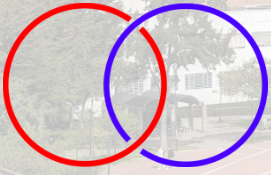
Hopf: De la topología al álgebra y del álgebra a la topología

[VII Simposio de Topología Carlos Javier Ruiz Salguero]



Fabio Calderón Mateus
Universidad Industrial de Santander

09/Oct/2025

Uno vuelve siempre...

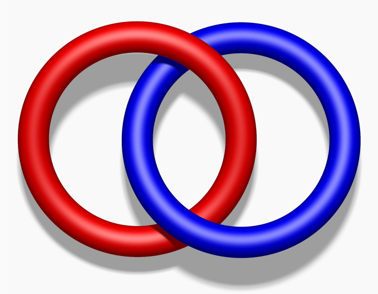
A los viejos sitios...

... Donde amó la vida.

Heinz Hopf

Heinz Hopf (1894–1971) fue un destacado topólogo alemán, recordado por sus contribuciones profundas a la *geometría* y la *topología algebraica*.

Entre ellas sobresale el enlace de Hopf (1931), el ejemplo más simple de un enlace no trivial con más de una componente.



Crédito: Jim Belk (2010)

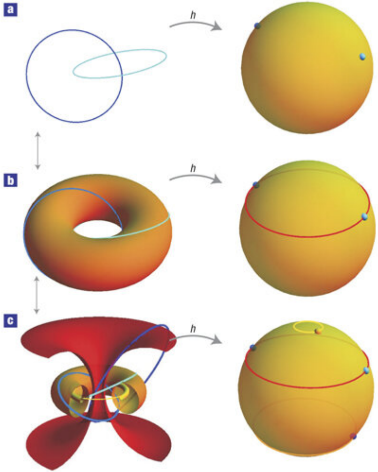
¿Puedo hacer un nudo con una cuerda de 12 cm de largo y 1 cm de grosor?

En *teoría de nudos física*, si la respuesta fuera afirmativa, se diría que el nudo tiene `ropelength` 12, pues este valor corresponde al cociente entre su longitud y su grosor.

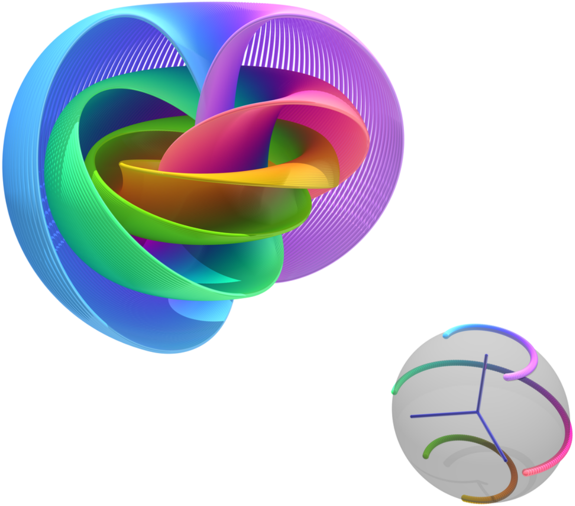
Sin embargo, la respuesta es negativa. En 2005, Denne–Diao–Sullivan demostraron que la `ropelength` de cualquier nudo no trivial debe ser al menos 15.66. La demostración utiliza un argumento basado en *cuadrisecantes*.

Hasta 2002, el enlace de Hopf era el único enlace para el cual se conocía su `ropelength` mínima. Ese año, Cantarella–Kusner–Sullivan construyeron nuevos ejemplos.

Otro aporte de Hopf fue la fibración de Hopf (1931), una manera de describir la 3-esfera S^3 (la hiperesfera en cuatro dimensiones) a partir de los espacios S^1 y S^2:



Crédito: W. Irvine, D. Bouwmeester (2008)



Crédito: Niles Johnson (2020)

Si queremos ser técnicos, la construcción se describe así: identificamos $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mediante:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (x_1 + ix_2,\ x_3 + ix_4), \qquad (x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (x_1 + ix_2,\ x_3).$$

Así, definimos:

$$S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}, \qquad S^2 = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + x^2 = 1\}.$$

Entonces, la fibración de Hopf es:

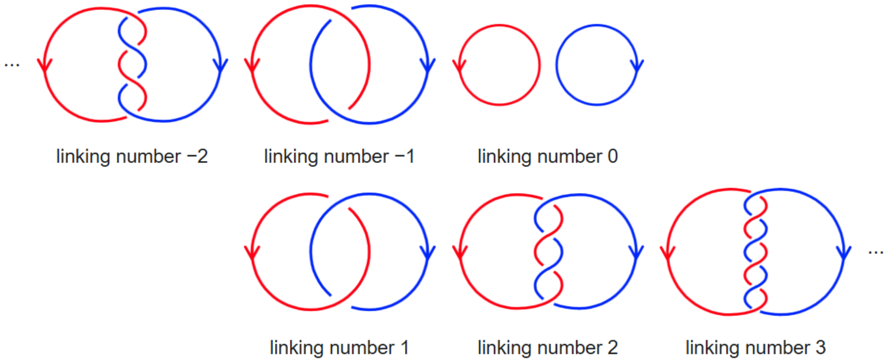
$$h : S^3 \longrightarrow S^2, \qquad h(z_0, z_1) = \big(2z_0\overline{z_1},\ |z_0|^2 - |z_1|^2\big).$$

Si $h(z_0, z_1) = h(w_0, w_1)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $(z_0, z_1) = \lambda(w_0, w_1)$. En consecuencia, para cada punto $m \in S^2$, la fibra $h^{-1}(m)$ es un círculo:

$$h^{-1}(m) \cong S^1.$$

El `linking number` de un enlace mide cuántas veces una curva se enrolla alrededor de la otra. En el caso del enlace de Hopf, su valor es ± 1.

En el espacio euclidiano, el `linking number` siempre es un número entero, aunque puede ser positivo o negativo dependiendo de la orientación de las dos curvas.



Crédito: Jim Belk (2007)

Hopf generalizó esta idea y demostró que a toda función continua

$$\varphi : S^{2n-1} \longrightarrow S^n, \qquad (n > 1),$$

se le puede asociar un invariante homotópico, denotado $h(\varphi)$ y llamado el invariante de Hopf.

¿Qué debe cumplir φ para que $h(\varphi) = 1$?

En los años 60, Adams–Atiyah emplearon técnicas de K-teoría topológica para demostrar que $h(\varphi) = 1$ si y solo si $n = 1, 2, 4, 8$. Esto es conocido como el Hopf Invariant One Theorem.

En el fondo, estas correspondencias surgen de las construcciones de Hopf, relacionadas con las álgebras de división reales normadas (no necesariamente asociativas). Por el Teorema de Frobenius (1877), dichas álgebras son precisamente

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{C}, \quad \mathbb{H}, \quad \mathbb{O}.$$

Otro aporte fundamental de Hopf fue la introducción de los llamados H-espacios.

Definición

Un H-espacio es una tríada (X, e, μ) donde:

- X es un espacio topológico;
- $e \in X$ es un punto distinguido;
- $\mu : X \times X \to X$ es una aplicación continua tal que $\mu(e, e) = e$.

Además, las funciones continuas

$$x \longmapsto \mu(x, e), \qquad x \longmapsto \mu(e, x),$$

deben ser homotópicas a la identidad mediante homotopías que fijen e.

Un H-espacio puede verse como una versión *homotópica* de un grupo topológico, donde se relajan los axiomas de asociatividad e inversos.

Una reformulación del Hopf Invariant One Theorem establece que las únicas hiperesferas que son H-espacios son S^0, S^1, S^3 y S^7 (Adams, 1958).

A todo espacio topológico X se le puede asociar un anillo, usando los grupos de cohomología con coeficientes en un anillo conmutativo R y el *producto copa* $\smile$ que opera cociclos. Este anillo se denomina el anillo de cohomología de X:

$$H := H^*(X, R).$$

El anillo de cohomología del producto topológico $X \times X$ es precisamente $H \otimes_R H$. Si además (X, e, μ) es un H-espacio, la aplicación $\mu : X \times X \to X$ induce un morfismo R–lineal

$$\Delta : H \longrightarrow H \otimes_R H.$$

En 1953, el sueco **Armand Borel** (1923–2003) estudió estas estructuras $(H, \smile, \Delta)$ y las denominó *algèbres de Hopf*.

En 1957, **Edward Halpern**, bajo la dirección de **Saunders Mac Lane** (1909–2005), introdujo por primera vez el concepto de hiperálgebra: una R–álgebra H que, además de poseer una multiplicación y una unidad, cuenta con una aplicación adicional

$$\Delta : H \longrightarrow H \otimes_R H,$$

a la que llamó *comultiplicación*.

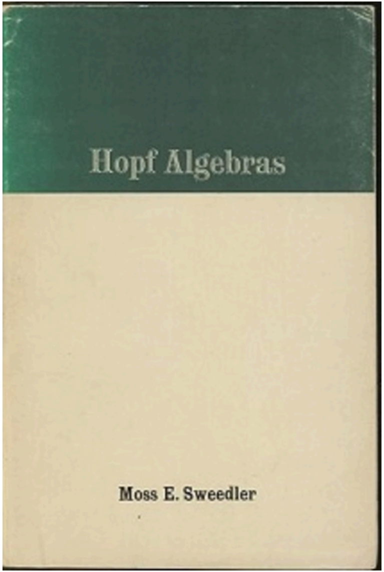
Sin embargo, fueron **John W. Milnor** (1931–) y **John C. Moore** (1925–2016) quienes en 1965, y en versiones circuladas hasta una década antes, formularon por primera vez la definición moderna de álgebra de Hopf y estudiaron varias de sus propiedades, incluyendo el célebre Teorema de Milnor–Moore.

En palabras de ANDRUSKIEWITSCH–FERRER-SANTOS:

> *"El artículo [de Milnor–Moore] (...) tuvo una influencia amplia y profunda en el desarrollo del tema, y quizá deba verse al mismo tiempo como la culminación de la línea de trabajo topológica iniciada por Hopf y otros, así como la plataforma de lanzamiento de un área nueva e independiente dentro del ámbito del álgebra abstracta."*
>
> — *The beginnings of the theory of Hopf algebras (2009)*

Durante las décadas de 1950 y 1960, autores como **Jean Dieudonné** (1906–1992), **Pierre Cartier** (1932–2024), **Bertram Kostant** (1928–2017) y **Georgiy Isaakovich Kac** (1924–1978) exploraron las propiedades de las álgebras de Hopf, ya desde un punto de vista propio del álgebra abstracta más que de la topología algebraica o diferencial.

Finalmente, el 1 de septiembre de 1969, **Moss Sweedler** (1942–) publica:

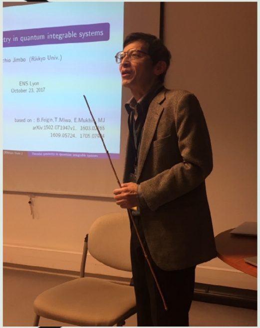


a functor

a category

Vladimir Drinfeld

a natural transformation



Michio Jimbo

a category

a functor

En 1986, durante el ICM en Berkeley, **Vladimir Drinfeld** (1954–) introdujo el concepto de grupo cuántico, estructuras que surgieron como *deformaciones de álgebras envolventes universales* de álgebras de Lie, motivadas por la búsqueda de soluciones a la ecuación de Yang–Baxter cuántica. De forma independiente, **Michio Jimbo** (1951–) llegó a construcciones equivalentes, dando origen a una clase interesante de álgebras de Hopf no conmutativas ni coconmutativas.

Este descubrimiento provocó una verdadera explosión en la investigación sobre las álgebras de Hopf, que dejaron de ser vistas únicamente como objetos algebraicos para convertirse en un lenguaje unificador con profundas conexiones con la combinatoria, la teoría de nudos, y la física cuántica de campos.

En los años 80, DOI–KREIMER–TAKEUCHI se propusieron generalizar la teoría clásica de Galois al contexto de las álgebras de Hopf. La idea consiste en reemplazar:

Grupos de Galois por álgebras de Hopf,
Extensiones de cuerpos por extensiones de Hopf–Galois.

Durante los años 90, estas ideas adquirieron una nueva relevancia en la formulación de la geometría no conmutativa. En particular, **Alain Connes**, **Tomasz Brzeziński**, **Christian Kassel** y otros observaron que las extensiones Hopf–Galois ofrecen un modelo algebraico de *fibrados principales no conmutativos*, en los cuales la simetría no se expresa mediante grupos, sino a través de álgebras de Hopf o sus deformaciones cuánticas.

Noncommutative geometry is based on the idea that, instead of working with the points of a topological space X (or a $\mathbb{C}^\infty$–manifold, or an algebraic variety), we may just as well work with the algebra $\mathcal{O}(X)$ of continuous (or $\mathbb{C}^\infty$, or regular) functions on X.
Many geometrical constructions on X can be expressed by algebraic constructions on the commutative algebra $\mathcal{O}(X)$, which in turn can be extended to not necessarily commutative algebras.

—C. Kassel (2017).

TOPOLOGY	ALGEBRA
continuous proper map	morphism
homeomorphism	automorphism
compact	unital
σ-compact	σ-unital
compactification	unitization
Stone–Čech compactification	multiplier algebra
open (dense) subset	(essential) ideal
closed subset	quotient algebra
metrizable	separable
Baire measure	positive functional

Créditos: García-Bondía, Várilly, Figueroa (2001)

Una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ consiste en:

- Una *categoría* $\mathcal{C}$.
- Un *bifuntor* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, llamado producto monoidal.
- Un *objeto distinguido* $\mathbb{1} \in \mathcal{C}$, llamado objeto unidad.
- Isomorfismos naturales que expresan:
  - Asociatividad: $(X \otimes Y) \otimes Z \;\cong\; X \otimes (Y \otimes Z)$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.
  - Unitalidad: $\mathbb{1} \otimes X \;\cong\; X \;\cong\; X \otimes \mathbb{1}$, para todo $X \in \mathcal{C}$.
- Estos isomorfismos deben satisfacer las *condiciones de coherencia*:

$$X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \;\cong\; X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \;\cong\; ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W$$
$$\cong\; (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W), \qquad \forall\, X, Y, Z, W \in \mathcal{C},$$

$$(X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y \;\cong\; X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \;\cong\; X \otimes Y, \qquad \forall\, X, Y \in \mathcal{C}.$$

¿Por qué alguien se interesaría en un concepto tan abstracto?

Porque las categorías monoidales aparecen en muchos contextos matemáticos.

Ejemplos:

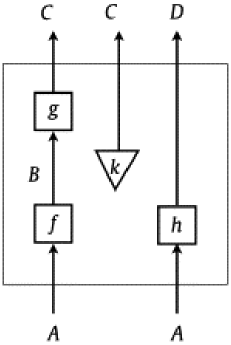
- La categoría Vec de los $\Bbbk$-espacios vectoriales es monoidal, con producto dado por el producto tensorial $\otimes$ y objeto unidad $\mathbb{1} = \Bbbk$.
- La categoría $\mathrm{Vec}_{\oplus}$ de los $\Bbbk$-espacios vectoriales admite otra estructura monoidal, ahora con producto dado por la suma directa $\oplus$ y unidad $\mathbb{1} = \{0\}$.
- Las categorías AbGrp (grupos abelianos) y Ring (anillos) son monoidales con producto $\otimes_{\mathbb{Z}}$ y unidad $\mathbb{Z}$.
- Si G es un grupo, la categoría G-Mod de G-módulos (izquierdos) es monoidal. Para $(V, \cdot)$ y $(W, *)$ dos G-módulos, se define

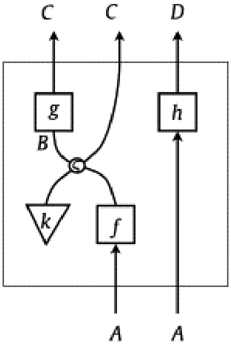
$$(V, \cdot) \otimes (W, *) \;=\; (V \otimes W, \triangleright),$$

donde $g \triangleright (v \otimes w) := (g \cdot v) \otimes (g * w)$. Además, $\mathbb{1} = \Bbbk$ con acción trivial $g \cdot \lambda = \lambda$.

Más ejemplos:

- La categoría Set de conjuntos es monoidal con producto dado por el producto cartesiano, y unidad $\mathbb{1} = \{\cdot\}$ (el conjunto de un solo punto).
- La categoría $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ de endofuntores de una categoría $\mathcal{C}$ es monoidal con producto dado por la composición de funtores, y unidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.
- La categoría Top de espacios topológicos es monoidal con producto dado por el producto cartesiano de espacios, y unidad el espacio con un solo punto.
- La categoría $\mathrm{Hilb}(\mathbb{C})$ de espacios de Hilbert complejos es monoidal: los morfismos son operadores lineales acotados, el producto es el tensor de espacios de Hilbert, y la unidad es $\mathbb{C}$.
- Sea V un conjunto no vacío de vértices. La categoría $V\text{-}\mathrm{Quiv}$ de quivers con conjunto de vértices V es monoidal: el producto se define tomando colecciones de aristas componibles, y la unidad es el V-quiver sin aristas.





$$(g \circ f) \otimes k \otimes h \quad = \quad (g \otimes C \otimes h) \circ ((\varsigma \circ (k \otimes f)) \otimes A)$$

$$=$$

$$(g \otimes C \otimes D) \circ (B \otimes k \otimes D) \circ (f \otimes h)$$

Créditos: Pavlovic (2013)

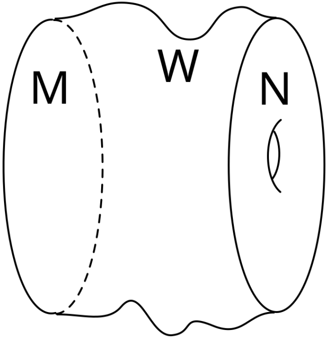
quantum mechanics	**monoidal category theory**
space of quantum states	object in a category
linear operator	morphism in a category
local time evolution	functor
compound system entanglement	non-cartesian monoidal structure
bra/ket	dual objects
Feynman diagram	monoidal string diagram

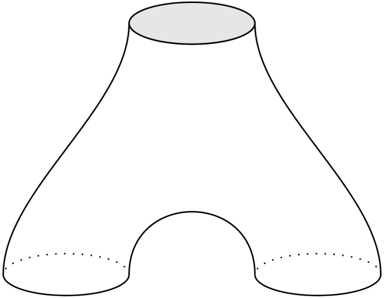
Créditos: nLab - Functorial field theory

Algo increíble es que la relación entre categorías monoidales y álgebras de Hopf es profunda y múltiple:

- Si H es un álgebra de Hopf entonces su categoría de módulos H-$\textsc{Mod}$ es una categoría monoidal. Esto, en general, no se cumple para módulos sobre anillos no-conmutativos.
- Recíprocamente, muchas clases de categorías monoidales (por ejemplo, las categorías de fusión, las categorías tensoriales o las categorías modulares) corresponden a categorías de módulos sobre álgebras de Hopf (o sus generalizaciones). Ver, por ejemplo, Etingof–Gelaki–Nikshych–Ostik (2016).

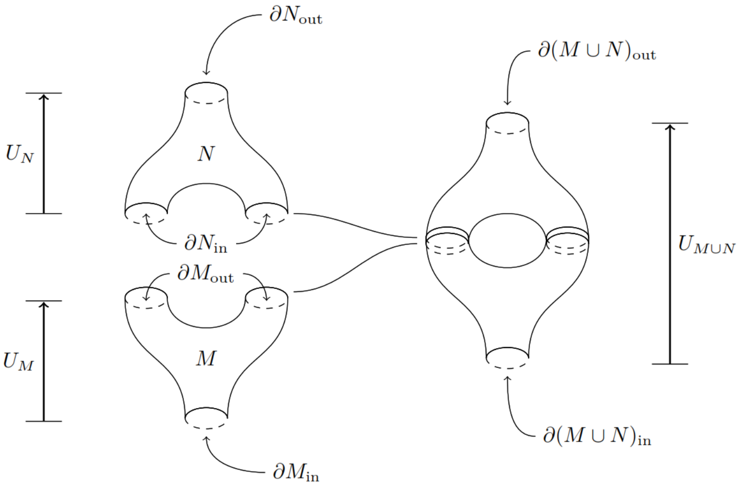
Un $(n+1)$-cobordismo (W, M, N) es:





Créditos: Nils R. Barth (2009)

Los cobordismos se pueden operar:



Créditos: Colosi, Oeckl (2020)

Easter egg: `https://www.youtube.com/watch?v=lxLe68MrkIU`

Formalmente, una n–variedad con frontera M es un espacio topológico tal que cada punto posee una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$ o del *medio espacio* $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Los puntos de M que admiten vecindades del segundo tipo se llaman *puntos frontera*, y el conjunto de todos ellos se denota por ∂M.

Definición

Una variedad cerrada es una variedad compacta M tal que $\partial M = \emptyset$.

Un $(n+1)$–cobordismo es una quíntupla (W, M, N, i, j) donde:

- W es una $(n+1)$–variedad diferenciable compacta con frontera;
- M y N son n–variedades cerradas;
- $i : M \hookrightarrow \partial W$ y $j : N \hookrightarrow \partial W$ son encajes cuyas imágenes forman una partición de ∂W.

Una n–TQFT (*teoría cuántica de campos topológica de dimensión* n) es un funtor monoidal

$$Z : \mathrm{Cob}_n \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\Bbbk},$$

donde Cob_n es la categoría de n–cobordismos, y $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es la categoría monoidal de espacios vectoriales sobre $\Bbbk$.

En la década de 1990, **Michael Atiyah** (1929–2019) y **Vladimir Turaev** (1954–) emplearon las TQFT para construir invariantes topológicos de variedades y nudos, como los *invariantes de Turaev–Viro* y los *de Reshetikhin–Turaev*, formulados en términos de categorías monoidales y álgebras de Hopf asociadas.

Un problema abierto importante es la *clasificación de las TQFT por su dimensión*. En dimensión 2, una TQFT corresponde exactamente a un álgebra de Frobenius, mientras que en dimensiones superiores existen caracterizaciones parciales en términos de álgebras de Hopf, categorías monoidales y sus generalizaciones.

duality between algebra and geometry

geometry	category	dual category	algebra
topology	$\mathrm{TopSpaces}_{H,\mathrm{cpt}}$	$\hookrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{op}}$	commutative algebra
topology	$\mathrm{TopSpaces}_{H,\mathrm{cpt}}$	$\simeq \mathrm{TopAlg}_{C^*,\mathrm{comm}}^{\mathrm{op}}$	comm. C-star-algebra
noncomm. topology	$\mathrm{NCTopSpaces}_{H,\mathrm{cpt}}$	$:= \mathrm{TopAlg}_{C^*}^{\mathrm{op}}$	general C-star-algebra
algebraic geometry	$\mathrm{Schemes}_{\mathrm{Aff}}$	$\simeq \mathrm{Alg}^{\mathrm{op}}$	commutative ring
noncomm. algebraic geometry	$\mathrm{NCSchemes}_{\mathrm{Aff}}$	$:= \mathrm{Alg}_{\mathrm{fin,red}}^{\mathrm{op}}$	fin. gen. associative algebra
differential geometry	SmoothManifolds	$\hookrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathrm{comm}}^{\mathrm{op}}$	commutative algebra
supergeometry	$\mathrm{SuperSpaces}_{\mathrm{Cart}}$ $\mathbb{R}^{n\,\vert\,q}$	$\hookrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathbb{Z}_2}^{\mathrm{op}}$ $\mapsto C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \wedge^\bullet \mathbb{R}^q$	supercommutative superalgebra
formal higher supergeometry (super Lie theory)	$\mathrm{Super}L_\infty\mathrm{Alg}_{\mathrm{fin}}$ $\mathfrak{g}$	$\hookrightarrow \mathrm{sdgcAlg}^{\mathrm{op}}$ $\mapsto \mathrm{CE}(\mathfrak{g})$	differential graded-commutative superalgebra ("FDAs")

Créditos: nLab - Functorial field theory

in physics:

algebra	**geometry**
Poisson algebra	Poisson manifold
deformation quantization	geometric quantization
algebra of observables	space of states
Heisenberg picture	Schrödinger picture
AQFT	FQFT
higher algebra	***higher geometry***
Poisson n-algebra	n-plectic manifold
En-algebras	higher symplectic geometry
BD-BV quantization	higher geometric quantization
factorization algebra of observables	extended quantum field theory
factorization homology	cobordism representation

Créditos: nLab - Functorial field theory

Muchas gracias!

E-mail:

facalmat@uis.edu.co

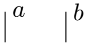
¿Pero qué es un álgebra de Hopf?
La vía fácil para definirlas

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo fijo y A una $\mathbb{k}$–álgebra. Nos interesa expresar mediante **diagramas** dos de sus leyes fundamentales:

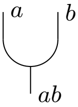
- Asociatividad:
$$(ab)c = a(bc), \qquad \forall\, a, b, c \in A.$$
- Unitalidad: Existe $1 \in A$ tal que
$$1a = a1 = a, \qquad \forall\, a \in A.$$

¿Cómo se verían estos axiomas en una notación puramente visual?

Paso 1. A cada elemento del álgebra le asignamos una **cuerda**, representada por una línea vertical:



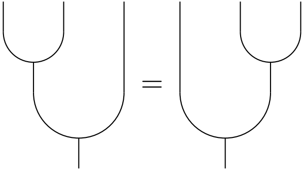
Paso 2. La multiplicación de dos elementos se representa como la *fusión* de sus cuerdas en una sola, que corresponde al producto:



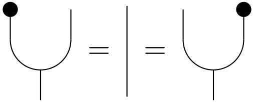
Paso 3. Al elemento identidad 1 le asignamos una cuerda especial, marcada con un *punto sólido*:

¡Cuidado! Los diagramas se leen de *arriba hacia abajo*, y las etiquetas pueden omitirse si el contexto es claro.

La asociatividad se expresa como la igualdad de los siguientes diagramas de cuerdas:



De manera análoga, la unitalidad se representa así:



El segmento vertical central simboliza el *no hacer nada*, es decir, la función identidad de A.

Formalización

Cuando afirmamos que a cada elemento del álgebra le corresponde una cuerda, estamos siendo imprecisos: esto sugeriría que existe una representación distinta de la multiplicación para cada par de elementos.

Una descripción más rigurosa se formula en términos de **funciones**. Reinterpretamos entonces la multiplicación del álgebra A como la aplicación

$$m : A \times A \longrightarrow A, \qquad (a, b) \longmapsto ab.$$

En este lenguaje, la asociatividad se expresa mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \times A \times A \arrow[r, "m \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times m"'] & A \times A \arrow[d, "m"] \\
A \times A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

Para representar el elemento identidad de manera funcional debemos ser un poco más creativos. Sea $\bullet := \{e\}$ el álgebra trivial, y definamos la aplicación

$$u : \bullet \longrightarrow A, \qquad u(e) = 1_A.$$

Notemos que $\varphi_l : \bullet \times A \to A$, dada por $\varphi_l(e, a) = a$, es un isomorfismo natural. De forma análoga se define $\varphi_r : A \times \bullet \to A$.

En este lenguaje, la unitalidad se expresa mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \times A \arrow[r, "u \times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \times A \arrow[d, "m"] & A \times \bullet \arrow[l, "\mathrm{Id} \times u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Puesto que las aplicaciones m y u definidas son bilineales, todo lo dicho hasta ahora para el álgebra A y sus operaciones en términos del producto cartesiano $\times$ puede reescribirse en términos de productos tensoriales.

¡Cuidado! Si no se está familiarizado con el producto tensorial de espacios vectoriales, recordemos brevemente su idea principal: El producto tensorial $V \otimes W$ de dos espacios vectoriales V y W es un nuevo espacio que *codifica todas las combinaciones bilineales posibles* de elementos de V y W. Formalmente, existe una correspondencia natural:

$$\mathrm{Bil}(V \times W, U) \;\cong\; \mathrm{Lin}(V \otimes W, U),$$

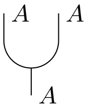
donde Bil denota las aplicaciones bilineales y Lin las lineales. Además, si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, entonces $\dim(V \otimes W) = nm$.

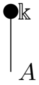
Recapitulemos

En resumen, una $\mathbb{k}$–álgebra es un $\mathbb{k}$–espacio vectorial A provisto de dos morfismos lineales

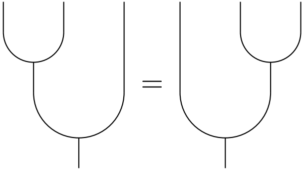
$$m : A \otimes A \to A, \qquad u : \mathbb{k} \to A,$$

llamados multiplicación y unidad, representados mediante los diagramas:

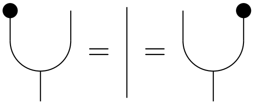
$m =$ 

y $u =$ 

Estas operaciones satisfacen los siguientes diagramas de asociatividad y unitalidad:

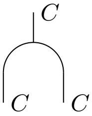


y



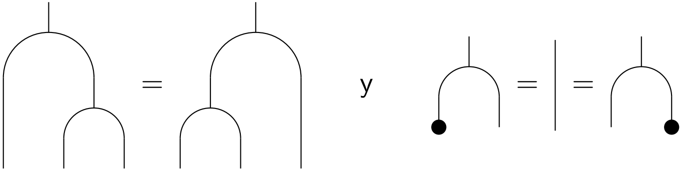
¿Y SI GIRAMOS LOS DIAGRAMAS 180°?

El concepto *dual*, llamado $\mathbb{k}$–coálgebra, corresponde a un $\mathbb{k}$–espacio vectorial C provisto de dos morfismos lineales:

$\Delta =$ 

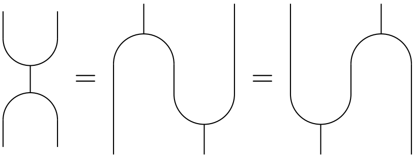
y $\varepsilon =$ 

denominados comultiplicación y counidad. Además, los axiomas duales, llamados coasociatividad y counitalidad, son:



¿Y si pedimos ambas condiciones?

Una $\Bbbk$–álgebra de Frobenius es un $\Bbbk$–espacio vectorial H que es simultáneamente una $\Bbbk$–álgebra y una $\Bbbk$–coálgebra, satisfaciendo las condiciones de Frobenius:



Equivalentemente, esta condición se traduce en la existencia de una forma bilineal no degenerada

$$\sigma : H \times H \longrightarrow \Bbbk$$

tal que

$$\boxed{\sigma(ab, c) \;=\; \sigma(a, bc), \qquad \forall\, a, b, c \in H.}$$

Álgebras de Hopf

Otra forma de combinar las dos estructuras es exigir una compatibilidad alterna. Una $\Bbbk$–bialgebra es un $\Bbbk$–espacio vectorial H que es simultáneamente una $\Bbbk$–álgebra y una $\Bbbk$–coálgebra, satisfaciendo que la comultiplicación Δ y la counidad ε sean morfismos de álgebras.

Si, además, existe un morfismo $\Bbbk$–lineal

$$S : H \longrightarrow H,$$

llamado antípoda, tal que

$$\boxed{m \circ (\mathrm{Id}_H \otimes S) \circ \Delta \;=\; u \circ \varepsilon \;=\; m \circ (S \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta,}$$

entonces H se denomina una $\Bbbk$–álgebra de Hopf.

Un ejemplo sencillo

Sea G un grupo finito y sea $\Bbbk^G$ el álgebra de las funciones de G en $\Bbbk$, con suma y multiplicación definidas *componente a componente*.

Usando el isomorfismo natural

$$\Bbbk^G \otimes \Bbbk^G \;\cong\; \Bbbk^{G\times G},$$

las operaciones que definen su estructura de coálgebra son:

$$\Delta(f)(x,y) = f(xy), \qquad \varepsilon(f) = f(1_G), \qquad S(f)(x) = f(x^{-1}), \quad \forall\, x,y \in G,\ f \in \Bbbk^G.$$

Por tanto, $\Bbbk^G$ es una $\Bbbk$–álgebra de Hopf.

Siguiendo la terminología de Brzeziński–Fairfax (2012):

Definición

Un *haz* es una tripla (X, π, M) donde X y M son espacios topológicos, y $\pi : X \to M$ es una aplicación continua y sobreyectiva.

Aquí, M se llama el espacio base, X el espacio total, y π la proyección del haz.

Para cada $m \in M$, la fibra sobre m es el subespacio

$$X_m := \pi^{-1}(m).$$

Una sección local del haz es una aplicación continua $s : U \to X$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M |_U$, donde $U \subseteq M$ es un abierto.

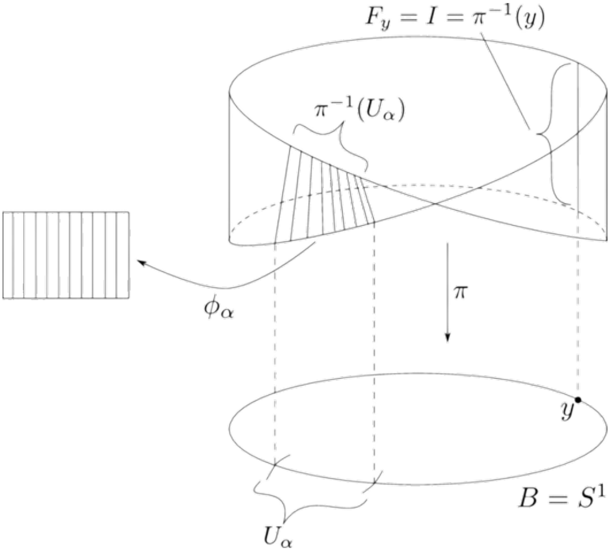
Cuando las fibras de un haz son todas homeomorfas a un mismo espacio F, se le conoce como un haz fibrado. En tal caso, se requiere que la proyección π sea *localmente trivial*, lo que significa que para cada $m \in M$ existe un entorno abierto $U \subseteq M$ de m y un homeomorfismo

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

tal que $\pi = p_1 \circ \phi$, donde $p_1 : U \times F \to U$ es la primera proyección.

Un ejemplo clásico e intuitivo de haz fibrado es la *banda de Möbius*. Su espacio base M es un círculo que recorre longitudinalmente el centro de la banda, y la fibra F es un segmento de recta que se extiende verticalmente. Cada fibra es homeomorfa a un intervalo cerrado de la recta real, por lo que $F = [0, 1]$.

¡Otro ejemplo es la Fibración de Hopf! Fue uno de los primero desarrollados.



Credit: Lim Zheng Liang

Fijemos un grupo topológico G.

Definición

Un haz principal es un haz fibrado $\pi : X \to M$ con una acción izquierda continua $G \times X \to X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\pi(g \cdot x) = \pi(x)$, para todo $g \in G$ y $x \in X$.
2. Para cualesquiera $x, y \in X$ con $\pi(x) = \pi(y)$, existe un único $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

En otras palabras, en un *haz principal* $\pi : X \to M$ (también llamado un G–*torsor*), la acción del grupo preserva cada fibra $\pi^{-1}(m)$, y la acción de G en cada fibra es libre y transitiva.

Se puede demostrar que cada fibra está en biyección con G, y que el espacio de órbitas (denotado por X/G) es homeomorfo al espacio base M.

¡Bajo ciertas condiciones, Brzeziński–Fairfax (2012), probaron que los *haces principales* corresponden a ejemplos de extensiones Hopf–Galois!