Dinámicas Discretas con Funciones Multivaluadas

Javier Camargo
(Colaboración con Sergio Macías y Jeison Amorocho)

VII Simposio de Topología Carlos Javier Ruiz Salguero.

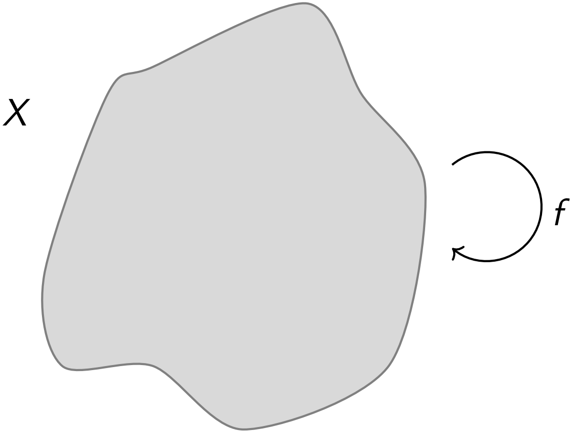
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

jcamargo@saber.uis.edu.co

Octubre de 2025

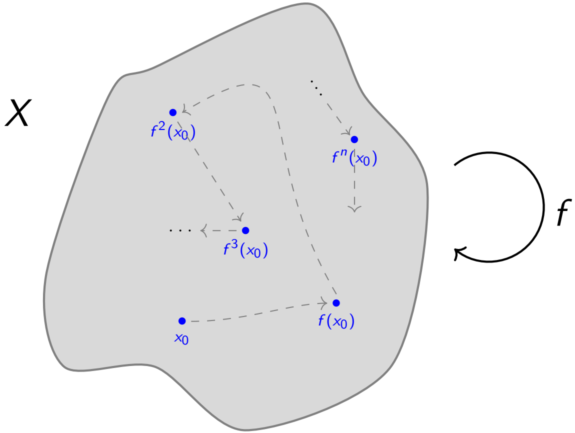
Dinámicas discretas

Un sistema dinámico discreto es una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f : X \to X$ es continua.



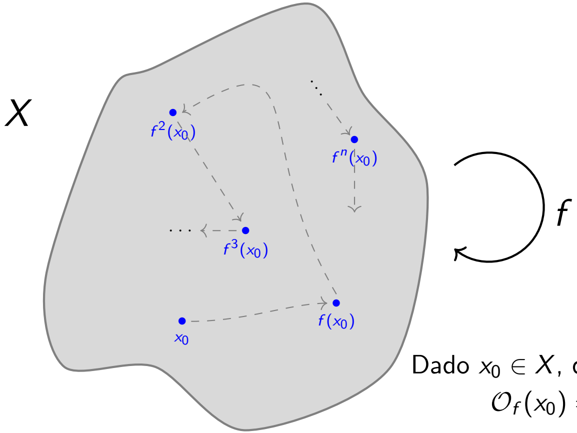
Dinámicas discretas

Un <u>sistema dinámico discreto</u> es una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f : X \to X$ es continua.



Dinámicas discretas

Un <u>sistema dinámico discreto</u> es una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ es continua.



Dado $x_0 \in X$, definimos la órbita de x_0 por:

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\}.$$

Dado un métrico compacto X definimos:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto no vacío}\}.$$

Una función multivaluada es una función $F \colon X \to 2^X$. Además, diremos que F es semicontinua superiormente si, para cada abierto V de X, el conjunto

$$F^{-1}(\langle V \rangle) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}$$

es abierto.

Equivalentemente, para todo $x \in X$ y cualquier abierto V tal que $F(x) \subseteq V$, existe un abierto U, donde $x \in U$ y

$$F(z) \subseteq V \text{ para todo } z \in U.$$

Ejemplos

Dado un métrico compacto X y $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon X \to X$ funciones continuas, entonces $F \colon X \to 2^X$ definida por

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\},$$

es semicontinua superiormente.

Ejemplos

Dado un métrico compacto X y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva, entonces $F\colon X \to 2^X$ definida por

$$F(x) = f^{-1}(x),$$

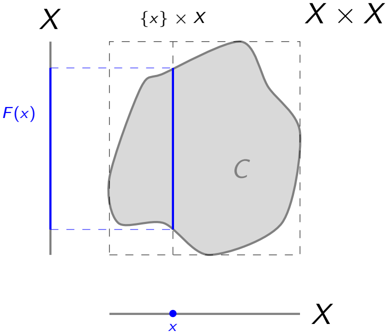
es semicontinua superiormente.

Ejemplos

Dado un cerrado $C \subseteq X^2$ tal que $\pi_1(C) = X$, entonces $F\colon X \to 2^X$ definida por

$$F(x) = \pi_2(C \cap (\{x\} \times X)),$$

es semicontinua superiormente.

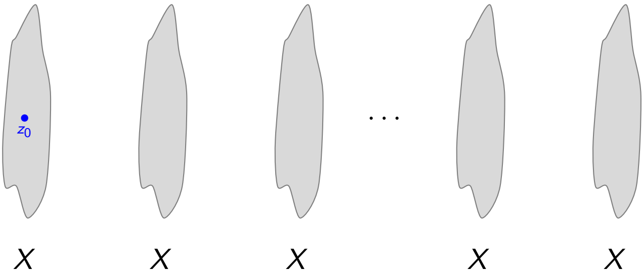


Órbitas

Dado (X, F) donde X es métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Una órbita de $x_0 \in X$ es una sucesión $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $z_0 = x_0$ y $z_{n+1} \in F(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

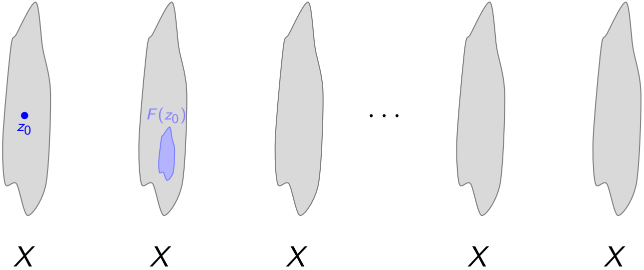
Órbitas

Dado (X, F) donde X es métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Una <u>órbita</u> de $x_0 \in X$ es una sucesión $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $z_0 = x_0$ y $z_{n+1} \in F(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.



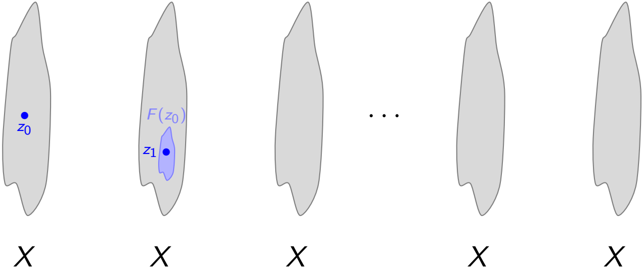
Órbitas

Dado (X, F) donde X es métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Una <u>órbita</u> de $x_0 \in X$ es una sucesión $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $z_0 = x_0$ y $z_{n+1} \in F(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.



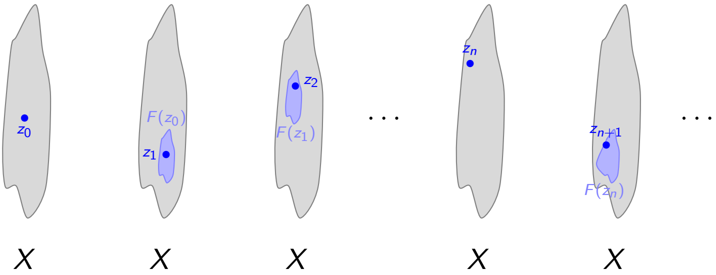
Órbitas

Dado (X, F) donde X es métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Una <u>órbita</u> de $x_0 \in X$ es una sucesión $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $z_0 = x_0$ y $z_{n+1} \in F(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.



Órbitas

Dado (X, F) donde X es métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Una órbita de $x_0 \in X$ es una sucesión $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $z_0 = x_0$ y $z_{n+1} \in F(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.



Conjuntos Órbita

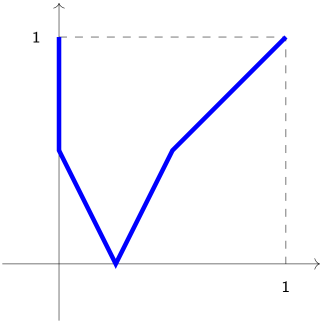
Dados $F\colon X \to 2^X$ y $x_0 \in X$. Definimos el Conjunto órbita de x_0 por:

$$\mathcal{O}_F(x_0) = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : x_{n+1} \in F(x_n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición: $\mathcal{O}_F(x_0)$ es cerrado en $X^{\mathbb{N}}$.

Ejemplos de $\mathcal{O}_F(x_0)$

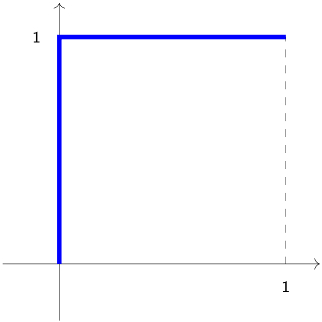
Sea $F\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dada por:



$$\mathcal{O}_F(0) = \left\{(0,t,t,\dots) : t \in [\tfrac{1}{2},1]\right\} \cong [0,1].$$

TAREA: Mostrar que $\mathcal{O}_F(0) \cong [0,1]$.

Sea $F\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dada por:



Un continuo es una espacio métrico compacto y conexo, diferente de vacío.

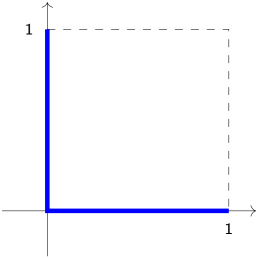
Pregunta: Dado un continuo X, ¿existe una función semicontinua superiormente $F\colon X \to 2^X$ y $p \in X$ tal que $\mathcal{O}_F(p) \cong X$?

Órbita conexa

Teorema: Sean X un continuo y $F\colon X \to 2^X$ una función semicontinua superiormente. Si $F(x)$ es un continuo para cada $x \in X$, entonces $\mathcal{O}_F(x)$ es un continuo para cualquier $x \in X$.

$\mathcal{O}_F(x_0)$.

Sea $F\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dada por:



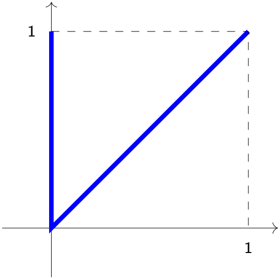
Sabemos que $\mathcal{O}_F(0)$ es un continuo. Además, la función $\phi\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathcal{O}_F(0)$ definida por

$$\phi(t_1, t_2, \ldots) = (0, t_1, 0, t_2, 0, t_3, 0, \ldots),$$

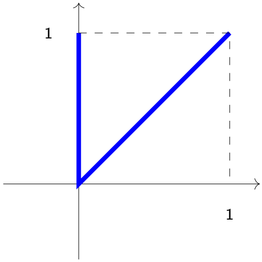
es un encaje y por tanto, $\dim(\mathcal{O}_F(0)) = \infty$.

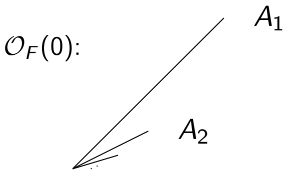
Ejemplos de $\mathcal{O}_F(x_0)$

Sea $F\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dada por:



$$F(t) = \begin{cases} [0,1], & \text{si } t = 0; \\ \{t\}, & \text{si } t \in (0,1]. \end{cases}.$$



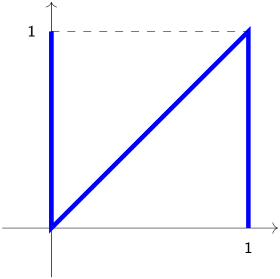


$$A_n = \{(0, \ldots, 0, t, t, \ldots) : t \in (0, 1]\} \cong (0, 1] \text{ y } \overline{A_n} \cong [0, 1].$$

$$\mathcal{O}_F(0) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \{(0, 0, \ldots)\}.$$

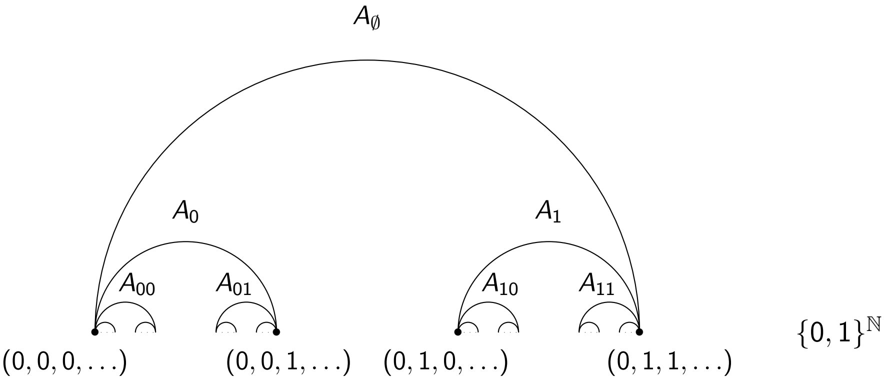
Ejemplos de $\mathcal{O}_F(x_0)$

Sea $F\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dada por:



$$F(t) = \begin{cases} [0,1], & \text{si } t = 0; \\ \{t\}, & \text{si } t \in (0,1]. \end{cases}.$$

Ejemplos de $\mathcal{O}_F(x_0)$



Órbitas en $[0, 1]$.

Problema: Caracterizar los continuos Z tales que existen $F\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ semicontinua superiormente y $x_0 \in [0, 1]$, donde

$$\mathcal{O}_F(x_0) \cong Z.$$

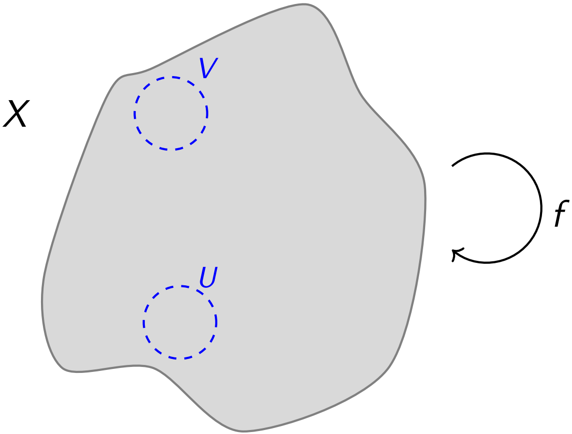
¿Son estos continuos localmente conexos?

Transitividad

Un función continua $f\colon X \to X$ se dice <u>transitiva</u> si para cualquier par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

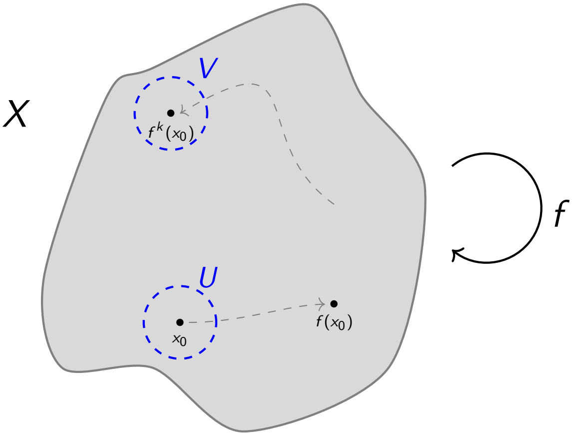
Transitividad

Un función continua $f : X \to X$ se dice transitiva si para cualquier par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Transitividad

Un función continua $f: X \to X$ se dice transitiva si para cualquier par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Transitividad

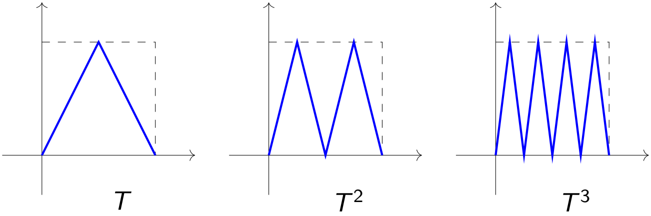
Teorema. (Block, Coppel.) Sean X métrico compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ continua. Son equivalentes:

1. f es transitiva;
2. Existe $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(x_0)$ es densa.

Transitividad

Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la <u>función tienda</u> definida para cada $t \in [0,1]$ por

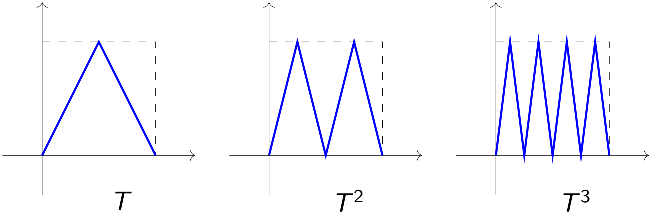
$$T(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(1-t), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Transitividad

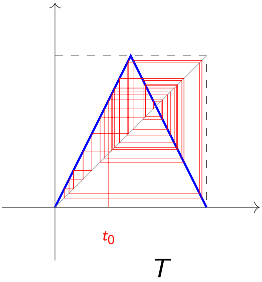
Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la <u>función tienda</u> definida para cada $t \in [0,1]$ por

$$T(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(1-t), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Afirmación: La función tienda T es transitiva.

Por el Teorema de Block y Coppel, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\mathcal{O}_T(t_0)$ es denso.



Transitividad

Dados X métrico compacto sin puntos aislados y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente.

1. F es transitiva si para cada par de abiertos U y V de X, existen $x \in U$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x)$ tal que $x_k \in V$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Transitividad

Dados X métrico compacto sin puntos aislados y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente.

1. F es <u>transitiva</u> si para cada par de abiertos U y V de X, existen $x \in U$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x)$ tal que $x_k \in V$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

2. Un punto $p \in X$ tiene <u>órbita densa</u> si existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p)$ denso; esto es, para cada W abierto, existe m donde $x_m \in W$.

Transitividad

Dados X métrico compacto sin puntos aislados y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente.

1. F es transitiva si para cada par de abiertos U y V de X, existen $x \in U$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x)$ tal que $x_k \in V$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

2. Un punto $p \in X$ tiene órbita densa si existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p)$ denso; esto es, para cada W abierto, existe m donde $x_m \in W$.

3. Un punto $p \in X$ tiene órbita densa débil si para cada abierto W, existen $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p)$ y $m \in \mathbb{N}$, donde $x_m \in W$.

Transitividad

$$\left\{ \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso} \right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{p \text{ con órbita densa}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{Transitiva}} & & \boxed{p \text{ con órbita densa débil}}
\end{tikzcd}$$

$$\left\{ \forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V \right\}$$

$$\left\{ \forall U \text{ abierto } \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : x_k \in U \right\}$$

Transitividad

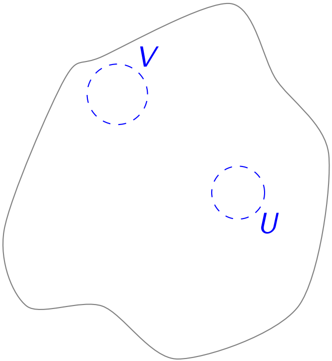
$$\left\{ \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso} \right\}$$

$\boxed{p \text{ con órbita densa}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Transitiva}}$

$$\left\{ \forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V \right\}$$



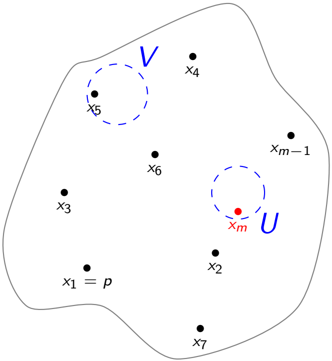
Transitividad

$$\left\{ \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso} \right\}$$

p con órbita densa

Transitiva

$$\left\{ \forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V \right\}$$



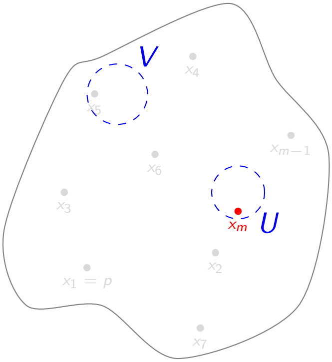
Transitividad

$$\left\{ \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso} \right\}$$

p con órbita densa

Transitiva

$$\left\{ \forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V \right\}$$



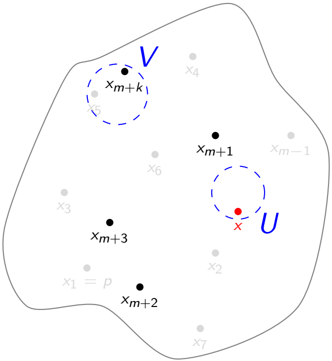
Transitividad

$$\left\{ \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso} \right\}$$

$\boxed{p \text{ con órbita densa}}$

$\boxed{\text{Transitiva}}$

$$\left\{ \forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V \right\}$$



Transitividad

$$\left\{\exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso}\right\}$$

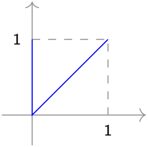
p con órbita densa

Transitiva

p con órbita densa débil

$$\left\{\forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V\right\}$$

$$\left\{\forall U \text{ abierto } \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : x_k \in U\right\}$$



$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{si } x = 0; \\ \{x\}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

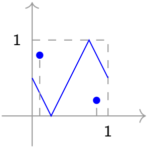
Transitividad

$$\left\{ \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es denso} \right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{p \text{ con órbita densa}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{Transitiva}} \arrow[rr, "\times" marking] & & \boxed{p \text{ con órbita densa débil}}
\end{tikzcd}$$

$$\left\{ \forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V \right\}$$

$$\left\{ \forall U \text{ abierto } \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : x_k \in U \right\}$$

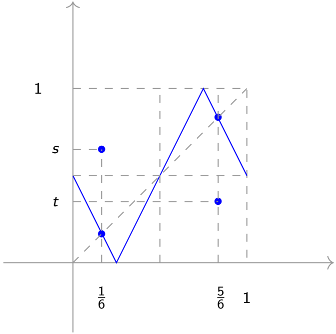


$$F(x) = \begin{cases} \{h(x)\}, & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{1/6, 5/6\}; \\ \{1/6, s\}, & \text{si } x = 1/6; \\ \{5/6, t\}, & \text{si } x = 5/6. \end{cases}$$

Transitividad

$$\boxed{\text{Transitiva}} \not\longrightarrow \boxed{p \text{ con órbita densa débil}}$$

$$\left\{\forall U, V \text{ abiertos } \exists x \in U, \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(x) : x_k \in V\right\} \qquad \left\{\forall U \text{ abierto } \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{O}_F(p) : x_k \in U\right\}$$



$$F(x) = \begin{cases} \{h(x)\}, & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{1/6, 5/6\}; \\ \{1/6, s\}, & \text{si } x = 1/6; \\ \{5/6, t\}, & \text{si } x = 5/6. \end{cases}$$

Sensibilidad

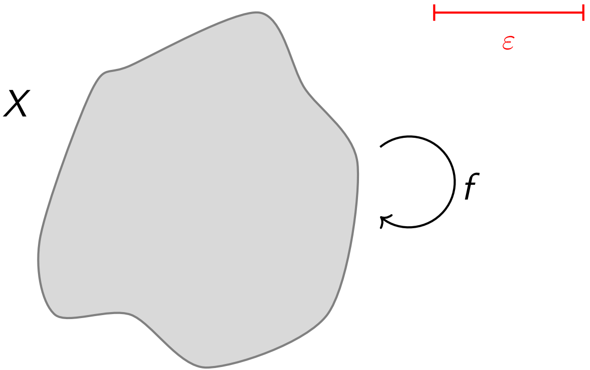
Un función continua $f\colon X \to X$ se dice <u>sensible</u> si existe $\varepsilon > 0$ (constante de sensibilidad) tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x;\delta)$ y $m \in \mathbb{N}$, donde

$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \varepsilon.$$

Sensibilidad

Un función continua $f\colon X \to X$ se dice sensible si existe $\varepsilon > 0$ (constante de sensibilidad) tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x;\delta)$ y $m \in \mathbb{N}$, donde

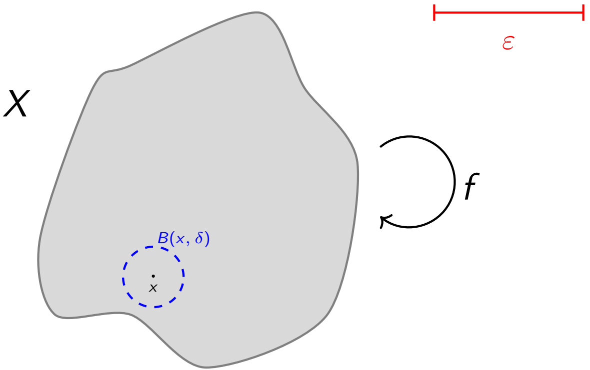
$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \varepsilon.$$



Sensibilidad

Un función continua $f\colon X \to X$ se dice <u>sensible</u> si existe $\varepsilon > 0$ (constante de sensibilidad) tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x;\delta)$ y $m \in \mathbb{N}$, donde

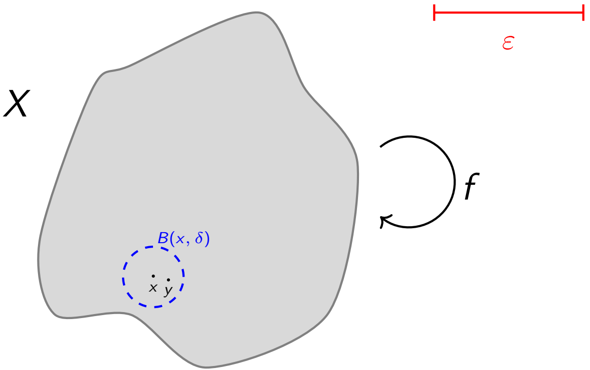
$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \varepsilon.$$



Sensibilidad

Un función continua $f\colon X \to X$ se dice <u>sensible</u> si existe $\varepsilon > 0$ (constante de sensibilidad) tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x;\delta)$ y $m \in \mathbb{N}$, donde

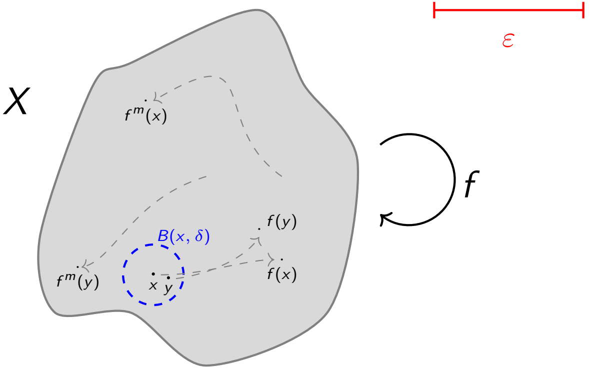
$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \varepsilon.$$



Sensibilidad

Un función continua $f\colon X \to X$ se dice sensible si existe $\varepsilon > 0$ (constante de sensibilidad) tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x;\delta)$ y $m \in \mathbb{N}$, donde

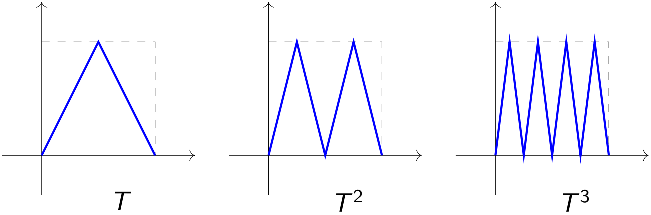
$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \varepsilon.$$



Ejemplo

Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la <u>función tienda</u> definida para cada $t \in [0,1]$ por

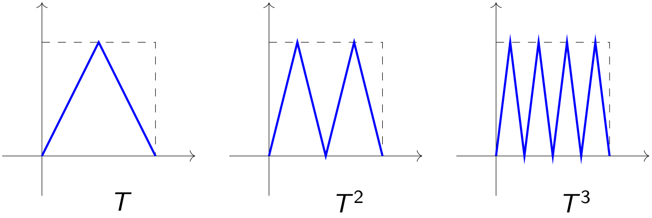
$$T(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(1-t), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Ejemplo

Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la <u>función tienda</u> definida para cada $t \in [0,1]$ por

$$T(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(1-t), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Afirmación: La función tienda T es sensible.

Funciones multivaluadas

Dado un métrico compacto X, con métrica d, definimos

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado no vacío}\}.$$

Dados $A, B \in 2^X$ definimos la <u>métrica de Hausdorff</u>

$$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subseteq N_d(B, r) \;\text{ y }\; B \subseteq N_d(A, r)\},$$

donde para $C \in 2^X$ y $s > 0$,

$$N_d(C, s) = \bigcup_{x \in C} B_d(x, s).$$

Sensibilidad

Definición. Sean X un espacio métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Diremos que F es sensible si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathcal{H}(F^m(x), F^m(y)) \geq \varepsilon.$$

Definición. Sean X un espacio métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Diremos que F es sensible fuertemente si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$F^m(y) \nsubseteq N_d(F^m(x), \varepsilon).$$

Definición. Sean X un espacio métrico compacto y $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente. Diremos que F es sensible débilmente si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera $x \in X$ y $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$, $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in F^m(x)$ y $y_m \in F^m(y)$ tales que

$$d(x_m, y_m) \geq \varepsilon.$$

Teorema.

$$\boxed{\text{sensible fuertemente}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{sensible}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{sensible débilmente}}$$

Teorema. Sean $F\colon X \to 2^X$ semicontinua superiormente y $f\colon X \to X$ sensible. Si $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$, entonces F es sensible débilmente.

Ejemplos

Sea T la función tienda. Sea $x_0 \in [0,1]$ tal que $\mathcal{O}_T(x_0)$ es denso. Definimos:

$$G(t) = \{x_0, T(t)\} \;\text{ y }\; F(t) = \begin{cases} [0,1], & \text{si } t = 0; \\ \{T(t)\}, & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Entonces, G es débil no sensible, y F es sensible no fuerte.

Referencias

1. Amorocho, J., Camargo, J., Macías, S., *Orbit sets, transitivity, and sensitivity with upper semicontinuous maps*, preprint.
2. Camargo, J., Macías, S., Maya, D., *Dynamics on Jones' set function $\mathcal{T}$*, Topol. Appl. 292, 107635 (2021).
3. Camargo, J., Macías, S., *Dynamics with Set-Valued Functions and Coselections,* Qual. Theory Dyn. Syst., 21 (25) (2022), pp. 1-43.
4. Capulin, F., Garcia, Y., Maya, D., Orozco-Zitli, F., *Dynamical Properties of upper semicontinuous functions,* Houst. J. Math. 50 (1), 215-236 (2024).