Matemáticas condensadas:

Modular la topología

Andrés VILLAVECES NIÑO - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*

Séptimo Simposio de Topología
Carlos Javier Ruiz Salguero

Universidad Nacional de Colombia - Octubre de 2025

Etapas

¿Qué se busca modular/moderar? ¿Y por qué?

¿Cómo se logra? Objetos condensados

¿Cómo se conecta esto con lógica (forcing/teoría de modelos)?

Matemáticas condensadas: ¿Cómo llegué al tema?

- Temas anteriores: teoría de modelos sobre haces (tesis de maestría con Xavier Caicedo, hace ya más de tres décadas)...

Matemáticas condensadas: ¿Cómo llegué al tema?

- Temas anteriores: teoría de modelos sobre haces (tesis de maestría con Xavier Caicedo, hace ya más de tres décadas)...
- Una conferencia de Chris Lambie-Hanson en **Arctic Set Theory** en febrero de 2025...

Matemáticas condensadas: ¿Cómo llegué al tema?

- Temas anteriores: teoría de modelos sobre haces (tesis de maestría con Xavier Caicedo, hace ya más de tres décadas)...
- Una conferencia de Chris Lambie-Hanson en **Arctic Set Theory** en febrero de 2025...
- Una visita a Praga en julio pasado a trabajar con Lambie-Hanson y su grupo me hizo ver que muchos temas viejos para mí estaban siendo revividos por el trabajo de Clausen y Scholze (y luego Bergfalk, Lambie-Hanson, Šaroch)...

Etapa 1

¿Qué se busca modular/moderar? ¿Y por qué?

¿Qué se busca modular/moderar? ¿Y por qué?

Hacia 2017, Dustin Clausen y Peter Scholze inician un cambio de categorías, una recategorización que permite usar álgebra para estudiar mejor estructuras que combinan álgebra y topología.

¿Por qué lo hacen? Cierto «desbalance» se percibe al estudiar categorías clásicas de objetos que mezclan álgebra y topología. El ejemplo clave es el siguiente:

Objetos naturales, mal comportamiento ambiente

En la categoría TopAb, la función identidad

$$\mathbb{R}_{\mathsf{disc}} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

no es un isomorfismo; sin embargo, **ésto no es atestiguado** por kernel o cokernel no triviales. TopAb NO es una categoría abeliana.

NOTA: es como si el tener la topología sobre el álgebra «dañara» la categoría. La idea de Clausen y Scholze pasa por separar más cuidadosamente el álgebra de la topología: no superimponer la una a la otra en la misma estructura.

Mayor complejidad de objetos/mejor comportamiento

Un conjunto/grupo abeliano/... **condensado** es un funtor contravariante

$$T : CHaus \to Set/Ab/\dots$$

tal que

- (1) $T(\emptyset) = \star$,

Mayor complejidad de objetos/mejor comportamiento

Un conjunto/grupo abeliano/... **condensado** es un funtor contravariante

$$T : CHaus \to Set/Ab/\dots$$

tal que

- (1) $T(\emptyset) = \star$,
- (2) $T(S_0 \sqcup S_1) = T(S_0) \times T(S_1)$,

Mayor complejidad de objetos/mejor comportamiento

Un conjunto/grupo abeliano/... **condensado** es un funtor contravariante

$$T : CHaus \to Set/Ab/\ldots$$

tal que

- (1) $T(\emptyset) = \star$,
- (2) $T(S_0 \sqcup S_1) = T(S_0) \times T(S_1)$,
- (3) $\forall$ epi $S' \to S$ en CHaus con producto fibrado $S' \times_S S'$ y proyecciones π_0, π_1 en S', la función

  $$T(S) \to \{x \in T(S') : T(\pi_0)(x) = T(\pi_1)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

  es biyectiva.

Más sucintamente...

Un **[*] condensado** es un haz [*]-valuado sobre el sitio pre-étale asociado a un punto.

Más sucintamente. . .

Un **[*] condensado** es un haz [*]-valuado sobre el sitio pre-étale asociado a un punto.

El sitio pre-étale es LLENAR

Etapa 2

¿Cómo se logra? Objetos condensados

¿Cómo se sumergen las categorías clásicas en las nuevas?

Dado X espacio topológico, definimos $\underline{X}(S) = Cont(S, X)$. Esto resulta ser un conjunto condensado. Si X es compactamente generado, $\underline{X}(\star) \approx X$ (en Top). Esta inmersión es plenamente fiel, si se restringe a estos espacios.

¿Cómo se sumergen las categorías clásicas en las nuevas?

Dado X espacio topológico, definimos $\underline{X}(S) = Cont(S, X)$. Esto resulta ser un conjunto condensado. Si X es compactamente generado, $\underline{X}(\star) \approx X$ (en Top). Esta inmersión es plenamente fiel, si se restringe a estos espacios.

Si A es un grupo abeliano topológico, $\underline{A}$ dado por $\underline{A}(S) = Cont(S, A)$ resulta ser un grupo abeliano condensado.

¿Cómo se sumergen las categorías clásicas en las nuevas?

Dado X espacio topológico, definimos $\underline{X}(S) = Cont(S, X)$. Esto resulta ser un conjunto condensado. Si X es compactamente generado, $\underline{X}(\star) \approx X$ (en Top). Esta inmersión es plenamente fiel, si se restringe a estos espacios.

Si A es un grupo abeliano topológico, $\underline{A}$ dado por $\underline{A}(S) = Cont(S, A)$ resulta ser un grupo abeliano condensado.

Tenemos entonces maneras de **condensar** objetos. Luego veremos en qué sentido corrigen las patologías.

Topología sobre objeto subyacente (i)

Dado un conjunto (grupo abeliano, ...) condensado T, el objeto $T(\star)$ se llama **objeto subyacente** de T, y tiene la topología cociente inducida por

$$\bigsqcup_{S \to T} S \to T(\star).$$

Topología sobre objeto subyacente (i)

Dado un conjunto (grupo abeliano, ...) condensado T, el objeto $T(\star)$ se llama **objeto subyacente** de T, y tiene la topología cociente inducida por

$$\bigsqcup_{S \to T} S \to T(\star).$$

Dado $S \in \mathrm{CHaus}$, cada $x \in T(S)$ induce un mapa

$$g_x : S \to T(\star)$$

así: $s \in S$ induce primero la función $f_s : \star \to S$ que envía $\star$ a s.

Topología sobre objeto subyacente (ii)

Luego definimos

$$g_x(s) := T(f_s)(x).$$

La topología de $T(\star)$ es la más fina que hace que las g_x sean continuas (compacto-generada).

El Problema de Whitehead

Un grupo abeliano A es de Whitehead si para todo morfismo de grupos sobreyectivo $\pi : B \to A$ tal que $\ker(\pi) \approx \mathbb{Z}$ existe un homomorfismo $\sigma : A \to B$ tal que $\pi \circ \sigma = 1_A$.

Es decir, toda sucesión exacta corta de la forma

$$0 \to \mathbb{Z} \to B \to A \to 0$$

se rompe (escinde). Equivalentemente, $Ext^1(A, \mathbb{Z}) = 0$.

Por otro lado, A es **libre** ssi $Ext^1(A, C) = 0$, para todo grupo C.

Obviamente, todo grupo libre es de Whitehead. En los años 1940/1950, Whitehead preguntó si vale el recíproco.

El problema de Whitehead (y un lío matemático)

Problema de Whitehead: ¿Es todo grupo de Whitehead libre?

El problema de Whitehead (y un lío matemático)

Problema de Whitehead: ¿Es todo grupo de Whitehead libre?

Aunque Stein demostró que cuando A es contable de Whitehead debe ser libre, en los años 1970 Shelah demostró que el Problema de Whitehead es independiente.

El problema de Whitehead (y un lío matemático)

Problema de Whitehead: ¿Es todo grupo de Whitehead libre?

Aunque Stein demostró que cuando A es contable de Whitehead debe ser libre, en los años 1970 Shelah demostró que el Problema de Whitehead es independiente.

Teorema (Shelah):

- Si $V = L$, entonces todo grupo de Whitehead es libre.
- Si vale $MA_{\aleph_1}$, entonces existe un grupo de Whitehead que no es libre, de cardinal $\aleph_1$.

«Condensar» el problema de Whitehead: Clausen-Scholze

Dados $T_0, T_1 \in \text{CondAb}$, $\mathit{Hom}(T_0, T_1)$ tiene estructura natural de grupo abeliano. Por otro lado, CondAb tiene un producto tensorial y un funtor interno Hom, $\underline{\mathit{Hom}}(\cdot, \cdot)$, con valores en CondAb que satisface

Dados $T_0, T_1 \in \mathrm{CondAb}$, $Hom(T_0, T_1)$ tiene estructura natural de grupo abeliano. Por otro lado, CondAb tiene un producto tensorial y un funtor interno Hom, $\underline{Hom}(\cdot, \cdot)$, con valores en CondAb que satisface

$$Hom(T_0, \underline{Hom}(T_1, T_2)) \approx Hom(T_0 \otimes T_1, T_2).$$

«Condensar» el problema de Whitehead: Clausen-Scholze

En el caso particular en que A y G son **grupos abelianos topológicos compactos**, tenemos que

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{G}) \approx \underline{Hom(A, G)},$$

donde $Hom(A, G)$ tiene la topología compacta-abierta. Así, dado $S \in \mathrm{CHaus}$,

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{G}) \approx Cont(S, Hom(A, G)).$$

«Condensar» el problema de Whitehead: Clausen-Scholze

En el caso particular en que A y G son **grupos abelianos topológicos compactos**, tenemos que

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{G}) \approx \underline{Hom(A, G)},$$

donde $Hom(A, G)$ tiene la topología compacta-abierta. Así, dado $S \in \text{CHaus}$,

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{G}) \approx Cont(S, Hom(A, G)).$$

Ya teniendo una descripción de $\underline{Hom}$, podemos tomar su funtor derivado, $\underline{Ext}^1(\cdot, \cdot)$. Dados $A, B \in \text{Ab}$, $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{B})(\star) = Ext(A, B)$.

Modular/moderar la topología: un caso interesante

El Problema de Whitehead condensado (formulado para $\underline{Ext}^1$) NO es independiente de ZFC.

Teorema (Clausen-Scholze): Dado A grupo abeliano,
si $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ entonces A es libre.

El Problema de Whitehead condensado (formulado para $\underline{Ext}^1$) NO es independiente de ZFC.

> Teorema (Clausen-Scholze): Dado A grupo abeliano,
> si $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ entonces A es libre.

La demostración original parece ser compleja (y estar basada en grupos abelianos sólidos, una sub-categoría de los grupos abelianos condensados). Además (dicen Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch), es altamente inexplícita: dado un grupo abeliano no libre A, no identifica un espacio S tal que $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}}) \neq 0$.

La estrategia de Shelah, y de B-LH-Š

Dado un grupo A, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to K \to F \to A \to 0$$

con K un subgrupo de F, F libre. A resulta ser de Whitehead ssi el mapa inducido

$$Hom(F, \mathbb{Z}) \to Hom(K, \mathbb{Z})$$

es sobreyectivo (es decir, si todo elemento de $Hom(K, \mathbb{Z})$ se extiende a un elemento de $Hom(F, \mathbb{Z})$.

Parte de la estrategia de Shelah era ésta: dados suficientes diamantes $\diamondsuit$, si A no es libre existe un elemento de $Hom(K, \mathbb{Z})$ que no se extiende a un elemento de $Hom(F, \mathbb{Z})$.

La estrategia de Shelah, y de B-LH-Š

Al condensar lo anterior, resulta que A es condensado-Whitehead ssi el mapa

$$\underline{Hom}(\underline{F}, \underline{\mathbb{Z}})(S) \to \underline{Hom}(\underline{K}, \underline{\mathbb{Z}})(S)$$

es sobreyectivo, para todo $S \in \mathrm{CHaus}$.

Pero $\underline{Hom}(\underline{F}, \underline{\mathbb{Z}})(S) = Cont(S, Hom(F, Z))$ (con la topología compacta-abierta).

Así, para ver que A no es condensado-Whitehead, basta encontrar un espacio $S \in$ CHaus y una función continua

$$\varphi : S \to Hom(K, \mathbb{Z})$$

tal que no existe función continua

$$\psi : S \to Hom(F, \mathbb{Z})$$

para la cual $\psi(s) \supset \varphi(s)$ para todo $s \in S$.

Los tres autores Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch encontraron que si A no es libre, existe una función φ como la anterior para $S = 2^\kappa$, donde κ es el mínimo cardinal de un subgrupo no libre de A (es decir, $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}})(2^\kappa) \neq 0$.

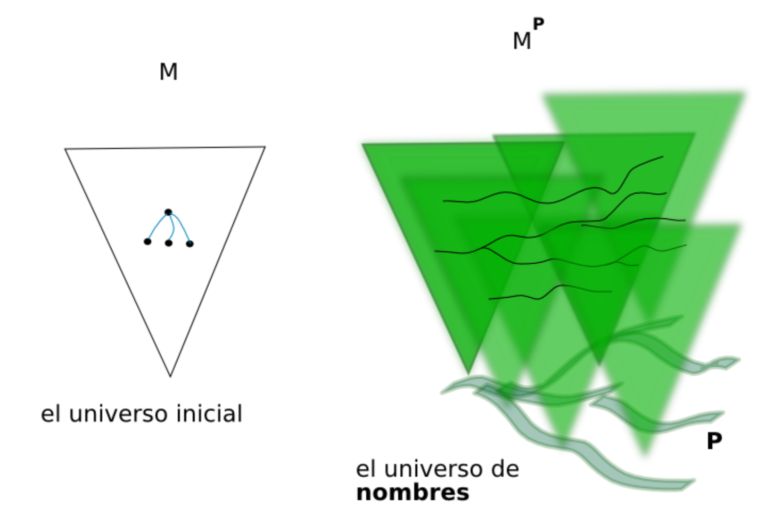
La construcción usa realmente un diamante débil (en ZFC)[1].

[1] Dado κ cardinal regular no contable, existe una función continua $\varphi : 2^\kappa \to \prod_{\alpha<\kappa} 2^\alpha$ tal que para toda función continua $\psi : 2^\kappa \to 2^\kappa$, existe $x \in 2^\kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa : \varphi(x)(\alpha) = \psi(x)|\alpha\}$ contiene un club.

Etapa 3

¿Cómo se conecta esto con lógica (forcing/teoría de modelos)?

Forcing: el modelo de nombres



Forcing: el modelo de nombres

- Nombres - V, $V^{\mathbb{P}}$, $V[G]$.
- $\mathbb{P}$ se suele sumergir en su completación $\mathbb{B}$, álgebra de Boole. Así, los nombres se pueden ver como valores de morfismos en $\mathbb{B}$.
- El dual de Stone de $\mathbb{B}$ es un espacio topológico extremadamente disconexo (ED) (la clausura de todo abierto es abierto). Los espacios ED son los duales de Stone de las álgebras de Boole completas.
- Hecho (folclor): dado Y espacio compacto de Hausdorff, existe una **correspondencia** importante (¡ya vista aquí!)

Si Y es un espacio compacto de Hausdorff,

$$\boxed{\mathbb{B}\text{−nombres de elts de } Y \quad \longleftrightarrow \quad \text{func. cont. de } St(\mathbb{B}) \text{ en } Y.}$$

Así, interpretar a Y en extensiones de forcing se logra intercambiando puntos de Y por filtros maximales de cerrados no vacíos de Y.

Un hecho técnico, muy interesante y relevante para la conexión con forcing, es el siguiente: se puede reformular la noción de **objeto condensado** así:

Un conjunto/grupo/... condensado es un funtor contravariante $T : ED \to Set/Ab/\dots$ tal que

- $T(\emptyset) = \star$,
- $T(S_0 \sqcup S_1) = T(S_0) \times T(S_1)$.

Objetos proyectivos

Es decir, la condición «de pegamento» sale gratis en la sub-categoría ED de CHaus, y no hay pérdida de información: todo elemento de CHaus es imagen sobreyectiva de un elemento de ED - y así, todo objeto condensado está determinado por su restricción a ED.

Los elementos de ED son los «objetos proyectivos» de CHaus; ejemplos típicos son compactificaciones de Stone-Čech βX, con X discreto.

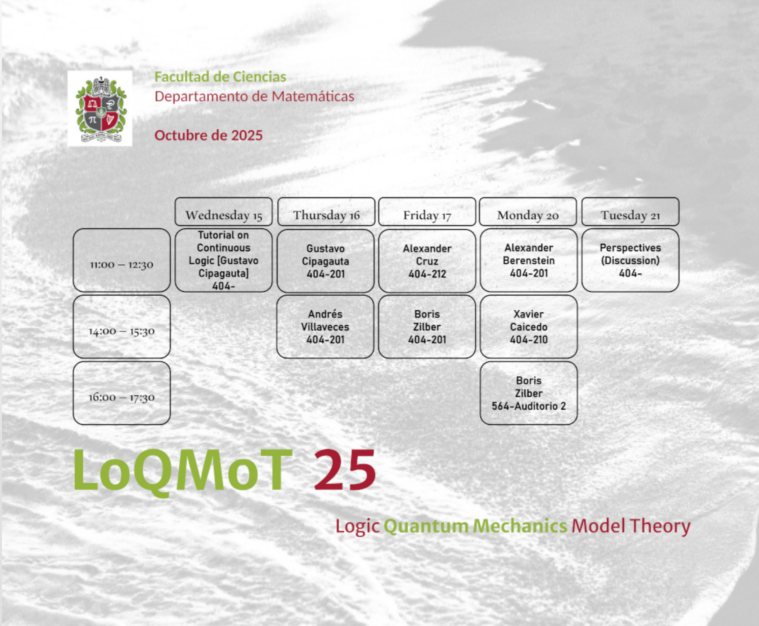
Nombres y condensación

Volviendo al tema de forcing, recordemos que un espacio topológico Y induce un conjunto condensado $\underline{Y}$ tal que $\underline{Y}(S) = Cont(S, Y)$, para $S \in \text{ED}$. **Por lo tanto**, si $Y \in \text{CHaus}$, $\underline{Y}$ resulta ser una **presentación organizada** de todos los nombres, en cualquier extensión de forcing, de elementos de Y. Así, los tres autores Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch realmente demuestran que si A es un grupo abeliano no libre y κ es el mínimo cardinal de un subgrupo no libre de A, A no es de Whitehead en $V[Add(\omega, \kappa)]$ y $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}})(S_\kappa) \neq 0$, donde S_κ es el espacio de Stone de la completación booleana de $Add(\omega, \kappa)$.

Finale - perspectivas

- La presentación categórica del forcing que resulta de lo anterior en realidad no es más que un caso particular de teoría de modelos sobre haces (Comer-Macintyre-Caicedo)
- Al reducir la categoría a categorías de espacios más restringidas se obtienen modelos internos (trabajos recientes de Basak y Veličković): obtienen los modelos de Solovay donde **todos los conjuntos son medibles**
- Otros tipos de haces aún no han sido estudiados desde el punto de vista de las matemáticas condensadas: haces sobre otros sitios étale, haces sobre categorías de espacios topológicos más generales.

Una cuña



Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Octubre de 2025

	Wednesday 15	Thursday 16	Friday 17	Monday 20	Tuesday 21
11:00 – 12:30	Tutorial on Continuous Logic [Gustavo Cipagauta] 404-	Gustavo Cipagauta 404-201	Alexander Cruz 404-212	Alexander Berenstein 404-201	Perspectives (Discussion) 404-
14:00 – 15:30		Andrés Villaveces 404-201	Boris Zilber 404-201	Xavier Caicedo 404-210	
16:00 – 17:30				Boris Zilber 564-Auditorio 2	

LoQMoT 25

Logic Quantum Mechanics Model Theory

Por fin

¡Gracias por su atención!

(Y feliz fin de semana/puente. . .)