Una Facultad que construye comunidad | Facultad de Ciencias

Inscripción gratuita

https://ciencias.bogota.unal.edu.co/eventos/simposio_matematicas/

VII SIMPOSIO DE TOPOLOGÍA

Carlos Javier Ruiz Salguero

2025

El evento aborda temas de Topología y sus relaciones con áreas de la matemática como el álgebra, la lógica, teoría de categorias, entre otros.

9 al 11 de octubre 2025

Presencial
Auditorio
Juan Herkrath Müller
Edif. 476

Más información:
simptop_bog@unal.edu.co

Entrada libre

Síganos en CienciasUNALBog | @CienciasUNALBog | CienciasUNALBog | CienciasUNALBog | Facultad de Ciencias UNAL

60 años

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Sede Bogotá

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Séptimo Simposio de Topología Carlos Javier Ruiz Salguero

FUNCIONES DE JORDAN:
UN TEMA DE TOPOLOGÍA QUE NACIÓ EN LA LÓGICA GRÁFICA

Arnold Oostra

Universidad del Tolima

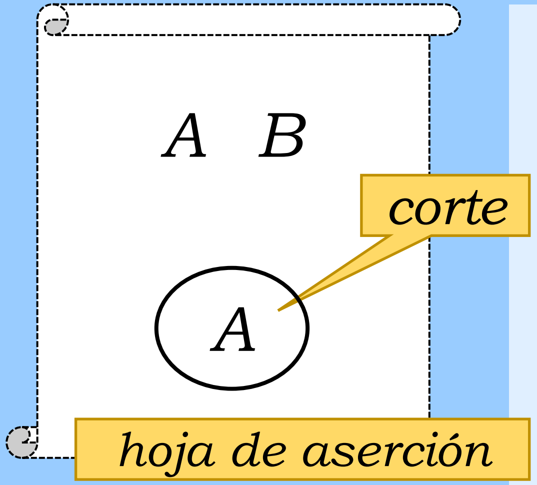
Grupo de Matemáticas del Tolima (Grupo MaT)

sistema de gráficos Alfa

C. S. Peirce

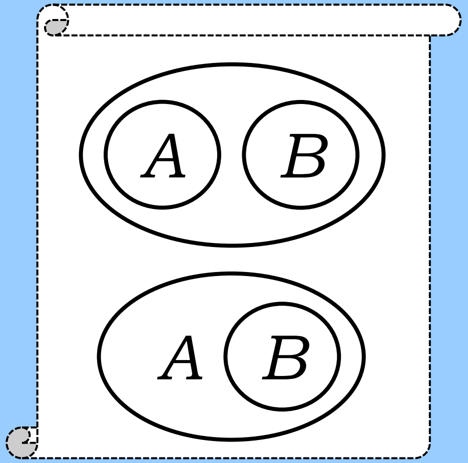
$A \wedge B$

$\neg A$



$A \vee B$

$A \rightarrow B$



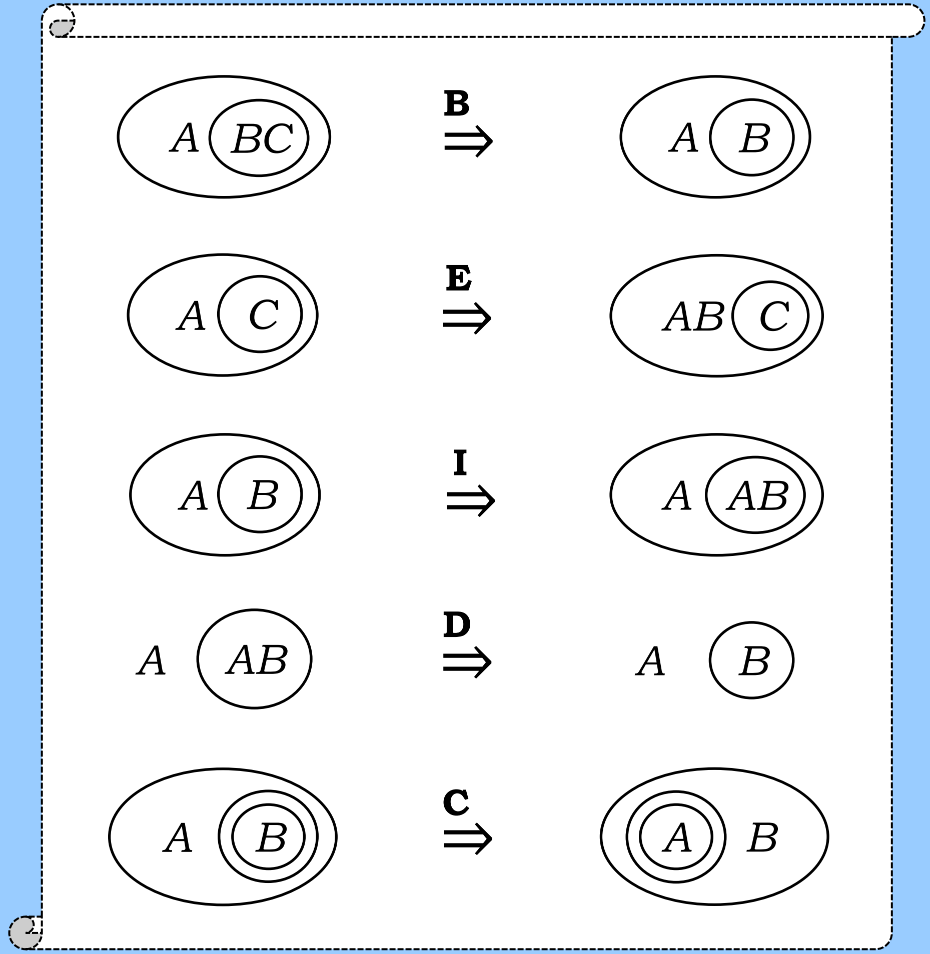
B. Borramiento
(en par)

E. Escritura
(en impar)

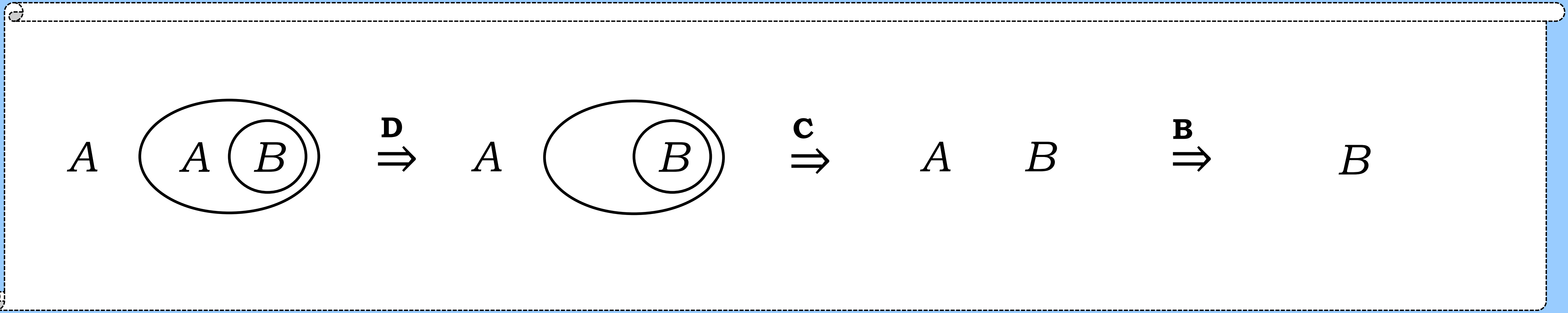
I. Iteración
(hacia adentro)

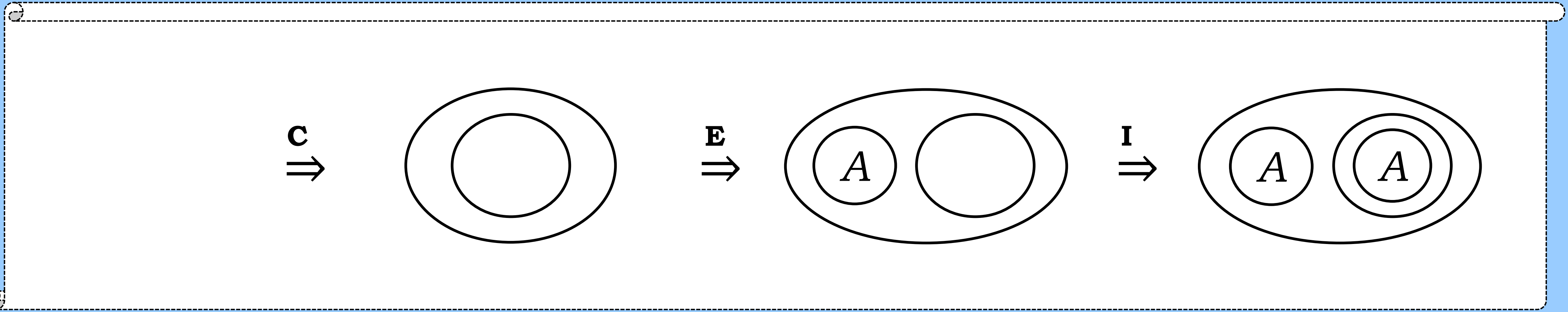
D. Desiteración
(desde afuera)

C. Corte doble



demostraciones Alfa





UT 2007

gráficos Alfa intuicionistas

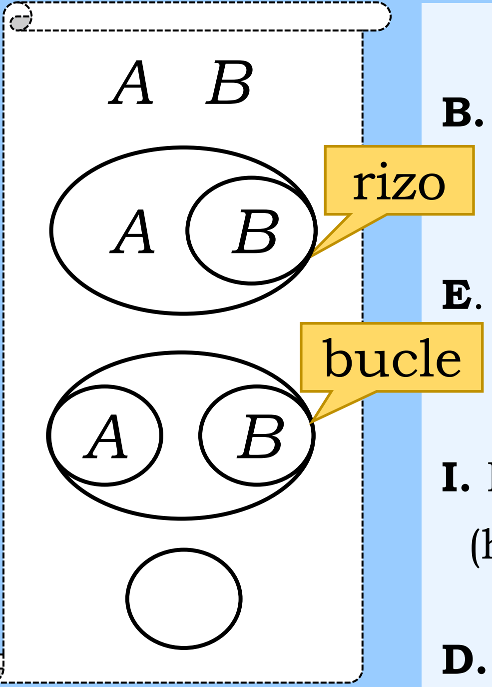
$A \wedge B$

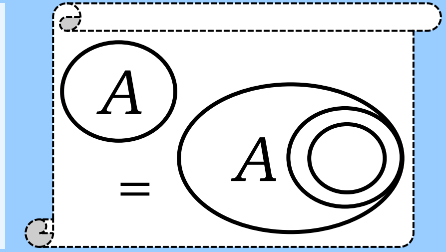
$A \rightarrow B$

$A \vee B$

$\perp$

$\neg A$





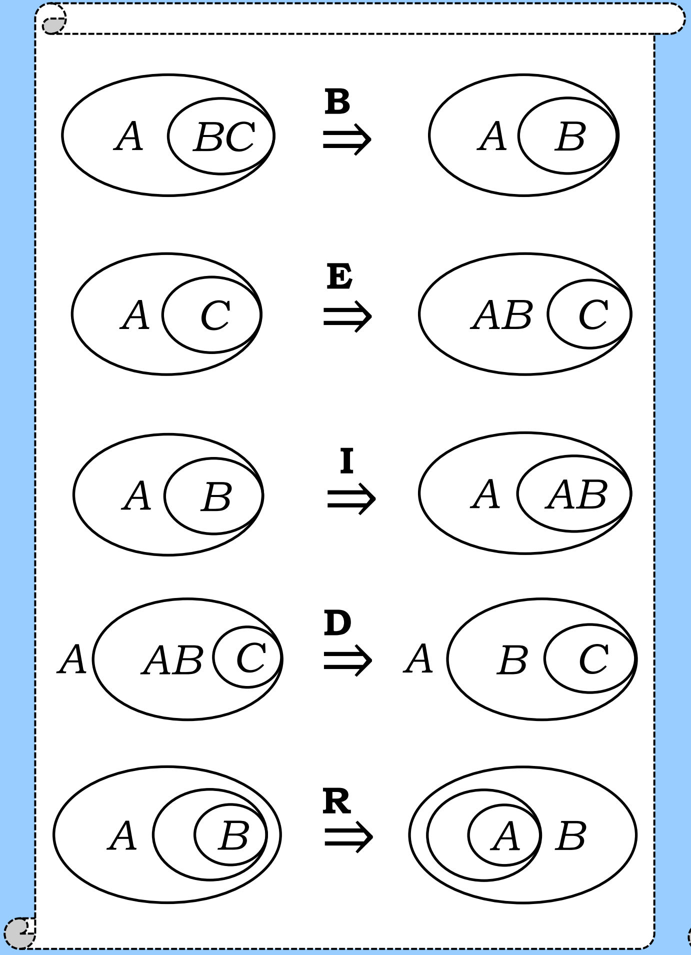
B. Borramiento (en par)

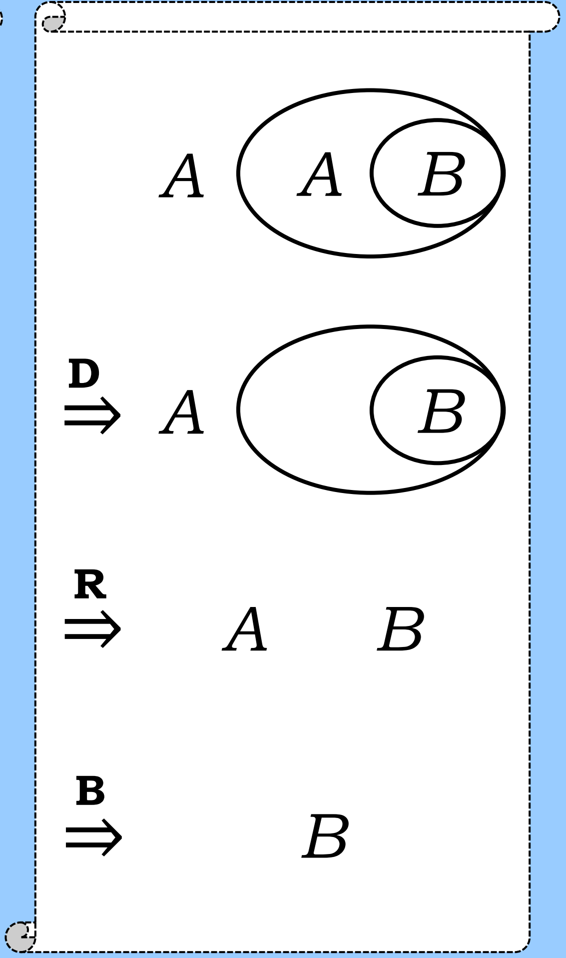
E. Escritura (en impar)

I. Iteración (hacia adentro)

D. Desiteración (desde afuera)

R. Rizado

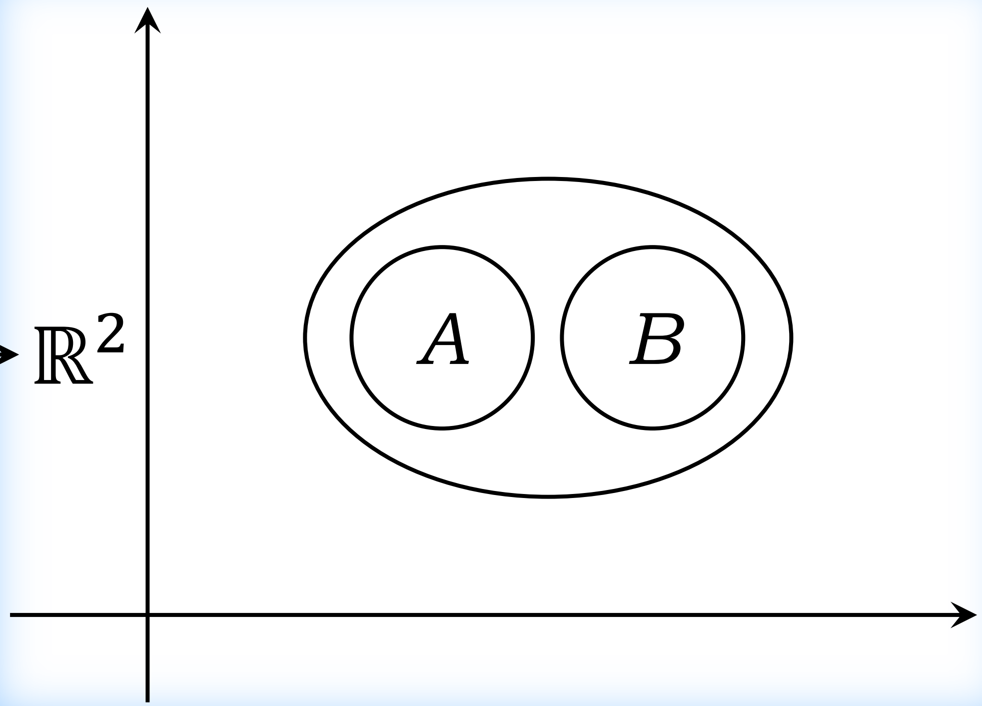




pregráfico Alfa clásico

Problema de fundamentación: definir o *representar* los gráficos existenciales como objetos matemáticos, mejor aún, geométricos.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} & \\ mS^1 + F_n \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$



cada sumando es una
- continua
- inyectiva

con imágenes disyuntas

- continua
- inyectiva

(inmersión)

deformación continua

Los pregráficos Alfa

$$\alpha : mS^1 + F_n \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda : F_n \to \mathcal{L}$$
$$\alpha' : m'S^1 + F_{n'} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda' : F_{n'} \to \mathcal{L}$$

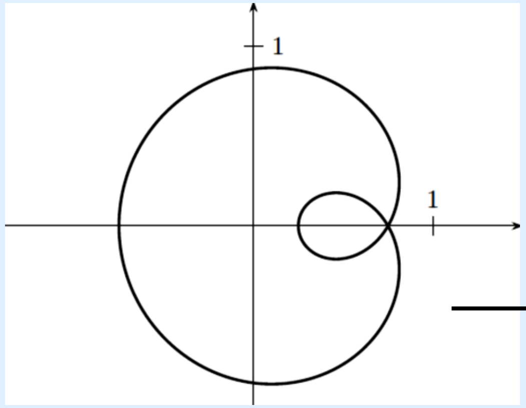
son *equivalentes* si

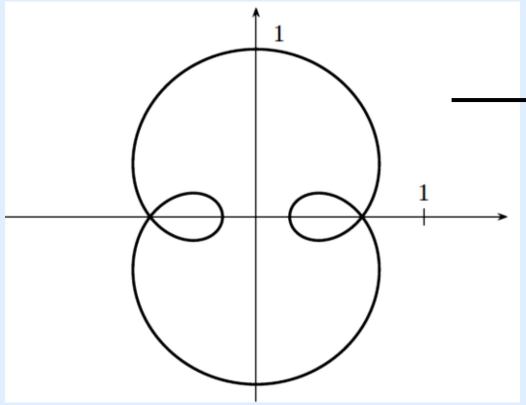
- $m = m'$, $n = n'$ (los dominios se pueden tomar iguales)
- $\lambda = \lambda'$
- Existe una isotopía $Y : \alpha \longrightarrow \alpha'$. Es decir,

la imagen por cada Y_t *es un pregráfico Alfa.*

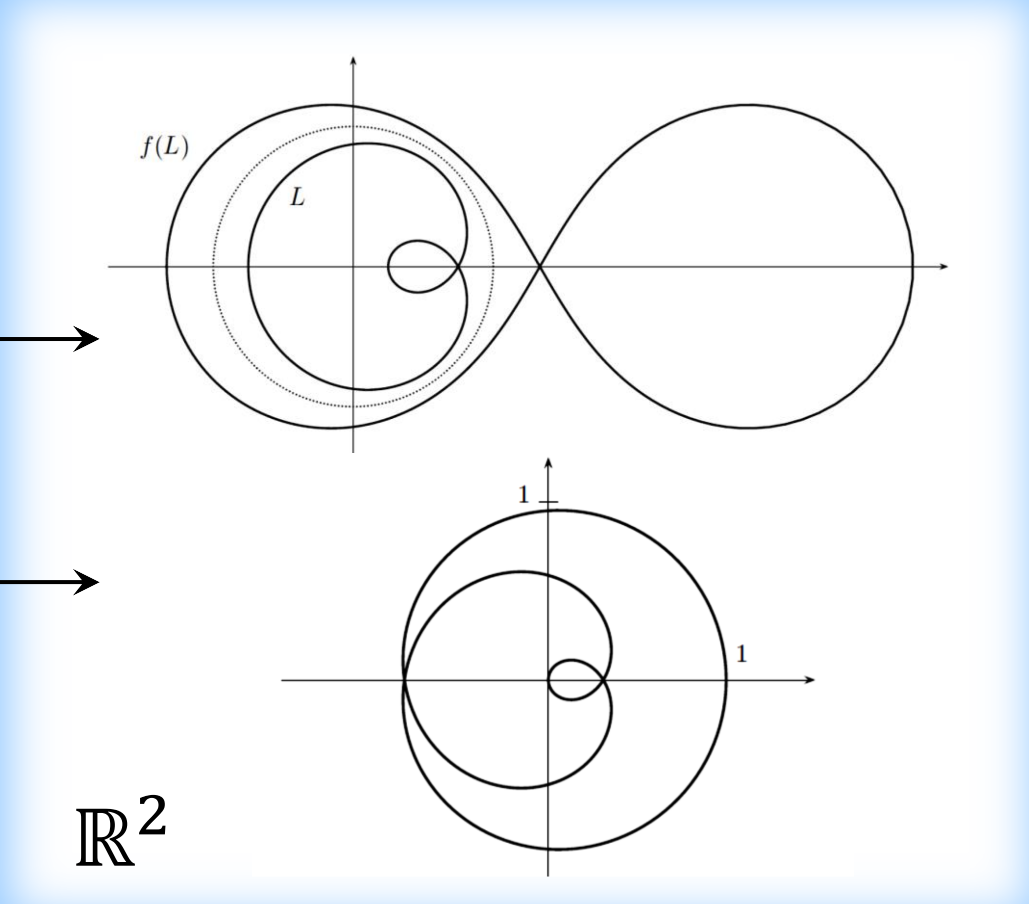
Un *gráfico Alfa* es una clase de isotopía de un pregráfico Alfa.

problema para el caso intuicionista





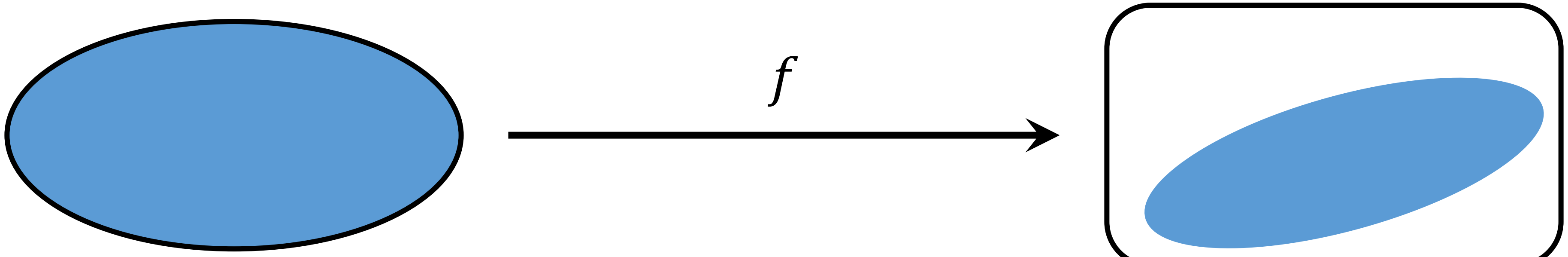
- continua
- inyectiva



funciones de Jordan (Arboleda & Díaz)

Una *función de Jordan* es una función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

- para cada curva de Jordan C, la imagen $f(C)$ es una curva de Jordan;
- la imagen del interior ΔC por la función f está contenida en el interior de la curva imagen: $f(\Delta C) \subseteq \Delta f(C)$.



funciones de Jordan

Una *función de Jordan* es una función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

- para cada curva de Jordan C, la imagen $f(C)$ es una curva de Jordan;
- la imagen del interior ΔC por la función f está contenida en el interior de la curva imagen: $f(\Delta C) \subseteq \Delta f(C)$.

Una *función fuerte de Jordan* es una función de Jordan f tal que la imagen del interior *es* el interior de la curva imagen:

$$f(\Delta C) = \Delta f(C).$$

ejemplos

- ✓ Cualquier función *afín*, de la forma $f(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}$ con M lineal biyectiva y $\boldsymbol{b}$ constante, es una función fuerte de Jordan (biyectiva).

  Esto da cuenta de todas las transformaciones de la geometría euclidiana.

- ✓ La función

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\| + 1}$$

es una función fuerte de Jordan (inyectiva, no sobreyectiva).

propiedades

- Toda función de Jordan es inyectiva.
- Toda función de Jordan es acotada (=imagen de acot es acot).
- La función f es de Jordan si y solo si $f(\nabla C) \subseteq \nabla f(C)$, aquí ∇C es el exterior de la curva de Jordan.
- Toda función fuerte de Jordan es abierta.
- Toda función fuerte de Jordan es cerrada en su imagen.
- Toda función fuerte de Jordan es compacta (imagen de compacto es compacta).

caracterización

Una función inyectiva entre espacios métricos es continua si y solo si es compacta (= imagen de compacto es compacto).

Luego, toda función fuerte de Jordan es continua.

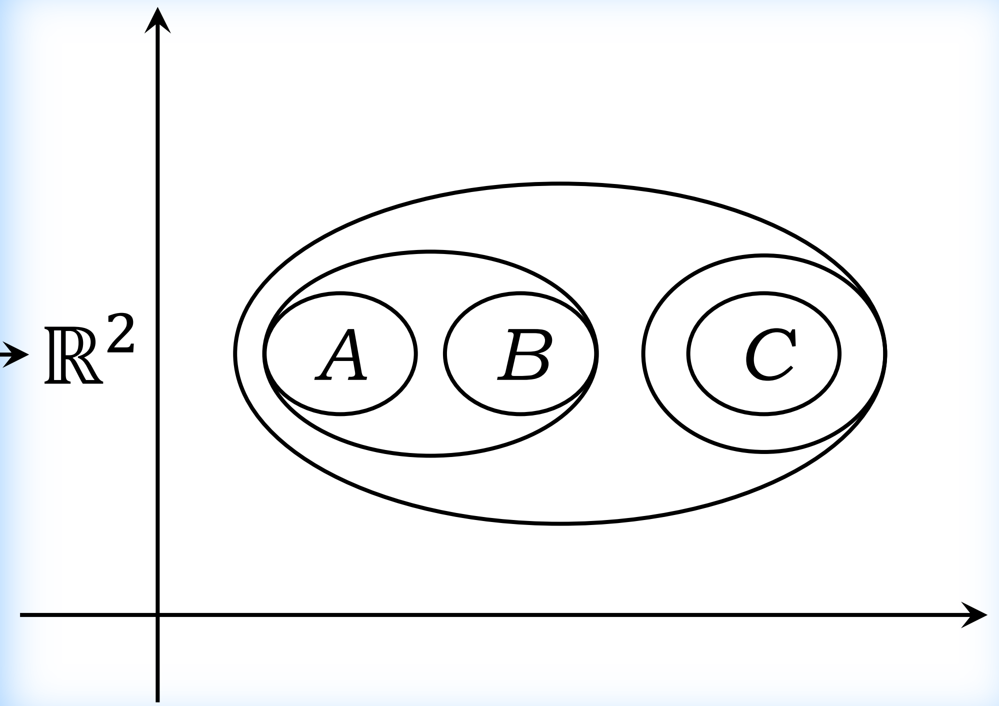
Al revés, a una función inyectiva y continua $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se aplica el *teorema de la invarianza del dominio* de Brouwer: la imagen de cualquier abierto es homeomorfa al mismo.

Teorema. La función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función fuerte de Jordan si y solo si es continua e inyectiva.

(2) pregráficos intuicionistas

L es una limaçon y E una epitrocoide de dos lazos.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} & \\ pE + qL + mS^1 + & F_n \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$



cada sumando es *restricción* de una

- continua
- inyectiva

cuyas imágenes son disyuntas

(problema 1) fuerte y débil

Aún no se conoce un ejemplo de una función *débil* de Jordan, esto es, función de Jordan, pero no fuerte.

Si $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de Jordan y el recorrido $f(\mathbb{R}^2)$ es simplemente conexo, entonces f es una función fuerte de Jordan.

Características del contraejemplo buscado:

- inyectiva,
- no continua,
- no simplemente conexa.

(problema 2) extensión

Las funciones de Jordan se pueden definir en el contexto más general $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y, en realidad, allí se conservan todos los resultados mencionados.

Aún falta precisar cómo se podría definir una función de Jordan $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para $m \neq n$, de tal manera que se extiendan los resultados a ese caso.

Luego seguirían extensiones a espacios más generales en los que valga alguna versión del teorema de Jordan.

bibliografía

- G.A. Arboleda y M.A. Díaz (2024). *Un modelo topológico para los gráficos Alfa intuicionistas*. Trabajo de grado. Ibagué: U. del Tolima.
- D.D. Roberts (1973). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton.
- F. Zalamea (2010). *Los gráficos existenciales peirceanos*. Bogotá: U. Nacional de Colombia.
- Y.M. Martínez (2014). *Un modelo real para los gráficos Alfa*. Trabajo de grado. Ibagué: U. del Tolima.
- A. Oostra (2010). "Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista". *Cuadernos de Sistemática Peirceana* **2**: 25-60.
- A. Oostra (2019). "Representación compleja de los gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción". *Boletín de Matemáticas* **26**(1): 31-50.
- J.R. Munkres (2000). *Topology*. Second edition. Upper Saddle River (N.J.): Prentice Hall.
- S. Willard (1970). *General Topology*. Reading (Mass.): Addison-Wesley.

Muchas gracias