrak{G}$-espacios localizados comprende los siguientes datos:

1. **Objetos**: *Espacios de $\mathfrak{G}$-topología localizados $(X, J(X))$*
2. **Morfismos**: *Morfismos de $\mathscr{C}$ que son $\mathfrak{G}$-continuos.*

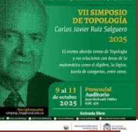


Como consecuencia, obtenemos

Definición

La categoría $\mathfrak{G}\text{–}Top_{\mathscr{C}}$ de $\mathfrak{G}$-espacios localizados comprende los siguientes datos:

1. **Objetos**: *Espacios de $\mathfrak{G}$-topología localizados $(X, J(X))$*
2. **Morfismos**: *Morfismos de $\mathscr{C}$ que son $\mathfrak{G}$-continuos.*



Para una categoría $\mathscr{C}$, consideramos el conjunto $\{J_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Aplicando el lema $0{,}34$ de P. T. Johnstone [6], obtenemos:

Corolario

Para cada objeto X de $\mathscr{C}$

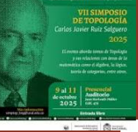
$$\{J_\alpha(X) \mid \alpha \in A\}$$

es un retículo completo.

Utilizando la definición de funtor topológico en G.C.L. Brümmer [1], tenemos:

Teorema

El funtor de olvido $U : \mathfrak{G}\text{–}\mathbf{Top}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ es un funtor topológico.



Para una categoría $\mathscr{C}$, consideramos el conjunto $\{J_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Aplicando el lema $0{,}34$ de P. T. Johnstone [6], obtenemos:

Corolario

Para cada objeto X de $\mathscr{C}$

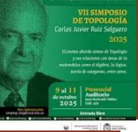
$$\{J_\alpha(X) \mid \alpha \in A\}$$

es un retículo completo.

Utilizando la definición de funtor topológico en G.C.L. Brümmer [1], tenemos:

Teorema

El funtor de olvido $U : \mathfrak{G}\text{–}\mathbf{Top}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ es un funtor topológico.



Para una categoría $\mathscr{C}$, consideramos el conjunto $\{J_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Aplicando el lema $0{,}34$ de P. T. Johnstone [6], obtenemos:

Corolario

Para cada objeto X de $\mathscr{C}$

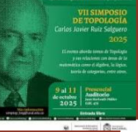
$$\{J_\alpha(X) \mid \alpha \in A\}$$

es un retículo completo.

Utilizando la definición de funtor topológico en G.C.L. Brümmer [1], tenemos:

Teorema

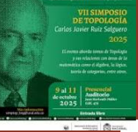
El funtor de olvido $U : \mathfrak{G}\text{–}\mathbf{Top}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ es un funtor topológico.



Sea X un objeto de $\mathscr{C}$, sea $(Y_i, J(Y_i))_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathfrak{G}$–$Top_{\mathscr{C}}$, y para cada $i \in I$ sea $f_i : X \to Y_i$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Debemos demostrar que para cada objeto $(Z, J(Z))$ de $\mathfrak{G}$–$Top_{\mathscr{C}}$ y para cada morfismo $g : Z \to X$ de $\mathscr{C}$, g es $\mathfrak{G}$-continuo si y solo si cada uno de los morfismos $f_i \circ g$ de $\mathscr{C}$ es $\mathfrak{G}$-continuo, cuando el objeto X se une a la $\mathfrak{G}$-topología localizada $\hat{J}(X) = \bigcap_{i\in I} f_i^*(J(Y_i))$. Los morfismos

$$f_i; (X, \hat{J}(X)) \to ((Y_i, J(Y_i))$$

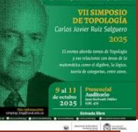
son evidentemente continuos, ya que $\hat{J}(X) \subseteq f_i^*(J(Y_i))$, para al $i \in I$, y de la proposición (4) se sigue fácilmente que cada morfismo $f_i \circ g$ de $\mathscr{C}$ es $\mathfrak{G}$-continuo siempre que g lo sea.



Sea X un objeto de $\mathscr{C}$, sea $(Y_i, J(Y_i))_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathfrak{G}$–$Top_{\mathscr{C}}$, y para cada $i \in I$ sea $f_i : X \to Y_i$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Debemos demostrar que para cada objeto $(Z, J(Z))$ de $\mathfrak{G}$–$Top_{\mathscr{C}}$ y para cada morfismo $g : Z \to X$ de $\mathscr{C}$, g es $\mathfrak{G}$-continuo si y solo si cada uno de los morfismos $f_i \circ g$ de $\mathscr{C}$ es $\mathfrak{G}$-continuo, cuando el objeto X se une a la $\mathfrak{G}$-topología localizada $\hat{J}(X) = \bigcap_{i\in I} f_i^*(J(Y_i))$. Los morfismos

$$f_i; (X, \hat{J}(X)) \to ((Y_i, J(Y_i))$$

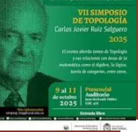
son evidentemente continuos, ya que $\hat{J}(X) \subseteq f_i^*(J(Y_i))$, para al $i \in I$, y de la proposición (4) se sigue fácilmente que cada morfismo $f_i \circ g$ de $\mathscr{C}$ es $\mathfrak{G}$-continuo siempre que g lo sea.



Para el recíproco, supongamos que cada uno de los morfismos $f_i \circ g$ de $\mathscr{C}$ es $\mathfrak{G}$-continuo, ya que

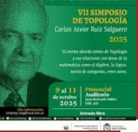
$$
\begin{aligned}
J(Z) &\subseteq \bigcap_{i\in I} (f_i \circ g)^*(J(Y_i)) \\
&= \bigcap_{i\in I} g_*((f_i)^*(J(Y_i)) \\
&= g_*(\bigcap_{i\in I} (f_i)^*(J(Y_i)) \\
&= g_*(\hat{J}(X)),
\end{aligned}
$$

concluimos que el morfismo g es $\mathfrak{G}$-continuo.



Sección 3

La estructura de marco de los espacios $\mathfrak{G}$-topológicos localizados

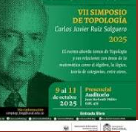


La estructura de marco de los espacios $\mathfrak{G}$-topológicos localizados

Recordemos que un marco (frame) L es un conjunto parcial con todas las uniones y todos los encuentros finitos que satisfacen la ley distributiva infinita:

$$x \wedge \Big(\bigvee_i y_i\Big) = \bigvee_i (x \wedge y_i)$$

Un homomorfismo de marco $\phi : L \to M$ es una función que preserva los encuentros finitos y las uniones arbitrarias. Los marcos y los homomorfismos de marco forman una categoría Frm.

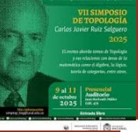


La estructura de marco de los espacios $\mathfrak{G}$-topológicos localizados

Recordemos que un marco (frame) L es un conjunto parcial con todas las uniones y todos los encuentros finitos que satisfacen la ley distributiva infinita:

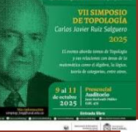
$$x \wedge \Big(\bigvee_i y_i\Big) = \bigvee_i (x \wedge y_i)$$

Un homomorfismo de marco $\phi : L \to M$ es una función que preserva los encuentros finitos y las uniones arbitrarias. Los marcos y los homomorfismos de marco forman una categoría Frm.



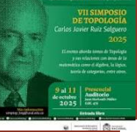
Según el teorema del functor adjunto (AFT) para conjuntos parciales, un marco también tiene todos los encuentros (al menos suponiendo que es un conjunto pequeño, o más generalmente, que permitimos la cuantificación impredicativa sobre él), pero un homomorfismo de marco no necesariamente los preserva. De manera similar, según el AFT, un marco es automáticamente un álgebra de Heyting, pero, de nuevo, un homomorfismo de marco no necesariamente preserva la implicación de Heyting. Por definición, la categoría *Locale* de locales es la opuesta a la categoría de marcos.

$$\mathrm{Locale} = \mathrm{Frm}^{op}.$$



Según el teorema del functor adjunto (AFT) para conjuntos parciales, un marco también tiene todos los encuentros (al menos suponiendo que es un conjunto pequeño, o más generalmente, que permitimos la cuantificación impredicativa sobre él), pero un homomorfismo de marco no necesariamente los preserva. De manera similar, según el AFT, un marco es automáticamente un álgebra de Heyting, pero, de nuevo, un homomorfismo de marco no necesariamente preserva la implicación de Heyting. Por definición, la categoría $Locale$ de locales es la opuesta a la categoría de marcos.

$$\mathsf{Locale} = \mathsf{Frm}^{op}.$$



$\mathfrak{G}$-topología localizadas y locales

Recordemos que para una categoría $\mathscr{C}$, X un objeto de $\mathscr{C}$ y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$, $J(X)$ es una **$\mathfrak{G}$-topología localizada en X** y que $(X, J(X))$ es un **$\mathfrak{G}$-espacio topológico localizado**.

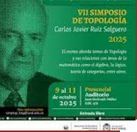
Proposición

Cada **$\mathfrak{G}$-topología localizada en** X *es un locale.*

Así obtenemos otro funtor de olvido

$$O : \mathfrak{G}\text{–}\mathbf{Top}_{\mathscr{C}} \to \mathit{Locale}$$

. Al devolvernos obtenemos otra clase de dualidad de tipo Stone.



$\mathfrak{G}$-topología localizadas y locales

Recordemos que para una categoría $\mathscr{C}$, X un objeto de $\mathscr{C}$ y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$, $J(X)$ es una **$\mathfrak{G}$-topología localizada en X** y que $(X, J(X))$ es un **$\mathfrak{G}$-espacio topológico localizado**.

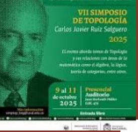
Proposición

Cada **$\mathfrak{G}$-topología localizada en X** *es un locale.*

Así obtenemos otro funtor de olvido

$$O : \mathfrak{G}\text{–}\mathbf{Top}_{\mathscr{C}} \to \mathit{Locale}$$

. Al devolvernos obtenemos otra clase de dualidad de tipo Stone.



$\mathfrak{G}$-topología localizadas y locales

Recordemos que para una categoría $\mathscr{C}$, X un objeto de $\mathscr{C}$ y J una topología de Grothendieck en $\mathscr{C}$, $J(X)$ es una **$\mathfrak{G}$-topología localizada en** X y que $(X, J(X))$ es un **$\mathfrak{G}$-espacio topológico localizado**.

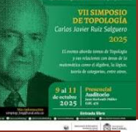
Proposición

Cada **$\mathfrak{G}$-topología localizada en** X *es un locale.*

Así obtenemos otro funtor de olvido

$$O : \mathfrak{G}\text{–}\mathbf{Top}_{\mathscr{C}} \to \mathit{Locale}$$

. Al devolvernos obtenemos otra clase de dualidad de tipo Stone.



Definición

Dado un elemento k en un locale L, un subconjunto S de L se denomina criba en k si $S \in \mathcal{D}(\downarrow k)$.

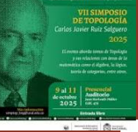
Definición

Una topología de Grothendieck en un locale L es una función J que asigna a cada objeto k de L una colección $J(k)$ de cribas en k, de tal manera que

(i) *la criba maximal $\downarrow k$ está en $J(k)$;*

(ii) *(axioma de estabilidad) si $S \in J(k)$ y $m \leqslant k$, entonces $S \cap (\downarrow m)$ está en $J(m)$;*

(iii) *(axioma de transitividad) si $S \in J(k)$ y R es cualquier criba sobre k tal que $R \cap (\downarrow m)$ está en $J(m)$ para cada $m \in S$, entonces $R \in J(k)$.*



Definición

Dado un elemento k en un locale L, un subconjunto S de L se denomina criba en k si $S \in \mathcal{D}(\downarrow k)$.

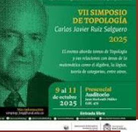
Definición

Una topología de Grothendieck en un locale L es una función J que asigna a cada objeto k de L una colección $J(k)$ de cribas en k, de tal manera que

(i) *la criba maximal $\downarrow k$ está en $J(k)$;*

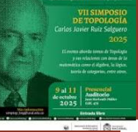
(ii) *(axioma de estabilidad) si $S \in J(k)$ y $m \leqslant k$, entonces $S \cap (\downarrow m)$ está en $J(m)$;*

(iii) *(axioma de transitividad) si $S \in J(k)$ y R es cualquier criba sobre k tal que $R \cap (\downarrow m)$ está en $J(m)$ para cada $m \in S$, entonces $R \in J(k)$.*



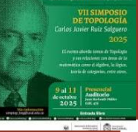
Ejemplo

- *La topología trivial de Grothendieck en L está dada por* $J_{tri}(n) = \downarrow n$.
- *La topología discreta de Grothendieck en L está dada por* $J_{dis}(n) = \mathcal{D}(\downarrow n)$.
- *La topología atómica de Grothendieck en L solo se puede definir si L está dirigido hacia abajo, y está dada por* $J_{atom}(n) = \mathcal{D}(\downarrow n) - \{\emptyset\}$.



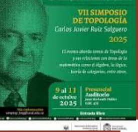
Recordemos que una noción básica en retículos completos es la de **filtro**: un filtro F de L es un subconjunto no vacío de L tal que

1. F es un subretículo de L, y
2. para cualquier $a \in F$ y $b \in L$, $a \vee b \in F$.



Recordemos que una noción básica en retículos completos es la de **filtro**: un filtro F de L es un subconjunto no vacío de L tal que

1. F es un subretículo de L, y
2. para cualquier $a \in F$ y $b \in L$, $a \vee b \in F$.



En una dirección diferente, tenemos la noción de **filtro de cribas (ideales)** en un locale L, que llamaremos S-**filtro**.

Definición

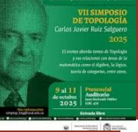
Un S-filtro en un locale L es una función $\mathfrak{F}$ que asigna a cada objeto k de L una colección $\mathfrak{F}(k)$ de cribas en k, de tal manera que

(F_1) *si $S \in \mathfrak{F}(k)$ y R es una criba en k tal que $S \subseteq R$, entonces $R \in \mathfrak{F}(k)$;*

(F_2) *toda intersección finita de cribas de $\mathfrak{F}(k)$ pertenece a $\mathfrak{F}(k)$;*

(F_3) *si $S \in J(k)$ y $m \leqslant k$ entonces $S \cap (\downarrow m)$ está en $\mathfrak{F}(m)$;*

(F_4) *la criba vacía no está en $\mathfrak{F}(k)$.*



En una dirección diferente, tenemos la noción de **filtro de cribas (ideales)** en un locale L, que llamaremos S-**filtro**.

Definición

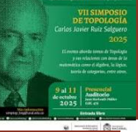
Un S-filtro en un locale L es una función $\mathfrak{F}$ que asigna a cada objeto k de L una colección $\mathfrak{F}(k)$ de cribas en k, de tal manera que

(F_1) *si $S \in \mathfrak{F}(k)$ y R es una criba en k tal que $S \subseteq R$, entonces $R \in \mathfrak{F}(k)$;*

(F_2) *toda intersección finita de cribas de $\mathfrak{F}(k)$ pertenece a $\mathfrak{F}(k)$;*

(F_3) *si $S \in J(k)$ y $m \leqslant k$ entonces $S \cap (\downarrow m)$ está en $\mathfrak{F}(m)$;*

(F_4) *la criba vacía no está en $\mathfrak{F}(k)$.*



En una dirección diferente, tenemos la noción de **filtro de cribas (ideales)** en un locale L, que llamaremos S-**filtro**.

Definición

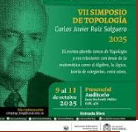
Un S-filtro en un locale L es una función $\mathfrak{F}$ que asigna a cada objeto k de L una colección $\mathfrak{F}(k)$ de cribas en k, de tal manera que

(F_1) *si $S \in \mathfrak{F}(k)$ y R es una criba en k tal que $S \subseteq R$, entonces $R \in \mathfrak{F}(k)$;*

(F_2) *toda intersección finita de cribas de $\mathfrak{F}(k)$ pertenece a $\mathfrak{F}(k)$;*

(F_3) *si $S \in J(k)$ y $m \leqslant k$ entonces $S \cap (\downarrow m)$ está en $\mathfrak{F}(m)$;*

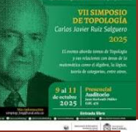
(F_4) *la criba vacía no está en $\mathfrak{F}(k)$.*



Ejemplo

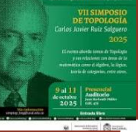
De la definición de una topología de Grothendieck J en unlocale L se deduce que, para cada objeto k de L y que

- *para $S \in J(k)$, cualquier criba mayor R en C también es miembro de $J(k)$.*
- *También es claro que si $R; S \in J(k)$ entonces $R \cap S \in J(k)$,*
- *en consecuencia, algunas topologías de Grothendieck producen S-filtros en el mismo locale L: son exactamente aquellas para las que $R \cap S \neq \emptyset$ para todos los pares $R; S \in J(k)$ y tales que la criba vacia no está en $J(k)$.*
- *Claramente, la* **topología trivial** *en k es un filtro S; lo llamaremos* **filtro S trivial**.



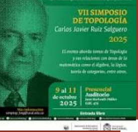
Finalizamos observando que si L es un locale y J es topología de Grothendieck En L, para cada objeto k de L se tiene que $(k, J(k))$ es un $\mathfrak{G}$-**espacio topológico localizado**. De igual manera sucede con las topologías de Grothendieck **filtrosas** (aquellas para las que $R \cap S \neq \emptyset$ para todos los pares $R; S \in J(k)$ y tales que la criba vacia no está en $J(k)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G}\text{–}Top_{\mathscr{C}} \arrow[rr, bend right] & & Locale \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$



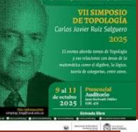
Finalizamos observando que si L es un locale y J es topología de Grothendieck En L, para cada objeto k de L se tiene que $(k, J(k))$ es un $\mathfrak{G}$-**espacio topológico localizado**.De igual manera sucede con las topologías de Grothendieck **filtrosas** (aquellas para las que $R \cap S \neq \emptyset$ para todos los pares $R; S \in J(k)$ y tales que la criba vacia no está en $J(k)$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}\text{–}Top_{\mathscr{C}} \arrow[rr, bend right] & & Locale \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

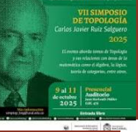


Finalizamos observando que si L es un locale y J es topología de Grothendieck En L, para cada objeto k de L se tiene que $(k, J(k))$ es un $\mathfrak{G}$-**espacio topológico localizado**.De igual manera sucede con las topologías de Grothendieck **filtrosas** (aquellas para las que $R \cap S \neq \emptyset$ para todos los pares $R; S \in J(k)$ y tales que la criba vacia no está en $J(k)$.

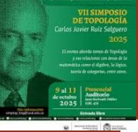
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G}\text{–}Top_{\mathscr{C}} \arrow[rr, bend right] & & Locale \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$



- G.C.L. Brümmer, *Topological Categories*, Topol. Appl., No. 18, 1984.
- N. Bourbaki, *Elements of Mathematics*, *General Topology, Part I*, Addison-Wesley Pub. Co., 1966.
- Olivia Caramello *Stone-type dualities through topos-theoretic 'bridges'*, Università degli Studi dell'Insubria - Como
- M. Forrester-Baker, *Group Objects and Internal Categories*, arXiv:math/0212065v, 2002.
- P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium*, Two volumes, Oxford University Press, Oxford,2002.



- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Academic Press,London, 1977.
- Alexander Kurz, *An Introduction to Stone Duality*, Department of Computer Science, University of Leicester, UK.
- S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin, 1971.
- S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to Topos theory*, Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin, 1992.
- B. Jónsson and A. Tarski. *Boolean algebras with operators*, part 1. Amer. J. Math., 73, 1951.



B. Jónsson and A. Tarski. *Boolean algebras with operators*, part 2. American Journal of Mathematics, 74, 1952

S. J. Vickers. *Topology Via Logic*. CUP, 1989.