Principios básicos de Supersimetría

Rodolfo Alexander Diaz Sanchez
Universidad Nacional de Colombia

The Date

Contents

Preface

This is the preface. It is an unnumbered chapter. The `markboth` TeX field at the beginning of this paragraph sets the correct page heading for the Preface portion of the document. The preface does not appear in the table of contents.

Introduction

El desarrollo histórico de nuestro entendimiento acerca de las fuerzas o interacciones fundamentales de la naturaleza, parece llevarnos a un reduccionismo cada vez mayor de los mecanismos subyacentes a estas interacciones. Desde los comienzos de la civilización, la humanidad esta familiarizada con una enorme multiplicidad de fuerzas que parecían tener muy diversos orígenes. La interacción gravitacional fué la primera en recibir un estudio sistemático a través de la teoría Newtoniana. El posterior desarrollo de modelos que describían las interacciones magnéticas y eléctricas, condujo a los trabajos de J. C. Maxwell en los cuales se da el primer gran paso de unificación, puesto que enlaza de manera perfecta las interacciones de orígen eléctrico y magnético en una sola teoría matemática y conceptual. En la primera mitad del siglo XX, se dan los mas grandes pasos en el entendimiento de las interacciones fundamentales como hoy las conocemos:

1. **El descubrimiento de la estructura atómica**, con el cual toda el inmenso espectro de interacciones que se conocían a nivel macroscópico, se reduce a complicadas interacciones de origen electromagnético a nivel atómico y molecular.

2. **La teoría de la relatividad especial**, puesto que provee un profundo marco conceptual en el cual el enlace entre los campos eléctricos y magnéticos está asociado a la estructura del espacio tiempo

3. **La teoría de la relatividad general**: esta teoría vé a la interacción gravitacional como una propiedad global del espacio tiempo como tal.

4. **El descubrimiento de los procesos radioactivos y otros procesos nucleares** trajo como consecuencia el descubrimiento de las interacciones de corto alcance, hoy día conocidas como la interacción débil y la interacción fuerte. **La mecánica cuántica**, provee el marco conceptual para el entendimiento de estas interacciones, ya que estas están restringidas al régimen microscópico.

De otra parte, los "ladrillos" fundamentales que constituyen la materia, también sufrieron un enorme reduccionismo con el descrubrimiento de la estructura atómica de la materia, ya que la enorme diversidad de las macroestructuras se podía explicar con unos pocos componentes fundamentales: protones, neutrones y electrones.

Mas adelante, con el descubrimiento de que los protones y neutrones poseen una subestructura (quarks), y con la posterior generación de un sin número de estados confinados de quarks (mesones y bariones), este reduccionismo gradual sufre una involución, puesto que obliga a la introducción de la segunda y tercera familia de quarks. El papel cosmológico de las dos familias mas pesadas es aún un misterio, ya que debido a su inestabilidad no pueden formar macroestructuras como las que son posibles con la primera generación. Un proceso similar de involución del reduccionismo ocurre con el electrón y su neutrino, con la introducción de las tres familias de leptones.

El modelo estándar de partículas elementales, es un modelo fenomenológico basado en la teoría cuántica de campos, que engloba a las interacciones fuerte, débil y electromagnética. Sin embargo, a pesar de su éxito en la predicción de algunas partículas y de datos de alta precisión, el modelo estándar tiene una serie de problemas tanto fenomenológicos como teóricos dentro de los cuales están 1) El papel de las tres generaciones de quarks y leptones en la naturaleza 2) La naturaleza quiral de la fuerza débil 3) Si creemos que existió una unificación de las interacciones, no es posibe unificar las interacciones electrodébiles y fuertes a través de las ecuaciones del grupo de renormalización. 4) La gravedad no está incorporada en el mismo esquema. 5) Las ecuaciones de RGE para el Higgs divergen a menos que se asuma un fine-tuning en la teoría.

Antes del advenimiento de las teorías de principios del siglo veinte, la graveda y el electromagnetismo se veían de manera análoga, ambas eran fuerzas que dependían del inverso cuadrado de la distancia. Aunque se era conciente de una gran diferencia en intensidad y en la naturaleza puramente atractiva d ela gravedad.

La Física moderna le da derroteros muy diferentes a ambas fuerzas, el establecimiento de la mecánica cuántica y de la teoría cuántica de campos nos lleva a establecer una fenomenología de interacción entre partículas de espín semientero, con partículas de espín 1. La graveda toma otro rumbo puesto que la relatividad general ve la gravedad como una dsitrosión geométrica del espacio tiempo con respecto al vacío, mas que una interacción, es una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Hay dos aspectos que dificultan una teoría cuántica de la gravedad, uno experimental (la insignificancia de la fuerza a nivel subatómico) y la otra de índole teórico, la constante de acople tiene dimensiones negativas de masa, lo cual conduce a teoría no renormalizables.

El teorema de Noether ubica a las simtetrías en un papel estratégico en la Física, e inspira la incorporación de teorías invariante gauge globales en partículas (como la eight-fold way).

La imposición de simetría gauge locales y la subsecuente generación de las interacciones llevó a la comunidad científica a tratar de trabajar los grupos de lie locales (los grupos de Lie son los naturales para el teorema de Noether).

Asumiendo que las leyes de la gravitación son válidas a nivel microscópicos se podrái medir con indefinida precisión el momento y la possición de una partícula en presencia de una campo gravitacional no cuantizado. Esto nos lleva a pensar que la gravedad debeser cuantizada a menso que asumamos que a leyes graviatatorias no se pueden extrapolar a tal dominio.

Las teorías GUT nos muestran posible unificación de los acoples y de la materia por aparte pero no de los dos (al fin y al cabo todas son partículas en QFT: otra unificación).

El fracaso de unificar gravedad con las otras interacciones llevó a los teoremas de prohibición, de modo que los grupos de Lie nopodían llevar a cabo un programa de unificación (ya que la gravedad tendría espín dos y no podría estar en un mismo multiplete irreducibled el grupo).

En tal caso, SUSY queda como único candidato. SUSY también resuelve otors problemas, puede llevar a teorías de graveda cuántica renormalizables (local SUSY) estabiliza la jerarquí GUT debido a la cancelación de diagrams de diferentes estadísitcas. Y también controla la divergencia en la mas del higgs sin fine-tuning. Además no solo unificaría las interacciones sino las interacciones con la materia.

????????????????????

Además de las ideas tradicionales de la teoría cuántica de campos, el modelo estándar incorpora las ideas del principio gauge y el fenómeno del rompimiento espontáneo de la simetría para generar el espectro de partículas que conforman las interacciones y la materia respectivamente.

?????????????

En virtud del gran éxito de las simetrías gauge para generar espectros de masas (the eight-fold way con simetrías gauge globales) y las interacciones (simetrías gauge locales). Se inició una búsqueda infrutuosa de teorías gauge locales

Part I

Estructura Matemática de la Supersimetría

Chapter 1

Elements of Group Theory

1.1 Mappings and transformations

Definition 1 *Mappings: If we have a* ***set of objects*** *which we call* ***points****, a mapping M of the set of points on itself is a recipe to associate with each point p of the set, an* image point *p' which is also in the set.*

$$p \xrightarrow{M} p' \quad \text{or} \quad p' = Mp$$

i.e. p' is the image of p under the mapping M. The set could be finite or infinite. For finite sets of points, we can show the association explicitly, for example

$$M \equiv \begin{pmatrix} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

for infinite sets, we use a functional law e.g. $x \to x' = 2x$. One important mapping is the identity defined as $Ip = p$, $\forall p \in S$. We can also define the composite of mappings which consists of succesive mappings acting on the set of points. If certain mapping M_1 takes p into p' while another mapping M_1 takes p' into p'' then we have

$$p' = M_1 p \ \ , \ \ p'' = M_2 p' = M_2 (M_1 p) = M_2 M_1 p$$

and the composite $M_2 M_1$ is another mapping that associates $p \xrightarrow{M_2 M_1} p''$. We can also see that

$$p''' = M_3 p'' = M_3 (M_2 M_1 p) = (M_3 M_2) M_1 p$$

so the mappings are *associative.*

Example 2 *using the mapping in Eq. (1.1) along with the following one*

$$M' \equiv \begin{pmatrix} a \to b \\ b \to b \\ c \to b \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

and make the composites $(M'M)\,S$ and $(MM')\,S$ where $S \equiv (a, b, c)$ we obtain

$$M'(MS) = \begin{pmatrix} b \to b \\ c \to b \\ a \to b \end{pmatrix} \ ; \ M\left(M'S\right) = \begin{pmatrix} a \to b \to c \\ b \to b \to c \\ c \to b \to c \end{pmatrix}$$

showing that the mappings are in general *non-conmutative.*

Definition 3 *A sobreyective mapping: is a mapping in which every element $p' \in S'$ is image of at least one starting point $p \in S$.*

Definition 4 *A one-to-one (inyective) mapping: is a mapping in which not two points in the starting set have the same image.*

Definition 5 *A transformation (biyective mapping): is a mapping in which no two points of the set have the same image, and every point $p' \in S$ is image of one (and only one) point $p \in S$.*

The mapping M defined in (1.1) is a transformation while the one defined in (1.2) is not. The identity Mapping is also a transformation. Given a transformation we can find the inverse of it. It can be shown that the inverse of a composite of transformations reads

$$\left(M'M\right)^{-1} = M^{-1}M'^{-1}$$

Some examples of transformations are.

Example 6 *Permutations: a set of n boxes each one with one element i.e. a_i in the $i-th$ case, with $i = 1, \cdots, n$. We interchange the elements in such a way that the element a_i is now located in the $p_i - th$ case with $p_i = 1, \cdots, n$. One example of this type of mapping is*

$$\left\{\begin{array}{c} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \\ 4 \to 4 \end{array}\right\}$$

Any transformation of a finite set of points can be seen as a permutation, it is of great relevance for finite groups.

Example 7 *Translations: the points x in the $X-$coordinates is tranformed into $x' = x + c$ where c is an arbitrary constant.*

Example 8 *Linear non-singular transformations in $n-$dimensional space*

With respect to a fixed coordinate system, the point $(x_1, \ldots, x_n)$ is mapped into the point $(x_1', \ldots, x_n')$ such that

$$x_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ ; \ \ i = 1, \ldots, n$$

this mapping is a transformation if and only if the determinant of the matrix with elements a_{ij} has non-zero determinant i.e. is non-singular.

1.2 Groups: Definitions and basic properties

Definition 9 *Abstract Group: is a set of elements $G = \{a_1, a_2, \ldots\}$, for which a* ***law of composition*** *$a_i * a_j$ is well defined $\forall a_i, a_j \in G$, and satisfies the following conditions*

1. If $a_i, a_j \in G \Rightarrow (a_i * a_j) \in G$
2. The law of composition is associative, i.e. $a_i * a_j * a_k = (a_i * a_j) * a_k = a_i * (a_j * a_k)$.
3. $\exists\, e \in G \ / \ e * a_i = a_i * e = a_i \ \forall a_i \in G$.

4. $\forall a_i \in G, \exists\, a_i^{-1} \in G \ / \ a_i * a_i^{-1} = a_i^{-1} * a_i = e$

The *law of composition* is also called a *law of combination*, a *product* or a *multiplication* which is by no means the same as the ordinary multiplication. In an **abstract group** we do not endow the elements a_i with any particular nature. All what matters is the law of combination among the elements.

Definition 10 *The number of elements in a group is the* ***order*** *of the group*

Example 11 *the unitary set $G = \{e\}$ in which we define $e * e = e$, forms a trivial group of order one.*

Example 12 *We shall build up the group of order two $G = \{e, a\}$ one of these elements must be the identity (say e). To complete the law of composition we should determine $a * a \equiv a^2$. Since (owing to the first condition for the groups) a^2 should belong to the set, we only have two possibilities, $a^2 = a$ or $a^2 = e$. If we assume that $a^2 = a$ then using the other group properties we get*

$$a * a = a \Rightarrow a^{-1} * a * a = a^{-1} * a \Rightarrow a = e$$

therefore a^2 must be equal to e from which we have defined the abstract group of two elements uniquely. The structure of this abstract group is given by the law of combination $e * a = a * e = a$, $a * a = e$. The last rule implies that a is its own inverse.

Example 13 *To build up the abstract group of three elements $G = \{e, a, b\}$ we should define the products $a * b$, a^2, and b^2. the product $a * b$ should be equal to one of the elements of the group, if we assume $a * b = a$, we find*

$$a^{-1} * a * b = a^{-1} a \ \Rightarrow \ b = e$$

similarly, assuming $a * b = b$ we arrive to the condition $a = e$. Therefore, we are left with the rule $a * b = e$. By an analogous argument, we get $a^2 = b$ and $b^2 = a$. This rules close the definition of the abstract group of order three.

Example 14 *It can be shown that* ***two abstract groups*** *can be generated with four elements, in this case it would be convenient to construct a group table for each abstract group in the following way.*

$$G_{4(1)} = \begin{array}{c|ccc} e & a & b & c \\ \hline a & b & c & e \\ b & c & e & a \\ c & e & a & b \end{array} \ ; \quad \begin{array}{l} a^2 = b,\ ab = c = a^3 \\ a^4 = b^2 = e \end{array} \tag{1.3}$$

$$G_{4(2)} = \begin{array}{c|ccc} e & a & b & c \\ \hline a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{array} \ ; \quad \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = e\ ,\ ab = c \\ ac = b\ ,\ bc = a \end{array} \tag{1.4}$$

The product is written such that the first element in the law of combination is given by the column while the second element is given by the row. The law of combination *do not have to be conmutative.*

Definition 15 *We say that a group is abelian or conmutative: if $a_k a_i = a_i a_k$ $\forall a_i, a_k \in G$.*

The abstract groups of order one, two, three and four explained above, are abelian groups. The symmetry in the tables (1.3, 1.4) manifests the abelian structure of the groups of order four.

The product of an element with itself will be denoted by a^2, and the inverse element as a^{-1}. Then we can settle a power notation

$$a^{-1} a = e \equiv a^0 \ \ , \ \ a^{-m} = \left(a^{-1}\right)^m = (a^m)^{-1}$$

For abelian groups, is usual to denote the law of combination as " + " and the identity as "0" so $a+0=0+a=a$, $a+b=b+a$. Of course, the symbol " + " does not mean ordinary sums. The inverse of an element is denoted by $-a$.

Definition 16 *If all the powers of the element a are distinct, a is said to be of infinite order. If it is not the case, the order of the element is defined as the smallest positive integer power n, such that $a^n = e$.*

If we denote as n the smallest positive integer such that $a^n = e$, we can see that all the n elements

$$a^0 = e, a^2, \ldots, a^{n-1}$$

are different. If a is of order n, we can generate n different elements of the group (the identity is always part of this set) by taking succesive powers of it. No more than n different elements are generated from powers of a when a is of order n. Those n different elements form a group under the law of combination that generates the powers of a.

Sometimes, the whole group can be generated from powers of a single element (cyclic groups). For example, the group with three elements can be written as $G_2 = \left\{a^0 = e, a^1, a^2 = b\right\}$ and a is of order 3, the element b can generate the group as well.

In Physics do not deal with abstract groups, but with **realizations** of groups in which the elements has a concrete form. Here there are some examples

Example 17 *The elements are the numbers $1, -1$ and the law of combination is ordinary multiplication.*

Example 18 *The elements are the numbers $0, 1$ with the following law of combination*

$$0+1 = 1+0 = 1,\ 0+0 = 0,\ 1+1 = 0$$

Example 19 *The nth root of unity under multiplication, this is a cyclic group which can be generated from the element $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. This example shows that we can construct cyclic groups of any finite order.*

Example 20 *The elements are the integers, the law of combination is ordinary addition, the identity is 0, any integer k has its inverse under addition $-k$. The group is of infinite order. 0 is of order one, but any other integer is of infinite order. This is a cyclic group of infinite order since we can generate all the elements from integer powers of 1. Negative (positive) integers are generated with 1^{-m} (1^m), zero is obtained from 1^0. This set is not a group under ordinary multiplication since the inverse of 0 is not in the set.*

Groups in Physics are related with symmetries, and a symmetry is an invariance under a transformation, therefore the elements of the group will be the *transformations* which leave a system invariant. But we should bear in mind that to define a transformation it is necessary to determine a set of points for the transformations to act on. Thus, in Physics it is useful to define a group of transformations

Definition 21 *A group of transformations is a collection of transformations $G = \{M_1, M_2, \ldots\}$ of a given set of points S. i.e. $p_k \xrightarrow{M_i} p_k^i$ with $p_k, p_k^i \in S$. Such that*

1. The collection contains the identity transformation

2. For every transformation M, its corresponding inverse is also included in the collection

3. If M_i and M_j belong to the collection, so M_iM_j does.

Observe that the law of combination is automatic (i.e. the composite of the transformations is the law of combination). In addition, associativity is an automatic property of transformations. Besides, the definitions of the elements themselves (transformations) is not enough and we should further define the set of points in which such transformations act on. In physics we deal with groups of transformations all the time[1], le us see some examples

Example 22 *The set of points is R^3. The group contains the elements $\{e, a\}$ with e being the identity transformation and a being the transformation that inverts the sign of all the coordinates of each point $(x, y, z) \xrightarrow{a} (-x, -y, -z)$.*

Example 23 *The set of points is R^3 but $(x, y, z) \xrightarrow{a} (x, y, -z)$. So that the transformation a defines reflection in the plane $X - Y$.*

Example 24 *The points are two elements a_1, a_2, the group of transformations $G = \{e, P_2\}$ are the possible permutations among them*

$$P_1 = e = \left\{ \begin{array}{c} a_1 \to a_1 \\ a_2 \to a_2 \end{array} \right\} ; \; P_2 = \left\{ \begin{array}{c} a_1 \to a_2 \\ a_2 \to a_1 \end{array} \right\}$$

Observe that the groups described by 17, 24 are determined by two elements $\{e, a\}$ such that $a^2 = e,\ ea = ae = a$. Therefore, both of them have the same group structure, despite all of them have different elements and laws of combination. For the different groups described above we can make the following correspondence

abstract group	e	a
group of 1,-1 under multiplication	1	-1
group of $0, 1$ under exotic addition	0	1
group of inversion	$(x, y, z) \to (x, y, z)$	$(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$
group of two permutations	$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \to a_1 \\ a_2 \to a_2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \to a_1 \\ a_2 \to a_2 \end{array} \right\}$

Definition 25 *Two groups G and G' are* ***isomorphic*** *if their elements can be put into a one-to-one correspondence which is preserved under the law of combination of each group. i.e. there is a transformation M such that $Ma = a'$, $\forall a \in G$ and $\forall a' \in G'$ such that*

$$\left(a' * b'\right) = (a \times b)' \Leftrightarrow (Ma) * (Mb) = M\,(a \times b)$$

where "$*$, $\times$" denote the laws of combination for G' G respectively. The isomorphism is denoted as $G \approx G'$.

All the groups that are isomorphic to each other, come from the same abstract group, and have the same group properties.

Example 26 *The groups defined by Eqs. (20,**??**,**??**) are isomorphic each other, since we can define the transformations $n \leftrightarrow 2n \leftrightarrow 2^n$ among their elements, and all of them are isomorphic to the cyclic group*

$$\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$$

which is clearly the only abstract cyclic group of denumerable order.

A group of infinite order may be isomorphic to another one which is only part of it. This cannot be the case in groups of finite order, in which isomorphism implies the same number of elements.

[1] In physics we call the transformations as *operators* and the set of points on which the operators work are usually *vector spaces*.

1.2.1 Subgroups

If $\Re \subset G$ is a group **under the same law of combination** defined in G, we say that $\Re$ is a subgroup of G. To check that $\Re \subset G$ is a subgroup of G we should verify that

1. If $a_i, a_k \in \Re \Rightarrow a_i * a_k \in \Re$.

2. If $a_i \in \Re \Rightarrow a_i^{-1} \in \Re$.

The other properties are a heritage of the whole group. For finite groups, only the first condition must be checked. The identity alone, and G itself are improper subgroups of G. Other subgroups of G are called proper.

If $\Re'$ is a subgroup of $\Re$ then, it is a subgroup of G as well. This suggest the possibility of having a sequence of subgroups in the form

$$G \supset \Re_1 \supset \Re_2 \supset \ldots$$

There could be several sequences. For instance, starting with the group of permutations of 3 symbols (S_3), we find

$$\begin{aligned} S_3 &\supset \Re_1 \supset e \; ; \; S_3 \supset \Re_2 \supset e \\ S_3 &\supset \Re_3 \supset e \; ; \; S_3 \supset a_3 \supset e \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Re_1 &= \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{pmatrix} \right\} \; ; \; \Re_2 = \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \Re_3 &= \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

all finite groups must finish the chain with the identity group.

Example 27 *The rational numbers form a group G under addition. The positive rational numbers form a group $\Re$ under multiplication ($\Re \subset G$) but $\Re$ is not a subgroup of G because we are not using the same law of combination for both. $\Re$ is not a group under addition.*

1.3 Symmetric groups

The collection of all permutations of degree n, forms the symmetric group of order $n!$ (or degree n), usually denoted as S_n. The symmetric groups S_n, are very important because of the following

Theorem 28 *Cayley's Theorem: Every group G of finite order n, is isomorphic with a subgroup of the symmetric group S_n.*

The Cayley's theorem, implies that the number of different group structures that we can build up with n elements must be finite. This assertion reduces the task of contructing finite group structures.

1.4 Resolution of a group in cosets, Lagrange's theorem

If $\Re \subset G$ is a subgroup of G we can prove the following

Theorem 29 *If G is a group of finite order, and $\Re \subset G$ is a subgroup of G, the order of the subgroup $\Re$ must be a divisor of the order of G.*

Let $\Re = \{b_1, \ldots, b_h\}$ a subgroup of G of order h. Let us take an element a_1 of G such that $a_1 \notin \Re$. We form all the possible elements $\{a_1 b_1, \ldots, a_1 b_h\}$ which we denote shortly as $a_1\Re$, all the elements generated this way are different each other (if $a_1 b_k = a_1 b_j \Rightarrow b_k = b_j$). Further, all of them are outside of $\Re$, for if $a_1 b_k = b_j \Rightarrow a_1 = b_j b_k^{-1} \in \Re$ contradicting our hypothesis that $a_1 \notin \Re$. This set has h different new elements, if we have not exhaust the group yet, we take another element a_2 such that $a_2 \notin \Re$, and $a_2 \notin a_1\Re$. The elements in the set $a_2\Re$ are not contained in $\Re$ neither in $a_1\Re$. We continue this procedure until we exhaust the group G. We can then resolve the group in the following way

$$G = \Re + a_1\Re + a_2\Re + \ldots + a_{k-1}\Re$$

the elements $a_k\Re$ are called the left cosets of $\Re$ in G, all the k sets in the equation above are disjoint and have h elements, from which it is clear that the order g of the group G is given by $g = kh$, k is called the index of $\Re$ in G, and the theorem is demostrated. Cosets are not subgroups since they do not contain the identity.

1.5 Conjugate classes

Definition 30 *An element $a \in G$ is said to be conjugate to another element $b \in G$, if $\exists u \in G$ such that $uau^{-1} = b$. It is also said that b is the transform of a by u. It can be seen that*

1. a is conjugate to itself (taking $u = e$)

2. If a is conjugate to $b \Rightarrow b$ is conjugate to a

3. If a is conjugate to b, and b is conjugate to c, then a is conjugate to c.

So that conjugation is an equivalence relation. Any equivalence relation can be used to separate the elements of the set (the group) in subsets called **classes** in which the elements of one class are conjugate each other. The classes have the following features

- The classes are disjoint subsets that fills the whole set (group). In other words, each element in the group belongs to one and only one class.

- The identity forms a class by itself.

- All the elements in a class have the same order.

- If $\Re \subset G$ is a subgroup in G, and $a, b \in \Re$ are conjugate each other in G, it does not guarantee that a, b are conjugate in $\Re$.

- The only class that forms a group is the one consisting on the identity alone.

- In an abelian group, all the elements form a class by themselves.

1.6 Invariant subgroups

Definition 31 *We define the conjugate of the subgroup $\Re$ in G by the element $a \in G$, as the set of elements $a\Re a^{-1}$.*

Theorem 32 *The conjugate of the subgroup $\Re$ in G by the element $a \in G$ also forms a subgroup in G.*

Definition 33 *An invariant subgroup $\Re$ in G, is a subgroup that coincides with all their conjugates in G.*

In other words, a subgroup $\Re$ in G is invariant in G if and only if

$$a\Re a^{-1} = \Re \; ; \forall a \in G \tag{1.5}$$

invariant subgroups are also called self-conjugate. This condition can also be expressed as

$$a\Re = \Re a \; ; \forall a \in G$$

i.e. a subgroup is invariant in G if and only if all the left cosets defined in G, coincides with the right cosets defined in G.

Finally, from (1.5) we see that if an element $b_i \in \Re$, all its conjugate elements $ab_i a^{-1}$ are also in the subgroup. It means that a subgroup is invariant in a group G, if and only if it contains all its elements in **complete classes** of G. It should be noticed that if $\aleph \subset G_1$ and $\aleph \subset G_2$ and $\aleph$ is invariant in G_1; it does not guarantee that $\aleph$ is invariant in G_2. Hence, we should indicate what group is $\aleph$ invariant in.

Definition 34 *A group is called simple: if it does not contain any proper invariant subgroup.*

Definition 35 *A group is called semi-simple if none of its invariant subgroups are abelian*

Since in an abelian subgroup each element constitute a class by itself, we see that all the subgroups of an abelian group are invariant. The groups of prime order are simple.

1.7 The factor group $G/\Re$.

If $\Re$ is an invariant subgroup in G, we can show that the left (or right) cosets, satisfy some important relations

1. $\Re\Re = \Re$ because of the group nature of $\Re$
2. $(a\Re)(b\Re) = a(\Re b)\Re = a(b\Re)\Re = (ab)\Re$ because of the associativity and definition of invariant subgroup. The following two properties are corollaries of this one.
3. $(a\Re)\Re = a\Re$
4. $(a\Re)\left(a^{-1}\Re\right) = \Re$

In summary, the product of two cosets is again a coset. If we see the cosets (including $\Re$ itself) as elements, and define the law of combination as the product showed in the second property, we see that the collection of all the *different* cosets of $\Re$ i.e. $\{\Re, a_1\Re, \ldots, a_{k-1}\Re\}$ forms a group under such law of combination, in which we identify $\Re$ as the identity of this group. The order of this group is the index of $\Re$ in G, and it is called the factor or quotient group $G/\Re$. It is clear that $G/e = G$ and $G/G = e$.

Example 36 *The cyclic group of four elements* $G_4 = \{a^0, a^1, a^2, a^3\}$ *contains the invariant subgroup* $\aleph = \{a^0, a^2\}$. *We first form the cosets, the first coset is the subgroup itself, the second is obtained by taking an element outside of the subgroup (say* $a^1 = a$*)*

$$a\aleph = \{a^1, a^3\}$$

the resolution of G_4 *in cosets of* $\aleph$ *is*

$$G_4 = \aleph + a\aleph = \aleph + \aleph a$$

The factor group can then be formed as

$$G_4/\aleph = \{(a^0, a^2), (a, a^3)\} \equiv \{\aleph, a\aleph\}$$

The group table is

$$\begin{aligned} \aleph\aleph &= \aleph \ ; \ (a\aleph)(\aleph) = a\aleph \\ (a\aleph)(a\aleph) &= a^2\{a^0, a^2\} = \{a^2, a^0\} \Rightarrow (a\aleph)(a\aleph) = \aleph \end{aligned}$$

relabeling $\aleph \equiv e,\ a\aleph \equiv b$ *we get* $ee = e,\ eb = be = b,\ b^2 = e$. *So the factor group* $G_4/\aleph$ *is the isomorphic to the abstract group of two elements.*

1.8 Homomorphisms

We defined previously the isomorphism between two groups G and G' as a transformation (biyective mapping) between the elements of the groups, such that the correspondence determined by the transformation is preserved under combination.

$$\begin{aligned} &G \xrightarrow{M} G' \\ (Ma) * (Mb) &= M(a \times b) \text{ or } (a' * b') = (a \times b)' \end{aligned}$$

where the symbols $*$ and $\times$ represents the laws of combination for G' and G respectively. We could imagine a mapping in which the correspondence is preserved under combination but several elements of G can be mapped into the same element in G'.

Definition 37 *Homomorphism: Is a sobreyective mapping between the elements of two groups* G *and* G' *such that the correspondence is preserved under combination.*

Since several elements of G can be mapped in the same image point in G', we conclude that for finite groups if g, g' are the orders of G, G', then $g \geq g'$. If the equality holds, the homomorphism becomes an isomorphism.

There are some basic properties of the homomorphisms between groups

1. *The identity of* G *must be mapped in the identity of* G'. Since $M(e \times a) = M(e) * M(a)\ \forall a \in G$. Then $M(a) = M(e) * M(a)\ \forall a \in G$. Now, when a is run over all G; $M(a)$ is run over all G' because M is sobreyective, therefore $a' = (e)' * a'\ \forall a' \in G'$. On the other hand, by starting from $M(a \times e)$ we also show that $a' = a' * (e)'\ \forall a' \in G'$. Then $(e)'$ is the identity in G' and we denote it as e'.

2. *The set of all the elements* $\Re_{e'} = \{e, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ *which are mapped in* e' *forms an invariant subgroup of* G.

3. *As usual, the subgroup* $\Re_{e'}$ *induces a resolution of* G *in cosets.* $G = \Re_{e'} + b_1\Re_{e'} + \ldots + b_{k-1}\Re_{e'}$

4. *All the elements of a certain coset* $b_i\Re_{e'}$*, are mapped into the same image point* b_i'. As a corollary of this assertion we see that G' is isomorphic to $G/\Re_{e'}$.

5. The homomorphism is an isomorphism if and only if $\Re_{e'} = \{e\}$.

Example 38 *We can establish an homomorphism from the cyclic group of order four* G_4 *to the abstract group of order two* $G_2 = \{e', b'\}$*. The elements of the subgroup* $\aleph$ *invariant in* G_4 *(defined in example 36) are mapped into e′, while the elements in the coset* $a\aleph$ *are associated to* b'*.*

1.9 Direct products of groups

A group G is said to be the direct product of its subgroups $\Re_1, \Re_2, \ldots, \Re_n$ if

1. The elements of different subgroups conmmute

2. Every element $g \in G$ can be written in a unique way as

$$g = h_1 * h_2 * \ldots * h_n$$

   where $h_i \in \Re_i$ with $i = 1, \ldots, n$; and all the subgroups are proper subgroups of G. We denote it as:

$$G = \Re_1 \otimes \Re_2 \otimes \ldots \otimes \Re_n$$

   The subgroups $\Re_i$ are called the direct factors of G. Some important properties of the direct factors are

3. $\Re_i \cap \Re_j = \{e\}$ for $i \neq j$

4. $\Re_i$ is an invariant subgroup in G.

5. The order of the factors $\Re_1 \otimes \Re_2 \otimes \ldots \otimes \Re_n$ is irrelevant, since elements from different subgroups commute.

Example 39 *The cyclic group of order 6 can be written as*

$$\begin{aligned} G_3 &: e, a^2, a^4 \quad ; \quad G_2 : e, a^3 \\ G_6 &= G_3 \otimes G_2 \end{aligned}$$

the elements of G_6 *are generated as*

$$\begin{aligned} ee &= e \; ; \; a = a^4 a^3 \; ; \; a^2 = a^2 e \; ; \; a^3 = e a^3 \; ; \\ a^4 &= a^4 e \; ; \; a^5 = a^2 a^3 \end{aligned}$$

1.9.1 Direct product of two groups

To obtain the direct product of two groups $G \otimes G'$ we form all the possible pairs (a, a') with $a \in G$, $a' \in G'$. The product of pairs is defined as

$$(a, a')\,(b, b') = (ab, a'b') \tag{1.6}$$

if we see the pairs as the elements of the new group $G \otimes G'$ i.e. $A \equiv (a, a') \in G \otimes G'$, the equation 1.6 gives the law of combination. These new elements accomplish the properties of a group. In the case of finite groups, it is clear that the order of $G \otimes G'$ is the product of the orders of G and G'. If both groups G and G' are abelian, their direct product is abelian too.

Example 40 *$G_2 \otimes G_2'$ both have the same abstract groups but we use their elements as independent*

$$G_2 = \{e_1, a_1\} \quad ; \quad G_2 = \{e_2, a_2\}$$

where

$$a_1^2 = e_1 \ ; \ a_2^2 = e_2$$

the direct product is defined as

$$\begin{aligned} G_2 \otimes G_2' &= \{(e_1, e_2), (e_1, a_2), (a_1, e_2), (a_1, a_2)\} \\ &= \{E = A_0, A_1, A_2, A_3\} \end{aligned}$$

the "table of multiplication" can be easily constructed, let us show some few steps

$$\begin{aligned} A_1 * A_2 &= (e_1, a_2) * (a_1, e_2) = (e_1 a_1, a_2 e_2) = (a_1, a_2) = A_3 \\ A_1 * A_3 &= (e_1 a_1, a_2 a_2) = (a_1, e_2) = A_2 \end{aligned}$$

the similarly for the rest of the terms. The group generated is isomophic to the cyclic group of order four.

1.10 Group representations

1.10.1 Transformations in vector spaces

Given a certain basis $\mathbf{u}_i$ in a vector space $\mathbf{V}$ any vector can be written as a linear combination of such basis

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{u}_i$$

we shall use the convention of sum over repeated indices. Any change of basis can be written in the form

$$\mathbf{u}_i' = a_{ij} \mathbf{u}_j \qquad i = 1, \ldots, n$$

or in matrix form

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} \tag{1.7}$$

any vector $\mathbf{x}$ can be written in both bases $\mathbf{x} = x_i \mathbf{u}_i = x_i' \mathbf{u}_i'$. It can be shown that the new coordinates x_i are given by

$$\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{x} \tag{1.8}$$

with $\tilde{\mathbf{A}}$ denoting the transpose of $\mathbf{A}$.

A mapping T in a vector space $\mathbf{V}$, associates each vector $\mathbf{x}$ with another vector $\mathbf{y}$ in $\mathbf{V}$

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x}$$

if the mapping is a transformation it admits an inverse

$$\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{y}$$

we shall call T an operator in the vector space $\mathbf{V}$ this operator is linear if

$$T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha T\mathbf{x} + \beta T\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$$

where α and β are complex numbers. The definition of T is intrinsic and does not depend on the particular basis chosen for the vector space. Notwithstanding, for many practical purposes we define both the vectors and operators in a basis $\mathbf{u}_i$. The vectors $T\mathbf{u}_i$ must be linear combinations of $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{v}_i \equiv T\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j T_{ji}$$

where T_{ji} are complex coefficients that form the matrix representation of T. If we change to a new basis $\mathbf{u}_i'$ as the one defined in Eq. (1.8) we get a new matrix representation of the operator $\mathbf{T}$, defined in the new basis $\mathbf{u}_i'$. The relation between both matrix representations is

$$\mathbf{T}' \equiv \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{A}} \tag{1.9}$$

1.10.2 Linear group representations

Physics usually works with groups of transformations instead of abstract groups. In most applications the transformations are linear operators acting on a vector space. We have seen that it is always possible to build up a matrix representation for a given linear operator in a vector space. Therefore, we can construct a representation of the elements of the group (operators) by using matrix representatives.

Assume that we have a set of operators acting on a given vector space that satisfy the basic group properties (the composition of operators is the law of combination). If we map certain group G homomorphically into the set of operators, that act on the vector space $\mathbf{V}$, we say that the set of operators form a representation of the group G, in the representation space $\mathbf{V}$. If $\mathbf{V}$ is of dimension n, we sya that the representation has degree n or is an n dimensional representation. Observe that the concept of representation is related to groups of transformations and is intimately related with the set of points in which the transformations are acting on.

For an element $R \in G$, we denote the operator associated by the homomorphism as $D(R)$. The homomorphic mapping guarantees that

$$D(RS) = D(R)\,D(S) \quad , \quad D\left(R^{-1}\right) = [D(R)]^{-1} \;\; ; \;\; D(E) = 1$$

if in addition the operators forming the representation are linear, we say that the representation is linear as well. Linear representations permits in turn to form **matrix representations**. The dimension of the matrices is of course, the dimension of the vector space in which the operators are defined.

It deserves to say that if we have an operator S that maps biyectively $\mathbf{V}$ into another vector space $\mathbf{V}'$, a representation in $\mathbf{V}'$ is automatically generated by the induced operator that maps $\mathbf{V}'$ into itself, i.e. $D(R)' = SD(R)\,S^{-1}$, see section **??**. It can be checked that $D(R) \to SD(R)\,S^{-1}$ is an isomorphic mapping.

In order to construct a matrix representation of G in the vector space $\mathbf{V}$, it is necessary to choose a basis in $\mathbf{V}$. Since there is an homomorphic mapping between the elements of the group $\{R\}$, and the set of matrices $\{D(R)\}$, owing to the properties of homomorphisms we have (see Sec. **??**)

$$D_{ij}(E) = \delta_{ij} \quad ; \quad D_{ij}(RS) = D_{ik}(R)\,D_{kj}(S)$$

with sum over repeated indices. If the homomorphis between the group and the representation becomes an isomorphism, we say that the representation is "faithful" and for finite groups, the order of the group and of the faithful representation must coincide. The set of elements mapped into the identity matrix $D(E)$ form an invariant subgroup (see Sec. **??**). Identifying the invariant subgroup $\Re$, and the disjoint cosets $a_i\Re$ that fills the group, as though they were single elements, we obtain the quotient group $G/\Re$. Clearly, there is an **isomorphism** between the elements of such a quotient group, and the set of matrices $\{D(R)\}$. Thus, the set $\{D(R)\}$ is a faithful representation of $G/\Re$. For the sets of matrix to be a faithful representation of G, it is neccesary and sufficient that only the identity in G maps into the matrix identity i.e. $\Re = e$.

1.11 Equivalent representations

By changing the basis in the vector space $\mathbf{V}$ we change the matrix representatives by a similarity transformation i.e. $D'(R) = SD(R)\,S^{-1}$, but since there is an isomorphism between the sets $\{D(R)\}$ and $\{D'(R)\}$ we say that both representations are equivalent (a change of basis do not change the information on the system). Though the matrices look very different, they have the same information of the group and the vector space, it is therefore useful to look for invariant quantities under a change of basis, one of such an invariant is the trace of the matrices

$$\sum_i \left[SD(R)\,S^{-1}\right]_{ii} = \sum_{ikl} S_{ik} D(R)_{kl}\, S^{-1}_{li} = \sum_{kl} \left(\sum_i S^{-1}_{li} S_{ik} \right) D(R)_{kl} = \sum_{kl} \delta_{lk} D(R)_{kl} = \sum_l D(R)_{ll}$$

We shall call the traces of $D(R)$ the characters $\chi^{(\mu)}(R)$, where (μ) denotes the representation. Hence, equivalent representations possesses the same set of characters. It is obvious that the matrix representatives of two conjugate elements S, R of G, have the same character because they are connected by a transformation of similarity i.e. $S = URU^{-1}$. Consequently, when we list the set of characters of the elements of the group in a certain representation, it is not neccesary to indicate the character of each element. It suffices to make a list of the classses of the group K_1, $K_2 \ldots, K_\nu$ and indicate the character associated to each class $\left\{\chi_1^{(\mu)}, \ldots, \chi_\nu^{(\mu)}\right\}$.

We have seen that it is always possible to construct a matrix representative for any linear operator defined on $\mathbf{V}$, this set of matrices form a faithful matrix representation of the group of operators in $\mathbf{V}$. Notwithstanding, since to form a representation we only require homomorphism, we cannot assure that this is the only non-equivalent representation of the group of operators (and it is not in general), construction of all non-equivalent representations of a group in a certain vector space is another main challenge of group theory.

1.11.1 Examples of representations

1.12 Reducible and irreducible representations, invariant subspaces

Imagine that the group G_T of operators in $\mathbf{V}$ is such that when the set of operators act on $\mathbf{V}$, they map a proper subspace $\mathbf{W}_1 \subset \mathbf{V}$, into itself, (see figure ???). If $\mathbf{W}_1$ is of dimension k_1, it is called an k_1-dimensional invariant subspace of $\mathbf{V}$, under G_T (or a k_1 multiplet). Further, imagine that there is a disjoint set of invariant subspaces that fill the complete vector space i.e. $\mathbf{W}_1 \oplus \ldots \oplus W_p = \mathbf{V}$[2]. We say that the group has induced a partition of $\mathbf{V}$ as a direct sum of invariant subspaces under the group. Each subspace can be generated by an appropiate choice of basis, let us write $\left\{\mathbf{U}_i^{k_i}\right\} \equiv \left\{\mathbf{u}_1^i, \ldots, \mathbf{u}_{k_i}^i\right\}$ a set of linearly independent vectors that generate the invariant subspace $\mathbf{W}_i$, so that k_i is the dimension of the invariant subspace, so that the set $\{\mathbf{U}\} \equiv \left\{\mathbf{U}_1^{k_1}, \ldots, \mathbf{U}_p^{k_p}\right\}$ with p the number of invariant subspaces that fill the vector space. $\{\mathbf{U}\}$ provides a basis for $\mathbf{V}$, of course $k_1 + \ldots + k_p = n$, with n the dimension of $\mathbf{V}$. The basis $\{\mathbf{U}\}$ induces a matrix representation of the operators in $\mathbf{V}$, ¿what does this matrix representation looks like?, by ordering this basis appropiately we see a block diagonal matrix of the form ?????????????? each block gives a representation of each $\mathbf{W}_i$, this is **full reducibility**.

If for a given $\mathbf{W}_i$ there is not a proper subspace $\mathbf{W}_i' \subset \mathbf{W}_i$ that in turn form an invariant subspace of $\mathbf{W}_i$ under G_T, we say that $\mathbf{W}_i$ is an irreducible invariant subspace, and its representation is called an **irreducible representation**

We can see the problem in the opposite way, each subset $\left\{\mathbf{U}_i^{k_i}\right\}$ forms a basis for each invariant subspace and we can construct a representation $D_i^{(\mu)}(R)$ for the group in each subspace, it can be easily proved that the direct sum of matrices $D_1^{(\mu)}(R) \oplus \ldots \oplus D_p^{(\mu)}(R)$, provides a representation for the group G_T in the vector space $\mathbf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{W}_p = \mathbf{V}$.

In the previous discussion, we assumed that the invariant subspaces were disjoint and fill the complete vector space, it led to the concept of **full reducibility**. To figure out not fully reducible representations, imagine that a three dimensional space has an irreducible two dimensional space such that $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ gives a basis for $\mathbf{V}_3$, and the first two elements in the basis generates the invariant subspace $\mathbf{W}_2$. The remaining one dimensional subspace $\mathbf{W}_1$ might not be invariant, i.e. perhaps the set of operators in G_T maps some of the elements of W_1 outside of $\mathbf{W}_1$. More formally, if there is not a sum of the form $\mathbf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{W}_p = \mathbf{V}$ (where at least one of the $\mathbf{W}_i's$ is an invariant subspace under G_T), such that all of

[2]Be careful with the concept of direct sum of vector spaces, it is not the simple union of the elements. As an example, let $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{u}_1\}$, $\mathbf{V}_2 = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, i.e. the vector spaces generated with all the linear combinations of the vectors indicated. The direct sum $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, contains elements not included in neither of them, e.g. the linear combinations of $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$.

the $\mathbf{W}_i$ are invariant subspaces, the representation of G_T in $\mathbf{V}$, is reducible, but **not fully reducible**. ¿what does the matrix representation look like? ???????????????????????????.

Fortunately, all unitary representations are fully reducible.

In all this treatment, we have assumed that the matrix representation, is written in terms of **a very special basis** in which each subspace is generated by a subset of the basis. But if we start with any basis, this is not necessarily the case, and the matrices will not be displayed in a block diagonal form (example rotation in two dimensions in a no adeqaute basis wehn we are in three dimensions???????). However, if there are proper invariant spaces there will be a change of basis for which all the matrices $D(R)$ exhibit the same block diagonal texture (same structure of submatrices)[3].

Finding the irreducible representations of a group in a vector space (and in particular, prove the irreducibility of certain representation), is a major challenge in group theory.

Dar ejemplos simples de representaciones reducibles e irreducibles ?????????????

1.13 Continuous groups

1.13.1 The notion of continuity in a group

We can define a criterion of **nearness** by a metric over $\mathbb{R}^n$ (or more generally over a manifold). Let us define the elements of the group $\mathbf{U}(a_1, \ldots, a_r)$ where $a_1, \ldots, a_r$ is a set of continuous parameters defining a manifold. The criterion of nearness should be such that small changes in the parameters, produce small changes in the element i.e. $\mathbf{U}(a_1 + \delta a_1, \ldots, a_r + \delta a_r) = \mathbf{U}(a_1, \ldots, a_r) + \delta\mathbf{U}$. We also require that a small change in a factor of a product leads to a small change in the product. It gives a notion of continuity in the elements of the group. The most important continuous groups in Physics are the **Lie groups**.

In a continuous group we should first of all demand the usual group requirements. We shall denote the elements of the group as $R(a)$ where a denotes the whole set of continuous parameters i.e. $a \equiv \{a_1, ..., a_r\}$ in the manifold, and we define the identity as $R(a^0) \equiv R(0)$. Those elements should satisfy the following properties

1) $R(0)\,R(a) = R(a)\,R(0) = R(a)\,,\ \forall a$ in the manifold

2) $\forall a$ in the manifold $\exists \bar{a}$ such that $R(\bar{a}) = [R(a)]^{-1}$

3) $R(a)\,R(b) = R(c)$ with $R(c) \in G$, and c belongs to the manifold.

4) $R(a)\,[R(b)\,R(c)] = [R(a)\,R(b)]\,R(c)\,,\ \ \forall a, b, c$ in the manifold

c is a function of a, b. Remembering that they mean $r-$parameters we have

$$c_k = \phi_k(a_1, ..., a_r; b_1, ..., b_r) \quad ; \quad k = 1, ..., r$$

or in short notation

$$c = \phi(a; b) \tag{1.10}$$

The reader should be careful for not to confuse the law of composition in the manifold Eq. (1.10), with the law of composition of the group $R(a)\,R(b) = R(c)$. To obtain the law of composition in the group, we should define the law of composition in the manifold $c = \phi(a; b)$ plus the mapping that assigns a point of the manifold with a group element $a \to R(a)$.

1.13.2 Noether theorem

The Noether theorem says that any invariance of the action under a continuos symmetry, leads to a conserved current. However, as well as the continuity, the symmetry should also satisfied a condition of connectness, which is that every element that describe a symmetry transformation must be able to be

[3]We should keep in mind, however, that although the texture of the matrices in the representation is basis dependent; the division of the vector space in invariant subspaces under a given group is intrinsic.

reached continuously from the identity by infinitesimal transformations. Therefore, groups of continuous transformations that can be connected with the identity by infinitesimal trasnformations are special for physics. It leads us to consider groups with those properties

1.14 Lie Groups

For a continuous group to be a **Lie group** we demand the following requierements

1) ϕ must be analytic i.e. posseses continuous derivatives of all orders in a and b.

2) $\bar{a}$ must be an analytic function of a i.e. $\bar{a} = f(a)$ with f analytic in a.

With those additional requirements we say that the set of elements $U(a_1, ...a_r)$ is an $r-$parameter Lie group.

These requirements guarantees that we can go from the identity to any other element of the group by succesive infinitesimal continuos transformations. The statement of the Noether theorem says that conserved currents appears when the group of symmetries of the action is a Lie group.

Lie groups in Physics are groups of transformations in which we should specify not only the parameters that define the point in the manifold but also the coordinates of the element in the vector space in which the operator acts on. Then, an $r-$parameter Lie group of transformations on a $n-$dimensional vector space $\mathbf{V}$, is defined as

$$x_i^{'} = F_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r) \quad i = 1, ..., n$$

or shortly

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}; a)$$

with $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{V}$, and F_i are analytic functions of a. This is an $r-$parameter Lie group of transformations acting on an $n-$dimensional vector space[4]. Requirements of analyticity and of basic group properties impose strong restrictions on the functions F_i

$$F(F(x; a); b) = F(x; \phi(a; b)) \quad \forall a, b \in M(G), \ \forall x \in \mathbf{V}$$

Example 41 $x' = ax$, $a \neq 0$ *one parameter abelian group.* $a^0 = 1, \ \bar{a} = 1/a, \ c = ba$. *All requirements can be checked*

Example 42 $x' = a_1 x + a_2, \ a_1 \neq 0, \quad a^0 \equiv (a_1 = 1, a_2 = 0) \ ; \ \bar{a} \equiv (1/a_1, \ -a_2/a_1) \quad ;$
$c = ab = (b_1 a_1, b_2 + b_1 a_2)$. *This is a two parameter non abelian group*

For a group to be an $r-$parameter Lie group, it is necessary that all parameters be essential, i.e. no less parameters can be constructed such that we obtain a group isomorphic to the original one

Example 43 $x' = x + a + b$, *a and b are not essential for we can define a single one $c = a + b$ and obtain an isomorphism with this new group.*

Theorem 44 *A one parameter continuous group is equivalent to a group of translations and must be abelian, whenever every element of the group can be reached continuosly from the identity.*

Example 45 *There are some mixing continuos groups that besides the continuos parameters, require a discrete label to characterize all the elements. e.g. $G : \ x' = \pm x + a$. The group manifold consists of two disconnected sets. The subset $H_1 : x' = x + a$ can be reached continuosly from the identity, while $H_2 : x' = -x + a$ cannot. Observe that with the discrete symmetry $I : x' = -x$, we see that $H_2 = H_1 I$, and we can write $G = H_1 + H_2 I$. H is an invariant subgroup and the quotient group G/H_1 is the group of order two.*

[4]It is important not to confuse the vector space in which the transfromations act on (described by the coordinates x_i), and the space of points (manifold) described by the parameters a_k.

Theorem 46 *Lie's theorem: having a no-mixing unitary Lie group* $\left\{\widehat{\mathbf{U}}(\alpha_1,...,\alpha_r;\mathbf{x})\right\}$*, we can express each element of the group in terms of hermitian operators* $\widehat{L}_k$ *in the following way*

$$\left[\widehat{\mathbf{U}}(\alpha_1,...,\alpha_r;x_1,...,x_n)\right]\mathbf{r} = \left\{\exp\left[-i\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\widehat{L}_k\right]\right\}\mathbf{r}$$

where

$$-i\widehat{L}_k = \left.\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}(\alpha_1,...,\alpha_r;\mathbf{x})}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=0} \tag{1.11}$$

and

$$\left[\widehat{L}_k,\widehat{L}_m\right] = c^j_{km}\widehat{L}_j \tag{1.12}$$

with

$$c^j_{km} = -c^j_{mk} \quad ; \quad c_{ijm}c_{mkn} + c_{jkm}c_{min} + c_{kim}c_{mjn} = 0 \tag{1.13}$$

Clearly, the set of linear combinations of the hermitian operators $\widehat{L}_k$, forms an algebra under the commutator as a law of combination, it is called a **Lie algebra**; in some contexts physicists also use the term bosonic algebra, especially in quantum mechanical frameworks. Conversely, if we have a Lie algebra, defined by Eqs. (1.12, 1.13), we can induce a Lie group.

Observe that for these requirements it is necessary to have a **unitary** vector space. It is only by defining an inner product that we could say that an element of the group is unitary and the operators $\widehat{L}_k$ are hermitian. In addition in Eq. 1.11 the derivatives are evaluated in $\alpha = 0$, in the sense that $\widehat{\mathbf{U}}(0,...,0;\mathbf{x})$ must be the identity (a convenient parametrization to get it is always possible)

Definition 47 *The rank of a Lie group, is the largest number of generators that commute with each other.*

Example 48 *The translation group in three dimensions has as generators* $\widehat{p}_k = -i\partial/\partial x_k$*, all of them commute each other so the rank is 3*

Example 49 $SO(3)$*, the generators are the angular momentum operators. None of them conmute each other except with themselves, so the rank is* 1.

Definition 50 *If we can find a subset of generators* $\left\{\widehat{U}_1,...,\widehat{U}_n\right\}$ *such that*

$$\left[\widehat{G}_i,\widehat{U}_k\right] = a_{ikl}\widehat{U}_l \quad \forall\widehat{G}_i \in G$$

we say that the subset generates an ideal subalgebra, and the subset forms an invariant subgroup of G[5].

Definition 51 *A Lie algebra is simple if does not posses any ideal subalgebra different from the identiy alone. The group generated by the algebra is also simple, since it will not contain any non-trivial invariant subgroup.*

Definition 52 *A lie algebra is semisimple if does not posess any abelian ideal algebra (different from the trivial ones). The corresponding group is semisimple since it does not contain any non trivial abelian invariant subgroup*

Theorem 53 *Theorem of Racah: For any semi-simple group of rank k, there exists a set of k casimir operators, i.e. operators that are functions of the generators* $\widehat{L}_i$*, of the form* $\widehat{C}_\lambda\left(\widehat{L}_1,...,\widehat{L}_n\right) \quad \lambda = 1,...,k$. *Such that these casimir operators conmute with every operator of the Lie group and among themselves. The eigenvalues of the casimir operators uniquely characterize the multiplets of the group.*

[5] Observe that the criterion of ideal subalgebra is more restricted than thus assuming a normal subalgebra i.e $\left[\widehat{U}_i,\widehat{U}_k\right] = a_{ikl}\widehat{U}_l$

Chapter 2

El grupo de Lorentz y el grupo de Poincaré

2.0.1 Los Grupos $SO(3)$ y $SU(2)$ y la Definición de Espinor

En esta sección describiremos la relación estrecha que existe entre las rotaciones en el espacio, y las transformaciones complejas bidimensionales $SU(2)$. De paso definiremos además, el concepto de espinor. Empecemos por establecer la estructura formal de las rotaciones $SO(3)$ en el espacio real. En principio podemos descomponer las rotaciones espaciales en sucesivas rotaciones alrededor de los ejes coordenados, es decir:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_x \vec{r} \\
\begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_y \vec{r} \\
\begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z \vec{r}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde ϕ, ψ y θ son los ángulos de rotación alrededor de cada uno de los ejes coordenados. A partir de las expresiones (2.1) podemos construír el álgebra de Lie de las rotaciones contínuas en el espacio tridimensional y además la forma explícita de las rotaciones infinitesimales y finitas generales. Para ello debemos encontrar primero los generadores del álgebra [2]:

$$\begin{aligned}
J_x &= \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{dR_x}{d\phi}\right)\bigg|_{\phi=0} = \left(\frac{1}{i}\right) \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ 0 & -\cos\phi & -\sin\phi \end{pmatrix}\right|_{\phi=0} \Rightarrow J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
J_y &= \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{dR_y}{d\phi}\right)\bigg|_{\phi=0} = \left(\frac{1}{i}\right) \left.\begin{pmatrix} -\sin\psi & 0 & \cos\psi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\psi & 0 & -\sin\phi \end{pmatrix}\right|_{\phi=0} \Rightarrow J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
J_z &= \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{dR_z}{d\phi}\right)\bigg|_{\phi=0} = \left(\frac{1}{i}\right) \left.\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\phi=0} \Rightarrow J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

De esta manera los conmutadores del algebra de Lie resultan ser:

$$\begin{aligned}
[J_x, J_y] &= i\begin{pmatrix} o & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z \; Mas\ permutaciones\ cíclicas. \Rightarrow \\
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Las rotaciones generales en $SO(3)$ se pueden construír a partir de rotaciones infinitesimales[1]. Por ejemplo para R_z tenemos:

$$R_z = R_z(0) + \left(\frac{dR_z}{d\theta}\right)\Big|_{\theta=0} \delta\theta + \ldots$$

De tal manera que a primer orden podemos escribir:

$$R_z = I + iJ_z\delta\theta$$

Igualmente se puede deducir:

$$R_x = I + iJ_x\delta\theta \ , \ R_y = I + iJ_y\delta\theta$$

De esta manera las rotaciones finitas son el resultado de hacer un límite para el producto de rotaciones infinitesimales sucesivas:

$$R_z(\theta) = \lim_{n\to\infty}[I + iJ_z(\delta\theta)]^n = \lim_{n\to\infty}\left[I + iJ_z\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]^n = e^{i(J_z\theta)}$$

En el caso general cuando el eje de rotación va en la dirección del vector unitario $\hat{n}$, debemos incluír como generador, la componente de $\vec{J}$ en la dirección de $\hat{n}$, es decir:

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{i(\vec{J}\cdot\hat{n})\theta} \tag{2.4}$$

De esta manera tenemos la forma mas general para las rotaciones $SO(3)$ en función de los generadores del grupo. Adicionalmente, podemos decir que el grupo $SO(3)$ es de rango 1 de tal manera que debe aparecer un operador de Casimir (J^2) que conmuta con todos los generadores.

Paralelamente analicemos al grupo $SU(2)$, avanzando hacia una conexión con las rotaciones $SO(3)$. El grupo $SU(2)$ está conformado por las transformaciones especiales, unitarias sobre elementos de un espacio complejo de dos componentes. Las condiciones de especial y unitaria se resumen en las siguientes expresiones:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \ , \ \det(U) = 1 \tag{2.5}$$

Dichas condiciones restringen la forma explícita de las matrices complejas 2×2. Si definimos U como:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

De (2.5) se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
U^{-1} &= U^\dagger \Rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \Rightarrow \\
d &= a^* \ , \ -b = c^* \ , \ -c = b^* \ , \ a = d^* \ \Rightarrow \\
U &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \ Con\ \det U = aa^* + bb^* = 1
\end{aligned} \tag{2.6}$$

[1] $O(3)$ es un grupo contínuo mixto, pero el carácter de especial de $SO(3)$ le da la conectividad necesaria para que sea un grupo de Lie.

Definimos los espinores como los elementos del espacio complejo bidimensional, con las siguientes propiedades de transformación

$$U\xi = \acute{\xi}\ ,\ \acute{\xi}^{\dagger} = \xi^{\dagger}U^{\dagger} \tag{2.7}$$

Donde U, está expresado por (2.6). De (2.6) y (2.5) se deduce que:

$$\acute{\xi}^{\dagger}\acute{\xi} = \xi^{\dagger}U^{\dagger}U\xi = \xi^{\dagger}\xi$$

Es decir la forma cuadrática definida por:

$$\xi^{\dagger}\xi = \xi_1^*\xi_1 + \xi_2^*\xi_2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 \tag{2.8}$$

Es invariante bajo las transformaciones (2.6).

Obtengamos ahora, la matriz de rotaciones $SO\,(3)$ correspondiente a la matriz U de $SU\,(2)$; en función de los parámetros complejos a y b definidos en (2.6).
La manera usual de hacerlo consiste en transformar mediante U, la matriz compleja $(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})$ y comparar componentes cartesianas ([1] Sección 2.3, [4]). Dado que $(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})$ es un operador en el espacio de los espinores de $SU\,(2)$, este se transforma como:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})' = U\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\,U^{\dagger} \tag{2.9}$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.6) y además la forma explícita de $(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})$ podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \acute{z} & \acute{x} - i\acute{y} \\ \acute{x} + i\acute{y} & -\acute{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

De lo cual se deduce, despues de realizar el álgebra de matrices, las siguientes ecuaciones complejas:

$$\begin{aligned} \acute{z} &= z\left(|a|^2 - |b|^2\right) + x\,(b^*a + a^*b) + iy\,(ba^* - b^*a) && (2.10)\\ \acute{x} + i\acute{y} &= x\left[(a^*)^2 - (b^*)^2\right] + iy\left[(a^*)^2 + (b^*)^2\right] - 2za^*b^* && (2.11) \end{aligned}$$

Separando las partes real e imaginaria en (2.11) y a su vez expresando en forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{2}\right)\left[(a^*)^2 + a^2 - (b^*)^2 - b^2\right] & \left(\frac{i}{2}\right)\left[(a^*)^2 + (b^*)^2 - a^2 - b^2\right] & a^*b^* + ab \\ \left(\frac{1}{2i}\right)\left[(a^*)^2 + b^2 - (b^*)^2 - a^2\right] & \left(\frac{1}{2}\right)\left[(a^*)^2 + (b^*)^2 + a^2 + b^2\right] & i\,(a^*b^* - ab) \\ b^*a + a^*b & i\,(ba^* - b^*a) & |a|^2 - |b|^2 \end{array}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Debemos ahora, verificar que la matriz 3×3 obtenida anteriormente da origen realmente a rotaciones $SO\,(3)$. Para ello hagamos por ejemplo, el siguiente reemplazo:

$$\begin{aligned} a &= e^{\left(\frac{i\alpha}{2}\right)}\ ,\ b = 0 \Rightarrow && (2.13)\\ |a|^2 + |b|^2 &= 1 \end{aligned}$$

De acuerdo con (2.13) y (2.12) obtenemos inmediatamente:

$$\begin{aligned} \acute{x} &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \acute{y} &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ \acute{z} &= z && (2.14) \end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta las identidades complejas para las funciones $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$. La expresión (2.14) representa una rotación en un ángulo α, alrededor del eje z coordenado. Escrito en forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Expandiendo en serie de Taylor las funciones trigonométricas en (**??**) y teniendo en cuenta que $\sigma_z^2 = I$, se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\alpha}{2}} \end{pmatrix} = e^{\left(\frac{i\alpha}{2}\right)\sigma_z} \tag{2.15}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{iJ_z\alpha}$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$e^{\left(\frac{i\alpha}{2}\right)\sigma_z} \Longleftrightarrow e^{iJ_z\alpha}$$

De manera semejante para el caso de las rotaciones alrededor de los ejes x y y sustituímos respectivamente:

$$a = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right),\ b = i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\ (Eje\ x) \tag{2.16}$$

$$a = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right),\ b = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\ (Eje\ y) \tag{2.17}$$

Con lo cual obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Lo cual igualmente se puede escribir como:

$$e^{\left(\frac{i\beta}{2}\right)\sigma_x} \Longleftrightarrow e^{iJ_x\beta} \tag{2.20}$$

$$e^{\left(\frac{i\gamma}{2}\right)\sigma_y} \Longleftrightarrow e^{iJ_y\gamma} \tag{2.21}$$

Despues de expandir en serie de Taylor (2.18) y (2.19) y teniendo en cuenta que $\sigma_i^2 = I$. Observando (**??**), (2.20) y (2.21), llegamos a la conclusión de que existe una relación entre las rotaciones $SO(3)$ y las respectivas transformaciones $SU(2)$ para ángulos medios. Es decir para cada rotación $SO(3)$ en un ángulo θ, existen dos posibles transformaciones $SU(2)$ correspondientes a θ y $\theta + 2\pi$. En general para el caso de rotaciones alrededor de un eje arbitrario en la dirección del vector unitario $\hat{n}$ podemos escribir:

$$e^{\left(\frac{i\theta}{2}\right)\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \Longleftrightarrow e^{i\theta\vec{J}\cdot\hat{n}}$$

Relación entre Espinores y Vectores Hemos visto anteriormente que el operador $\vec{\sigma}\cdot\vec{r}$ juega un papel importante en la identificación entre las transformaciones $SU(2)$ y las rotaciones $SO(3)$. De hecho podemos de manera semejante, relacionar las componentes espinoriales con las componentes vectoriales teniendo en cuenta las propiedades de transformación de $\vec{\sigma}\cdot\vec{r}$.

De acuerdo con la forma explícita de este operador, dada por:

$$H=\vec{\sigma}\cdot\vec{r}=\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

se deduce inmediatamente que H es un operador hermítico y de traza nula. De manera independiente podemos construír, a partir de un producto tensorial de espinores, una representación equivalente para H. Tal producto está dado por:

$$G=\xi\otimes\xi^{\dagger}=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1\xi_2^* \\ \xi_2\xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix}$$

Dado que ξ y $\xi^{\dagger}$ son transformados por U de la siguiente manera:

$$\acute{\xi}=U\xi\ ,\ \acute{\xi}^{\dagger}=\xi^{\dagger}U^{\dagger} \tag{2.23}$$

Se deduce inmediatamente que G se transforma como:

$$\acute{G}=\acute{\xi}\otimes\acute{\xi}^{\dagger}=U\xi\otimes\xi^{\dagger}U^{\dagger}=UGU^{\dagger} \tag{2.24}$$

Es decir, de igual manera que H. Con el objeto de eliminar de (**??**) las componentes conjugadas, podemos destacar que el espinor $(-\xi_2\ \xi_1)$ se transforma de igual manera que $\xi^{\dagger}$. Es decir:

$$\begin{aligned}
\acute{\xi}_1 &= a\xi_1+b\xi_2\ ,\ -\acute{\xi}_2=-b^*\xi_1+a^*\xi_2\Rightarrow \\
\begin{pmatrix} -\acute{\xi}_2 & \acute{\xi}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}U^{\dagger}\Rightarrow \\
\begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Donde hemos utilizado la forma explícita de U dada por (2.6). De esta manera el producto tensorial (**??**) toma la forma:

$$G=\begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_2\xi_1 \end{pmatrix}$$

De (**??**) y (**??**) se deduce que G es hermítica y de traza nula, lo cual sugiere que G puede ser equivalente a H. Comparando (**??**) con (2.22) obtenemos:

$$z=-\xi_1\xi_2\ ,\ x=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\ ,\ y=\left(\frac{i}{2}\right)\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) \tag{2.26}$$

Es decir las relaciones buscadas.

2.0.2 $SL(2C)$ y el Grupo de Lorentz

Dado que hemos demostrado que se puede obtener una representación de las rotaciones en el espacio por medio del grupo $SU(2)$, podemos igualmente indagar por alguna representación de grupo, donde se incluyan los boosts de Lorentz. Una de estas transformaciones realizada en la dirección x se escribe convencionalmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \gamma\left(\acute{x}-v\acute{t}\right)\ ,\ \acute{y}=y\ ,\ \acute{z}=z\ ,\ t=\gamma\left(\acute{t}-\frac{v\acute{x}}{c^2}\right) && (2.27)\\ \acute{x} &= \gamma\left(x+vt\right)\ ,\ \acute{t}=\gamma\left(t+\frac{vx}{c^2}\right) && (2.28)\\ \beta &= \frac{v}{c}\ ,\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Dado que γ y β cumplen la relación hiperbólica dada por:

$$\gamma^2-\gamma^2\beta^2=1 \tag{2.29}$$

Podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \cosh^2\phi\ ,\ \gamma^2\beta^2=\sinh^2\phi\ ,\ \tanh\phi=\frac{v}{c}=\beta\\ x^0 &= ct\ ,\ x^1=x\ ,\ x^2=y\ ,\ x^3=z && (2.30) \end{aligned}$$

Las transformaciones 2.28 quedan

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c^2 & 0 & 0\\ \gamma v & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \acute{x}^0\\ \acute{x}^1\\ \acute{x}^2\\ \acute{x}^3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

usando unidades naturales $c=1$ y $\gamma v/c^2=\gamma v=\gamma\left(v/c\right)c=\gamma\beta c=\gamma\beta$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \acute{x}^0\\ \acute{x}^1\\ \acute{x}^2\\ \acute{x}^3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

y usando las correspondencias hiperbólicas: $\gamma=\cosh\phi$, $\gamma\beta=\cosh\phi\tanh\phi=\sinh\phi$, se expresa (2.28) en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \acute{x}^0\\ \acute{x}^1\\ \acute{x}^2\\ \acute{x}^3\end{pmatrix}\Rightarrow && (2.31)\\ B\left(\phi\right)X &= \acute{X} \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos hallar de igual manera el generador para $B\left(\phi\right)$, es decir:

$$K_x=\left(\frac{1}{i}\right)\left[\frac{dB\left(\phi\right)}{d\phi}\right]\Bigg|_{\phi=0} \tag{2.32}$$

$$K_x=-i\,\frac{d}{d\phi}\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\phi=0}=-i\begin{pmatrix} \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0\\ \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\phi=0}$$

$$K_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

De manera equivalente tenemos:

$$K_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Con lo cual podemos obtener directamente el conmutador entre generadores:

$$[K_i, K_j] = -iJ_k \ Mas \ Permutaciones \ Cíclicas$$

Esto nos indica que el álgebra entre los generadores K_i no es cerrada. Por lo tanto debemos obtener además los conmutadores con los respectivos generadores para las rotaciones. Teniendo en cuenta (2.2, 2.33, 2.34) estos conmutadores dan como resultado las siguientes expresiones:

$$[J_x, K_y] = iK_z \ Mas \ Permutaciones \ Cíclicas \ , [J_l, K_l] = 0$$

Las cuales pueden ser adicionadas al álgebra de rotaciones para constituír el álgebra de Lorentz:

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \ , \ [J_l, K_m] = i\epsilon_{lmn}K_n \ , \ [J_l, J_m] = i\epsilon_{lmn}J_n \tag{2.35}$$

Por tanto, un elemento arbitrario de este grupo se puede escribir de la forma

$$U(\widehat{n}, \theta, \widehat{m}, \phi) = e^{i\left[\left(\vec{J}\cdot\hat{n}\right)\theta + \left(\vec{K}\cdot\hat{m}\right)\phi\right]}$$

Nuestro objetivo ahora consiste en encontrar alguna representación espinorial para el álgebra (2.35). Para ello proponemos el siguiente Ansatz para K_j [1]:

$$K_j = \pm\left(\frac{i}{2}\right)\sigma_j \tag{2.36}$$

Con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} [K_n, K_m] &= \left[\pm\left(\frac{i\sigma_n}{2}\right), \pm\left(\frac{i\sigma_m}{2}\right)\right] = -i\left[\frac{\sigma_n}{2}, \frac{\sigma_m}{2}\right] = -i\epsilon_{nmk}\left(\frac{\sigma_k}{2}\right) \iff -i\epsilon_{ijk}J_k \\ [J_n, K_n] &= \left[\frac{\sigma_n}{2}, \pm\left(\frac{i\sigma_m}{2}\right)\right] = \pm i\left[\frac{\sigma_n}{2}, \frac{\sigma_m}{2}\right] = i\epsilon_{nmk}\left(\pm\frac{i\sigma_k}{2}\right) = i\epsilon_{nmk}K_k \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por lo tanto concluímos que (2.36) es un Ansatz aceptable. Tenemos entonces dos maneras posibles de representar K_j. Dado que las dos maneras conducen a la misma álgebra de Lie (2.35), se concluye que son igualmente válidas para representar de manera espinorial las transformaciones de Lorentz. La forma explícita de tales transformaciones está dada por:

$$\begin{aligned} K_m &= -i\left(\frac{\sigma_m}{2}\right) \Rightarrow \acute{\mathbf{r}} = e^{i\left[\left(\vec{J}\cdot\hat{n}\right)\theta + \left(\vec{K}\cdot\hat{m}\right)\phi\right]}\mathbf{r} \leftrightarrow \acute{\xi} = e^{i\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\cdot(\theta\hat{n} - i\hat{m}\phi)}\xi \\ K_m &= i\left(\frac{\sigma_m}{2}\right) \Rightarrow \acute{\mathbf{r}} = e^{i\left[\left(\vec{J}\cdot\hat{n}\right)\theta + \left(\vec{K}\cdot\hat{m}\right)\phi\right]}\mathbf{r} \leftrightarrow \acute{\xi} = e^{i\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\cdot(\theta\hat{n} + i\hat{m}\phi)}\xi \end{aligned} \tag{2.38}$$

De (2.38) se deduce que podemos entender los boosts de Lorentz como rotaciones espinoriales asociadas a ángulos imaginarios. Además se puede ver que estas representaciones no son equivalentes. Es decir no existe una matriz G tal que([2], [1] Cap 2 pag 38):

$$\begin{aligned} M &= GNG^{-1} \\ M &\equiv e^{i\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\cdot(\theta\hat{n} - i\hat{m}\phi)} \quad ; \quad N \equiv e^{i\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\cdot(\theta\hat{n} + i\hat{m}\phi)} \end{aligned} \tag{2.39}$$

De hecho se puede verificar que la transformación dada por (Ver Apendice A.1.1):

$$N = GM^{*}G^{-1} \ \ ; \ G \equiv -i\sigma_2 \ , \ G^{-1} = i\sigma_2 \tag{2.40}$$

Convierte un tipo de operador en el otro. De manera que la representación N es equivalente a la representación conjugada de M. Con lo cual notamos la necesidad de realizar una conjugación para transformar una representación en la otra. Debemos entonces aceptar la existencia de dos tipos diferentes de espinores asociados a representaciones espinoriales distintas de las transformaciones de Lorentz. Teniendo en cuenta lo anterior designaremos las propiedades de transformación y la notación para tales espinores de la siguiente manera:

$$\acute{\xi} = N\xi \ , \ \acute{\bar{\xi}} = M\bar{\xi} \tag{2.41}$$

Donde ξ y $\bar{\xi}$ se denominan los espinores de Weyl de dos componentes. Una propiedad fundamental de las transformaciones M y N consiste en tener determinante unidad. Notemos por ejemplo que:

$$e^{i\sigma_z\theta} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow \left| e^{i\sigma_z\theta} \right| = 1$$

De acuerdo con (2.16) y (2.17) se observa además que:

$$\left| e^{i\sigma_x\theta} \right| = 1 \ , \ \left| e^{i\sigma_y\theta} \right| = 1$$

Es decir, en general tenemos:

$$\left| e^{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\theta} \right| = 1$$

De igual manera se puede observar que:

$$\begin{aligned} \left| e^{i\vec{\sigma}\cdot(\theta\hat{n}+i\phi\hat{m})} \right| &= \left| e^{i\vec{\sigma}\cdot(\theta\hat{n}-i\phi\hat{m})} \right| = 1 \\ Es\ Decir &: \\ |N| &= |M| = 1 \end{aligned} \tag{2.42}$$

El conjunto así definido de operadores lineales 2×2 con componentes complejas y con determinante unidad, conforman un grupo no abeliano denominado grupo $SL(2, C)$.

Invariantes Espinoriales de Lorentz, Notación de Indices y Representaciones de $SL(2, C)$
Definiremos ahora dos invariantes de Lorentz utilizando los espinores de Weyl (2.41). Estos invariantes nos llevan directamente a la definición de un tensor métrico asociado al espacio de tales espinores, y como consecuencia adicional se establece de manera natural, la existencia de componentes duales asociadas a cada tipo de espinor. El invariante asociado a ξ está dado por ([5] Pag 16 y SS, [1] Cap 11 Pag 432):

$$\left(i\sigma_2\xi\right)^T \xi \tag{2.43}$$

La invarianza se verifica mediante las propiedades de transformación de ξ, dadas por (2.41):

$$\begin{aligned} \acute{\xi} &= N\xi \ , \ i\sigma\acute{\xi} = i\sigma N\xi \\ &\Rightarrow \left(i\sigma\acute{\xi}\right)^T \acute{\xi} = \left(i\sigma_2 N\xi\right)^T N\xi = \left[i\left(N^{-1}\right)^T \sigma_2\xi\right]^T N\xi \\ &= \left(i\sigma_2\xi\right)^T N^{-1}N\xi = \left(i\sigma_2\xi\right)^T \xi \end{aligned} \tag{2.44}$$

Donde hemos utilizado la forma explícita de N dada por (2.39) y además su regla de conmutación con respecto a σ_2. De igual manera definimos un invariante asociado a $\bar{\xi}$ dado por:

$$\left(-i\sigma_2\bar{\xi}\right)^T \bar{\xi} \tag{2.45}$$

Cuya invarianza se verifica de manera similar al caso anterior:

$$\begin{aligned}
\acute{\bar{\xi}} &= M\bar{\xi}\ ,\ -i\sigma_2\acute{\bar{\xi}} = -i\sigma M\xi \Rightarrow \\
\left(-i\sigma_2\acute{\bar{\xi}}\right)^T\acute{\bar{\xi}} &= \left(-i\sigma_2 M\bar{\xi}\right)^T M\bar{\xi} = \left[\left(M^{-1}\right)^T\left(-i\sigma_2\right)\bar{\xi}\right]^T M\bar{\xi} = \\
\left(-i\sigma_2\bar{\xi}\right)^T M^{-1}M\bar{\xi} &= \left(-i\sigma_2\bar{\xi}\right)^T\bar{\xi} \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Podemos reescribir los invariantes (2.43) y (2.45) como productos escalares entre los espinores de Weyl y sus duales respectivos, estableciendo el formalismo de los índices de Einstein:

$$\begin{aligned}
\xi &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\ ,\ i\sigma_2\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\xi^\alpha\xi_\alpha\ \textit{Es invariante.}\ \alpha &= 1\ ,\ 2 \\
\bar{\xi} &= \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot{1}} \\ \bar{\xi}^{\dot{2}} \end{pmatrix}\ ,\ -i\sigma_2\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{\dot{1}} \\ \bar{\xi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\ \textit{Es invariante.}\ \alpha &= \dot{1}\ ,\ \dot{2} \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Donde hemos diferenciado entre índices con punto y sin punto, para cada tipo de espinor ya que cada uno de estos índices representa una manera diferente de transformación. De acuerdo con lo anterior, podemos definir además, las componentes covariantes y contravariantes de los tensores métricos espinoriales con punto y sin punto:

$$\begin{aligned}
i\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\
-i\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las definiciones en (2.41), podemos expresar en términos de índices las transformaciones M y N de $SL\left(2,C\right)$:

$$\begin{aligned}
\acute{\xi} &= N\xi \Longleftrightarrow \acute{\xi}_\alpha = N_\alpha{}^\beta\xi_\beta \\
\acute{\bar{\xi}} &= M\bar{\xi} \Longleftrightarrow \acute{\bar{\xi}}^{\dot{\alpha}} = M^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}} \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Finalmente, para estas representaciones de $SL\left(2,C\right)$ es necesario conocer las transformaciones para los duales de los espinores con punto y sin punto, las cuales se obtienen “subiendo y bajando” índices mediante los tensores métricos (ver apéndice A.2):

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\rho\alpha}N_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma} &= \left(i\sigma_2\right)N\left(-i\sigma_2\right) = \sigma_2 N\sigma_2 = \left[\left(N^{-1}\right)^T\right]^\rho{}_\gamma \Rightarrow \\
\acute{\xi}^\gamma &= \left[\left(N^{-1}\right)^T\right]^\beta{}_\gamma\xi^\gamma \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

$$\textit{Equivalentemente} \quad :$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}M^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\rho}} &= \left[\left(M^{-1}\right)^T\right]_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\rho}} \Rightarrow \\
\acute{\bar{\xi}}_{\dot{\rho}} &= \left[\left(M^{-1}\right)^T\right]_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\rho}}\bar{\xi}_{\dot{\rho}} \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las expresiones (2.39) para M y N y las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\sigma_2\sigma_2 &= 1 \\
\sigma_2\vec{\sigma} &= -\left(\vec{\sigma}\right)^T\sigma_2 \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

Finalmente es importante destacar la equivalencia entre el complejo conjugado de un tipo de espinor y su correspondiente espinor opuesto. Este hecho se observa fácilmente teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\left(N^{-1}\right)^T &= M^* \\ \left(M^{-1}\right)^T &= N^* \end{aligned} \tag{2.53}$$

Las cuales se obtienen directamente de (2.39). Reemplazando (2.53) en (2.50) y (2.51) obtenemos:

$$\begin{aligned}\acute{\xi}^{\gamma} &= (M^*)^{\beta}{}_{\gamma}\xi^{\gamma} \\ \acute{\bar{\xi}}_{\dot{\rho}} &= (N^*)_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\rho}}\bar{\xi}_{\dot{\rho}} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Comparando (2.54) con (2.49) obtenemos la equivalencia mencionada:

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \xi^*_{\alpha}$$

Cuadrivectores y Espinores de Weyl En la sección anterior obtuvimos una relación explícita entre las componentes de vectores de $SO(3)$ y espinores de $SU(2)$. De manera similar podemos construír una generalización de la relación (2.26), para el caso de cuadrivectores y espinores de Weyl (2.41). Para ello debemos ampliar el producto $\vec{\sigma}\cdot\vec{r}$ a un producto en el espacio-tiempo, es decir:

$$K = x^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \qquad \sigma_0 = 1 \tag{2.55}$$

Debido a que las coordenadas del espacio-tiempo deben ser asumidas como números reales, resulta necesario preservar la propiedad de Hermiticidad del operador (2.55). Esto nos lleva a ampliar la regla de transformación dada por (2.9) para el caso de $\sigma_{\mu}x^{\mu}$:

$$\begin{aligned} K &= \sigma_{\mu}x^{\mu} \Rightarrow \\ \acute{K} &= NKN^{\dagger} \end{aligned} \tag{2.56}$$

Se puede ver muy facilmente que la regla de transformación (2.56) garantiza la invarianza de la hermiticidad. La expresión anterior puede ser escrita en el formalismo de índices, de la siguiente manera:

$$\acute{K} = NKN^{\dagger} \Longleftrightarrow \acute{K}_{\alpha\gamma} = N_{\alpha}{}^{\beta}K_{\beta\rho}\left(N^{\dagger}\right)^{\rho}{}_{\gamma} = N_{\alpha}{}^{\beta}\,(N)^{*}_{\gamma}{}^{\rho}\,K_{\beta\rho}$$

let us write the operator $K_{\beta\gamma}$ as a tensor product of Weyl's spinors $K_{\alpha\gamma} = \xi_{\alpha}\eta_{\gamma}$ then we have

$$\xi'_{\alpha}\eta'_{\gamma} = N_{\alpha}{}^{\beta}\,(N)^{*}_{\gamma}{}^{\rho}\,\xi_{\beta}\eta_{\rho} = \left[N_{\alpha}{}^{\beta}\xi_{\beta}\right]\left[(N)^{*}_{\gamma}{}^{\rho}\,\eta_{\rho}\right]$$

but taking into account Eqs. (2.49) and (2.54) we realize that ξ transforms as a spinor of the "first representation" while η transforms as a spinor of the "second representation" then it is convenient to modify the notation for the spinor η

$$\xi'_{\alpha}\bar{\eta}'_{\dot{\gamma}} = \left[N_{\alpha}{}^{\beta}\xi_{\beta}\right]\left[(N)^{*}_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\rho}}\,\bar{\eta}_{\dot{\rho}}\right]$$

Lo cual nos indica inmediatamente que K transforma como un producto tensorial de espinores de Weyl de tipo diferente:

$$K_{\alpha\dot{\gamma}} = \xi_{\alpha}\bar{\eta}_{\dot{\gamma}} \tag{2.57}$$

De la ecuación anterior obtenemos directamente la relación buscada entre componentes cuadrivectoriales y espinoriales:

$$\begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\bar{\eta}_{\dot{1}} & \xi_1\bar{\eta}_{\dot{2}} \\ \xi_2\bar{\eta}_{\dot{1}} & \xi_2\bar{\eta}_{\dot{2}} \end{pmatrix}$$

De lo cual se obtienen inmediatamente las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\xi_1\bar{\eta}_{\dot{1}} + \xi_2\bar{\eta}_{\dot{2}}\right) \ , \ x = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\xi_2\bar{\eta}_{\dot{1}} + \xi_1\bar{\eta}_{\dot{2}}\right) \\ y &= \left(\frac{1}{2i}\right)\left(\xi_2\bar{\eta}_{\dot{1}} - \xi_1\bar{\eta}_{\dot{2}}\right) \ , \ z = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\xi_1\bar{\eta}_{\dot{1}} - \xi_2\bar{\eta}_{\dot{2}}\right) \end{aligned} \tag{2.58}$$

The inverse relation i.e. the Eq. (2.55) can be written as

$$K_{\alpha\dot{\gamma}} = x^{\mu}\left(\sigma_{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}} \quad ; \ \sigma_{\mu} \equiv (\sigma_0, \sigma_i) \ ; \ \sigma_0 \equiv 1_{2\times 2} \tag{2.59}$$

from which the inverse relation can be constructed easily

$$\begin{aligned} K\sigma_{\nu} &= x^{\mu}\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} \Rightarrow Tr\left[K\sigma_{\nu}\right] = x^{\mu}Tr\left[\sigma_{\mu}\sigma_{\nu}\right] = 2x^{\mu}\delta_{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}Tr\left[K\sigma_{\nu}\right] = x_{\nu} \end{aligned}$$

From (2.55)we see that

$$K_{\alpha\dot{\gamma}}K^{\alpha\dot{\gamma}} = 2\left(x_0^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) = 2x_{\mu}x^{\mu}$$

On the other hand we can see the transformation of the coordinates x^{μ} (under a Lorentz transformation)by using the second rank tensor defined above

$$\begin{aligned} x'_{\mu} &= \frac{1}{2}Tr\left[K'\sigma_{\mu}\right] = \frac{1}{2}Tr\left[NKN^{\dagger}\sigma_{\mu}\right] = \frac{1}{2}Tr\left[N\left(x_{\nu}\sigma^{\nu}\right)N^{\dagger}\sigma_{\mu}\right] \\ x'_{\mu} &= \frac{1}{2}Tr\left[N\sigma^{\nu}N^{\dagger}\sigma_{\mu}\right]x_{\nu} \equiv \Lambda_{\mu}{}^{\nu}X_{\nu} \Rightarrow \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{2}Tr\left[N\sigma^{\nu}N^{\dagger}\sigma_{\mu}\right] \end{aligned}$$

And $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ defines a Lorentz transformation while $N \in SL(2C)$ defines the set of linear transformations consisting of complex matrices 2×2 of determinant 1, this group has six independent parameters. We can also see that

$$\det K = x_{\mu}x^{\mu}$$

i.e. a Lorentz invariant, and under an SL(2C)transformation

$$\det K' = \det\left(NKN^{\dagger}\right) = \left(\det N\right)^2 \det K = \det K$$

so it is also a SL(2C) invariant.

2.0.3 El Grupo de Poincaré

Con el objeto de incluír principios tan importantes como los de la conservación del momentum lineal y la energía mecánica, resulta necesario ampliar el grupo de transformaciones de Lorentz sobre los elementos del Espacio-Tiempo, incluyendo además operaciones de traslación de coordenadas. El grupo que se obtiene como resultado de esta ampliación es el denominado grupo de Poincaré. Este grupo determina todas las propiedades de invarianza y principios de conservación propios del espacio-tiempo plano de Minkowski. Además es importante anotar, que el formalismo de la Supersimetría se fundamenta sobre una generalización con operadores fermiónicos del Grupo de Poincaré, de lo cual se deduce la importancia de una breve descripción del álgebra de Lie asociada a este grupo. En esta sección realizaremos tal descripción.

SO(3,1) y El Grupo de Lorentz La forma convencional de representación del grupo de Lorentz se obtiene mediante la definición de aquellas transformaciones que mantienen invariante la forma cuadrática dada por [2]:

$$s^2 = x^\mu x_\mu = x^0 x^0 - x^i x^i = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \tag{2.60}$$

A Lorentz transformation on the coordinates is given by

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

when we insert this into the invariant, we find

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\gamma x^\rho x^\gamma = g_{\rho\gamma} x^\rho x^\gamma$$

so that the Λ matrices satisfy the relation

$$\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\gamma = g_{\rho\gamma} \Rightarrow \left(\Lambda_\rho{}^\mu\right)^T g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\gamma = g_{\rho\gamma}$$

in matricial notation

$$g = \Lambda^T g \Lambda$$

This group is called $O\,(3,1)$ (the Lorentz group) to emphasize the difference in signature between three-dimensional space coordinates and the one-dimensional time coordinate. If the invariant were $t^2 + x^i x^i$ we arrive to the $O\,(4)$ group in which the metric tensor has the same signature for all the space-time coordinates. The metric here is not positive definite and two space-time events can be connected by a lorentz transformation (time-like events $s^2 > 0$), disconnected i.e. no Lorentz trasnformation can pass from one event to the other (space-time events $s^2 < 0$) and events that can be connected by a light signal (light-like events).

Observe that the Lorentz group and the $SL\,(2C)$ one are isomorphic, but the first act on the space-time coordinates and the second on the Weyl's spinors.

A partir de la condición (2.60) se obtienen las siguientes transformaciones infinitesimales dependientes de seis parámetros [2], [5]:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \\ \omega^\mu{}_\nu &= -\omega^\nu{}_\mu \end{aligned} \tag{2.61}$$

cuyos generadores estan dados por [2], [5]:

$$L_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right) \tag{2.62}$$

A su vez, a partir de los generadores (2.62) obtenemos inmediatamente la siguiente álgebra de Lie:

$$\left[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = -i\left(g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma}\right)$$

Donde $g_{\mu\nu}$ corresponde a las componentes del tensor métrico de Minkowski con signatura negativa:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We can extend this algebra in order to include Lorentz transformations over spaces different from the space-time coordinates as is the case of trasnformations over fermionic or bosonic fields. The most general form of the generator is

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \tag{2.63}$$

Where the new operatos $S_{\mu\nu}$, should accomplish the same Lie algebra of $L_{\mu\nu}$ (**??**).for them to be a representation of $O\,(3,1)$. In quantum field theory, the operators $S_{\mu\nu}$ act either on a fermionic or bosonic field becoming a spin operator. The total operator $M_{\mu\nu}$ obeys the algebra (**??**):

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\,(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}) \tag{2.64}$$

La conexión entre el álgebra $SO\,(3,1)$ (2.64) y el álgebra de Lorentz (2.35) se verifica mediante las siguientes definiciones:

$$J_m = (\frac{1}{2})\epsilon_{mjk}M_{jk}\ ,\ \ K_m = M_{0m} \tag{2.65}$$

De tal manera que al cumplirse (2.64) se deduce por intermedio de (2.65) el cumplimiento de (2.35) y viceversa.

Ahora bien, los grupos $SO\,(4)$ y $SO\,(3)$ poseen la misma álgebra de Lie (aunque diferente métrica) y sabemos que $SO\,(4) = SU\,(2) \otimes SU\,(2)$. Tomando combinaciones lineales adecuadas de los generadores obtenemos dos álgebras desacopladas

$$J_{\pm}^{1} \equiv \frac{1}{2}\left(M^{23} \pm iM^{01}\right) \qquad \textit{and cyclic}\ (1 \to 2 \to 3 \to 1) \tag{2.66}$$

o equivalentemente

$$J_{\pm}^{i} \equiv \frac{1}{2}\left(J^{i} \pm iK^{i}\right)$$

estas transformaciones conducen a $\left[J_{\pm}^{i}, J_{\mp}^{k}\right] = 0$, y el álgebra se desacopla en dos subalgebrs de $SU(2)$, para propósitos de fabricar representaciones, podemos ver al grupo de Lorentz como producto directo de dos $SU\,(2)$. Por tanto, las representaciones irreducibles de $SU\,(2)$ que denotaremos por (j) donde $j = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$, pueden ser usadas para contruir representaciones del grupo de Lorentz, denotadas por (j, j'). De esta forma se pueden construir las representaciones espinoriales y tensoriales del grupo de Lorentz (una representación es espinorial cuando $j + j'$ es semientero).

El producto espinorial $SU\,(2) \otimes SU\,(2)$ se escribe como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

los dos espinores de dos componentes se escriben como

$$(1/2, 0) = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi \ \ ; \ \ (0, 1/2) = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi$$

y se pueden construír campos de mayor espín tomando productos tensoriales entre los espinores. Por ejemplo se pueden construír vectores como el producto de dos espinores de la forma

$$(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$$

un campo de espín 3/2 se puede construír de varias formas, la mas usual es tomar el producto tensorial de un vector por un espinor

$$(1/2, 0) \otimes (1/2, 1/2) = (1, 1/2) \oplus (0, 1/2)$$

lo cual corresponde a construír un espinor de cuatro componentes con un índice vectorial

$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} \psi_{\mu R} \\ \psi_{\mu L} \end{pmatrix}$$

de modo que el espinor 1/2 corresponde a contraer el campo de espín 3/2 con una matriz gama

$$(0,1/2) = \gamma^{\mu}\psi_{\mu}$$

el campo $(1,1/2)$ corresponde a un espinor 3/2 sin contracción con una matriz gama

$$(1,1/2) = \psi_{\mu} - (1/4)\,\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}\psi_{\nu}$$

similarmente un campo de espín 2 puede ser representado por el producto de dos vectores

$$(1/2,1/2)\otimes(1/2,1/2) = [(0,0)\oplus(1,1)]_S \oplus [(0,1)\oplus(1,0)]_A$$

donde $S\,(A)$ representa una combinación simétrica (antisimétrica). Esto se representa como la combinación simétrica o antisimétrica de un tensor de segundo rango

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}K_{(\mu\nu)} + \frac{1}{2}K_{[\mu\nu]}$$

donde los paréntesis redondos y cuadrados representan combinaciones simétricas y antisimétricas respectivamente.

Hemos visto que las representaciones irreducibles de dimension finita se clasifican en parejas (j_+, j_-). Estas representaciones a su vez están caracterizadas por los autovalores $j_{\pm}(j_{\pm}+1)$ de los dos casimires $(J_{\pm})^2$. El álgebra no corresponde exactamente a la de $SU(2)\otimes SU(2)$ ya que estos generadores no son hermíticos $(J_{\pm})^{\dagger} = J_{\mp}$. En tanto que los $J_{\pm}$ se pueden representar por matrices hermíticas finito dimensionales, los $M_{\mu\nu}$ no se pueden representar de esa forma. La representación $(1/2,0)$ por ejemplo se escribe

$$\begin{aligned}
r(J_+) &= \frac{1}{2}\sigma, \quad r(J_-) = 0 \quad \sigma \equiv \left(1,\sigma^i\right) \\
&\Rightarrow\ r\left(M^{0i}\right) \equiv \frac{1}{2}\sigma^{0i} = -\frac{1}{2}i\sigma^i, \\
r\left(M^{12}\right) &\equiv \frac{1}{2}\sigma^{12} = \frac{1}{2}\sigma^{12} = \frac{1}{2}\sigma^3 \text{ and cyclic}
\end{aligned}$$

el grupo generado por esas matrices es $SL(2,C)$. Para la representación $(0,1/2)$ tenemos

$$\begin{aligned}
r(J_+) &= 0 \ \ ; \ \ r(J_-) = \frac{1}{2}\sigma \\
&\Rightarrow\ r\left(M^{0i}\right) \equiv \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{0i} = \frac{1}{2}i\sigma^i, \\
r\left(M^{12}\right) &\equiv \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{12} = \frac{1}{2}\sigma^3 \text{ y cíclicamente}
\end{aligned}$$

por otro lado, recordando que

$$X_{\mu} \sim \xi_i\bar{\eta}_j \Rightarrow X_{\mu} \sim (1/2,0)\otimes(0,1/2) = (1/2,1/2)$$

de modo que los cuadrivectores de Lorentz deben emular esta propiedad

$$X_{\mu} \sim P_{\mu} \sim V_{\mu} \sim (1/2,1/2) \tag{2.67}$$

por otro lado, el generador $M_{\mu\nu}$ debe quedar en una de las siguientes representaciones

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu} &\sim X_{\mu}P_{\mu} \sim (1/2,1/2)\otimes(1/2,1/2) \\
&= [(0,0)\oplus(1,1)]_S \oplus [(0,1)\oplus(1,0)]_A \\
M_{\mu\nu} &\sim [(0,1)\oplus(1,0)]_A
\end{aligned} \tag{2.68}$$

donde las representaciones simétricas se han descartado en virtud de la naturaleza antisimétrica de $M_{\mu\nu}$.

Por otro lado podemos definir las transformaciones contínuas de traslación de la siguiente manera:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

donde λ^{μ} representa los cuatro parámetros independientes de la traslación. A su vez, los cuatro generadores del grupo continuo de traslaciones estan dados por [2]:

$$P_{\mu} = i\partial_{\mu} \tag{2.69}$$

Los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \ , \ [P_{\mu}, M_{\nu\rho}] = i\left(g_{\nu\mu}P_{\rho} - g_{\rho\mu}P_{\nu}\right) \tag{2.70}$$

Al unir las expresiones en (2.70) con las expresiones en (2.64) obtenemos finalmente el álgebra de Lie para el grupo de Poincaré, el cual está integrado por un conjunto de diez generadores, asociados a tres rotaciones, tres boosts y cuatro traslaciones en el espacio-tiempo. The most general Poincaré transformation is given by

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}$$

This group admits two Casimir operators

$$\begin{aligned} P_{\mu}P^{\mu} &= P^2 = m^2, \ W_{\mu}W^{\mu} = W^2 \\ W^{\mu} &\equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}M_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

the first invariant is obvious since it corresponds to the rest mass which is a relativistic invariant as well as invariant under space-time traslation. To elucidate the meaning of the second invariant we shall consider a massive particle in its rest frame: $P^{\mu} = (m, 0)$. The operator W_{μ} gives

$$W_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk0}J^{jk} = -mS_i \ \ ; \ \ W_0 = 0$$

In this case we are reproducing the casimir of $SU(2)$, i.e. S^2 which we know that provides the spin of the particle

$$W_i^2 = m^2 s\,(s+1)$$

therefore, in the rest frame of a massive particle, the W_{μ} tensor becomes a spin generator. In the rest frame the particle has $2s+1$ components for a spin$-s$ particle.

In the case of massless particles where $P^2 = 0$. We find that

$$W^2\,|p\rangle = W_{\mu}P^{\mu}\,|p\rangle = P^2\,|p\rangle = 0$$

In order to satisfy all these conditions we need W_{μ} to be proportional to P_{μ} so that

$$W_{\mu}\,|p\rangle = \lambda P_{\mu}\,|p\rangle = 0$$

where λ is called the helicity, and gives the number of independent components of a massless particle. Indeed, we can define the helicity as

$$\lambda \equiv \frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}$$

W_{μ} is a pseudovector (invariant under a parity transformation). On the other hand, parity inverts the helicity. Therefore, in a massless system we have two possible helicity states since W_{μ} could be parallel or antiparallel to P_{μ} i.e. the direction of the propagation. This possible helicities are independent of the spin of the particle as long as it is massless. We still have however the possibility that the sepctrum of W_{μ} is continous though this option seem to be discarded by nature. In the case of massive particles W_{μ} is not proportional to P_{μ} so that no helicity states can be defined.

From the discussion above we see that we can classify the irreducible representations according to the eigenvalues of the casimir operators

1. $P^2 > 0$: leads to states $|m, s\rangle$ with $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$
2. $P_\mu^2 = 0$, and discrete spectrum of W_μ : then we obtain states of helicity $|\lambda\rangle$ with $\lambda = \pm s$.
3. $P_\mu^2 = 0$, and continuos spectrum of W_μ i.e. s continuous.
4. $P_\mu^2 < 0$, tachyon solutions.

However only the first two cases has been observed in nature so far, with the additional condition $P^0 > 0$.

2.0.4 El Algebra Supersimétrica

A finales de los años sesenta se inició una busqueda de álgebras de Lie para grupos de simetrías que involucraran en una misma representación, partículas con diferente número cuántico de spin [8]. Tal busqueda finalizó con el establecimiento de los teoremas de imposibilidad de Coleman-Mandula y O'Raifeartaigh, los cuales implicaban la necesidad de incluír operadores fermiónicos dentro del conjunto de operadores del álgebra buscada. De esta manera surgieron las álgebras de Lie graduadas, entre las cuales se puede incluír el álgebra de la Supersimetría. Explicaremos ahora, de manera muy general tales teoremas de imposibilidad e introduciremos además el álgebra supersimétrica mas sencilla la cual incluye como operadores supersimétricos un espinore de Weyl y su complejo conjugado los cuales actuan sobre funciones en una variable de Grassmann compleja y su respectivo conjugado.

Chapter 3

El álgebra supersimétrica

3.1 El teorema de Coleman-Mandula

Coleman y Mandula encontraron que cualquier grupo de simetrías bosónicas (grupos de Lie) de la matriz S, en teoría de campos relativista es el producto directo del grupo de Poincaré con una simetría interna del grupo. Adicionalmente, esta simetría interna debe ser el producto directo de un grupo compacto semisimple con factores U(1). Los generadores bosónicos son entonces los 10 generadores del grupo de Poincaré, mas los generadores del grupo interno

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \ , \ [P_\mu, M_{\nu\rho}] = i\left(g_{\nu\mu} P_\rho - g_{\rho\mu} P_\nu\right) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma}\right) \\
[B_r, B_s] &= i c_{rs}^{t} B_t
\end{aligned}
$$

La estructura de producto interno implica que los generadores de la simetría interna deben conmutar con los generadores del grupo de Poincaré

$$
[B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\rho\sigma}] = 0 \tag{3.1}
$$

de modo que los generadores B_r deben ser escalares de Lorentz invariantes ante traslaciones. Los operadores de Casimir del grupo de Poincaré son: el operador masa al cuadrado $P_\mu P^\mu$, y el operador de espín generalizado $W^2 = W_\mu W^\mu$, donde W^μ es el vector de Pauli-Lubanski

$$
W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}
$$

en el sistema de referencia propio de un estado masivo los generadores que generan los casimires se escriben como

$$
P_\mu = (m, 0, 0, 0) \quad ; \quad W^2 = -m^2 \mathbf{L}^2 \quad ; \quad \mathbf{L} \equiv (M_{23}, M_{31}, M_{12})
$$

por definición, estos casimires conmutan con los generadores de Poincaré, y en virtud de 3.1, también conmutan con los generadores de la simetría interna, por tanto

$$
\left[B_r, P^2\right] = \left[B_r, W^2\right] = 0
$$

la primera ecuación nos dice que todos los miembros de un multiplete irreducible de un grupo de simetrías internas, deben tener la misma masa (Teorema de O'Raifeartaigh). La segunda ecuación indica que deben tener el mismo espín.

En el caso de estados sin masa con helicidades discretas tenemos que $W_\mu = \lambda P_\mu$, siendo λ semi-entero, y los casimires son idénticamente cero. Los multipletes aún deben tener el mismo espín.

Es necesario tener en cuenta que el teorema de Coleman Mandula no es en general válido para teorías con rompimiento espontáneo de simetría, puesto que está basado en la hipótesis de que el vacío es único. Adicionalmente, el teorema es válido solo para generadores bosónicos (Grupos de Lie). Por tanto, es de esperarse que el teorema se pueda evadir con la introducción de operadores fermiónicos.

3.2 Álgebras graduadas

3.2.1 Operadores de simetría

Podemos definir un operador en el espacio de Hilbert que transforma estados iniciales o finales de múltiples partículas. Estos operadores deben contener un operador de aniquilación que destruye una partícula en el estado inicial, y uno de construcción que crea una partícula en el nuevo estado. La nueva partícula puede en general poseer un tri-momento diferente. Para cada estado que va a cambiar debe haber un par de estos operadores. Claramente, la forma más general de estos operadores es

$$G = \sum_{ij} \int d^3p\; d^3q\; a_i^\dagger (\mathbf{p})\, K_{ij} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\, a_j (\mathbf{q}) \tag{3.2}$$

Donde la información sobre la probabilidad de la transición está contenida en el kernel $K_{ij} (\mathbf{p}, \mathbf{q})$. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ denotan momento y posición en tanto que i, j denotan otras propiedades (usualmente números cuánticos). La convolución que define a G se sintetizará con la siguiente notación

$$G = a^\dagger * K * a$$

este operador es el generador de una simetría si conmuta con la matriz S i.e. deja invariante la Física

$$SG |\Psi\rangle = GS |\Psi\rangle \Rightarrow [S, G] = 0$$

asumiremos el operador G mas general en el cual por ejemplo podemos aniquilar un bosón y crear un fermión. De modo que i, j corren sobre todos los números cuánticos y en particular sobre el espín. Por lo tanto, deben existir kernels que cambien bosones por bosones, fermiones por fermiones, fermiones por bosones, y bosones por fermiones. Esto nos indica que podemos descomponer G en un operador "par" B y otro operador "impar" F de forma que

$$G = B + F$$

donde B contiene términos que reemplazan fermiones por fermiones y bosones por bosones, en tanto que F contiene términos que intercambian las identidades estadísticas de las partículas. Podemos hacer una descomposición extra de la forma

$$B = b^\dagger * K_{bb} * b + f^\dagger * K_{ff} * f \quad ; \quad F = f^\dagger * K_{fb} * b + b^\dagger * K_{bf} * f$$

donde f y b son operadores de aniquilación para fermiones y bosones. B solo cambia el espín en cantidades enteras $0, 1, \ldots$ en tanto que f cambia el espín en catidades semienteras $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

Dado que trabajaremos en el marco de la teoría cuántica de campos, asumiremos las reglas usuales de cuantización para los operadores creación y aniquilación

$$\begin{aligned}
\left[b_i (\mathbf{p}), b_j^\dagger (\mathbf{q})\right] &= \delta_{ij}\delta^3 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad ; \quad [b_i (\mathbf{p}), b_j (\mathbf{q})] = \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}), b_j^\dagger (\mathbf{q})\right] = 0 \\
\left\{f_i (\mathbf{p}), f_j^\dagger (\mathbf{q})\right\} &= \delta_{ij}\delta^3 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad ; \quad \{f_i (\mathbf{p}), f_j (\mathbf{q})\} = \left\{f_i^\dagger (\mathbf{p}), f_j^\dagger (\mathbf{q})\right\} = 0 \\
[b_i (\mathbf{p}), f_j (\mathbf{q})] &= \left[b_i (\mathbf{p}), f_j^\dagger (\mathbf{q})\right] = \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}), f_j (\mathbf{q})\right] = \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}), f_j^\dagger (\mathbf{q})\right] = 0
\end{aligned}$$

usaremos una notación abreviada para estas relaciones a través del "conmutador graduado" $[\ldots, \ldots\}$ el cual se define por

$$[\ldots, \ldots\} = \begin{cases} \{\ldots, \ldots\} & \text{si ambos operadores son fermiónicos} \\ [\ldots, \ldots] & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

sintetizando también la notación $\delta_{ij}\delta^2 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \mathbb{I}$ donde $\mathbb{I}$ denota la indentidad en el espacio de los momentos y de los números cuánticos. El álgebra arriba mencionada se reduce a

$$\left[a, a^\dagger\right\} = \mathbb{I} \quad , \quad [a, a\} = \left[a^\dagger, a^\dagger\right\} = 0$$

3.2.2 Álgebra de generadores

Podemos tratar de construír un nuevo generador de simetría G^3 a partir de dos operadores de simetría G^1 y G^2. Recordemos que para que G^3 sea operador de simetría debe cumplir dos condiciones 1) Que conmute con la matriz S y 2) Que sea una forma bilineal en los operadores de creación y destrucción de acuerdo con la Ec. (3.2). Puesto que G^1 y G^2 conmutan con la matriz S entonces su producto también conmuta con S. Sin embargo, el producto de estos operadores es una forma cuadrilineal y no bilineal en los operadores de creación y destrucción. Podemos ver no obstante, que las reglas de cuantización convierten formas cuadrilineales en formas bilineales de estos operadores; esto sugiere ensayar con $\left[G^1, G^2\right]$ como regla de combinación para generar otro operador de simetría.

Comenzaremos con generadores de tipo bosónico B^1, B^2. Usaremos las reglas de quantización (QR) y las identidades

$$[ab, c] = a\,[b, c] + [a, c]\,b = a\,\{b, c\} - \{a, b\}\,c \tag{3.3}$$

Un generador bosónico se escribe como

$$\begin{aligned} B^1 &= b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j(\mathbf{q}) + f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j(\mathbf{q}) \\ B^2 &= b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bb,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s}) + f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{ff,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

y el conmutador es

$$\begin{aligned} \left[B^1, B^2\right] &= \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * b_j + f_i^\dagger * K^1_{ff,ij} * f_j \ ,\ b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * b_l + f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] \\ &= \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * b_j \ ,\ b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * b_l\right] + \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * b_j \ ,\ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] \\ &\quad + \left[f_i^\dagger * K^1_{ff,ij} * f_j \ ,\ b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * b_l\right] + \left[f_i^\dagger * K^1_{ff,ij} * f_j \ ,\ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] \\ &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Estos factores se calculan en el apéndice (B.1), ecuaciones (B.1)-(B.3) y se obtiene

$$\begin{aligned} \left[B^1, B^2\right] &= b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s}) - b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bb,ki}(\mathbf{r},\mathbf{p})\, K^1_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j(\mathbf{q}) \\ &\quad + f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{ff,ki}(\mathbf{r},\mathbf{p})\, K^1_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j(\mathbf{q}) + f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

podemos intercambiar los símbolos $i, j, k, l, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ apropiadamente teniendo en cuenta que todos ellos son mudos

$$\begin{aligned} \left[B^1, B^2\right] &= b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s}) - b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^2_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^1_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s}) \\ &\quad + f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^2_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^1_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) + f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} \left[B^1, B^2\right] &= b_i^\dagger(\mathbf{p}) * \left[K^1_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) - K^2_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^1_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s})\right] * b_l(\mathbf{s}) \\ &\quad + f_i^\dagger(\mathbf{p}) * \left[K^2_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^1_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) + K^1_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s})\right] * f_l(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

definiendo

$$\begin{aligned} K^3_{bb,il}(\mathbf{p},\mathbf{s}) &\equiv K^1_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) - K^2_{bb,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^1_{bb,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) \\ K^3_{ff,il}(\mathbf{p},\mathbf{s}) &\equiv K^2_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^1_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) + K^1_{ff,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, K^2_{ff,jl}(\mathbf{q},\mathbf{s}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

vemos que

$$\left[B^1, B^2\right] = b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^3_{bb,il}(\mathbf{p},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s}) + f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^3_{ff,il}(\mathbf{p},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})$$

este es claramente un operador de simetría que cambia bosones por bosones y fermiones por fermiones de modo que

$$\left[B^1, B^2\right] = B^3$$

donde los kernels están definidos en las Ecs. (3.5). Vemos que las QR han eliminado dos de los cuatro operadores de creación y aniquilación, obteniendo una forma bilineal que se ajusta a la forma del operador de simetría dada en la Ec. (3.2). Análogamente, vemos que

$$\left[F^1, B^2\right] = F^3$$

donde el kernel se define por

$$K_{fb}^3 \equiv K_{fb}^1 * K_{bb}^2 - K_{ff}^2 * K_{fb}^1 \ ; \ K_{bf}^3 \equiv K_{bf}^1 * K_{ff}^2 - K_{bb}^2 * K_{bf}^1$$

El siguiente paso natural es evaluar el conmutador de dos operadores impares (operadores fermiónicos). El resultado neto es que no podemos escribir el conmutador $\left[F^1, F^2\right]$ en términos de operadores de simetría (ver apéndice B.1.1). De nuevo, las QR nos sugieren intentar con el anticonmutador, para lo cual usaremos las propiedades

$$\begin{aligned}
\{ab, c\} &= a\{b, c\} - [a, c]\, b = a\,[b, c] + \{a, c\}\, b \\
\{a, bc\} &= \{a, b\}\, c - b\,[a, c] = [a, b]\, c + b\,\{a, c\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

además de las propiedades definidas en (3.3). El resultado neto es que el anticonmutador de dos operadores fermiónicos es un operador bosónico (apéndice B.1.2)

$$\left\{F^1, F^2\right\} = B^3$$

donde

$$\begin{aligned}
K_{ff,il}^3(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= K_{fb,ij}^1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) * K_{bf,jl}^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_{fb,ij}^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) * K_{bf,jl}^1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
K_{bb,il}^3(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= K_{bf,ij}^1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) * K_{fb,jl}^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - K_{bf,ij}^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) * K_{fb,jl}^1(\mathbf{p}, \mathbf{q})
\end{aligned}$$

hay un desacuerdo con la ecuación del report de Sohnius (Eq. 2.10b en el report), que es el signo menos en el kernel $K_{bb,il}^3(\mathbf{r}, \mathbf{q})$.

3.2.3 Estructura de las álgebras graduadas

Hemos visto que los operadores fermiónicos y bosónicos forman un álgebra cerrada definida por

$$\left[B^a, B^b\right] = B^c \ ; \ \left[F^1, B^1\right] = F^2 \ ; \ \left\{F^k, F^m\right\} = B^c$$

Si definimos una base de generadores bosónicos $\{B_i\}$ y de generadores fermiónicos $\{F_\alpha\}$. El álgebra mas general que se puede construír está determinada por

$$[B_i, B_j] = ic_{ij}^k B_k \ ; \ [F_\alpha, B_i] = s_{\alpha i}^\beta F_\beta \ ; \ \{F_\alpha, F_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^i B_i$$

donde los coeficientes (constantes de estructura), determinan la estructura del álgebra y del grupo que se induce. Hay dos propiedades de simetría obvias

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad ; \quad \gamma_{\alpha\beta}^i = \gamma_{\beta\alpha}^i$$

continuando la analogía con las álgebras de Lie, las constantes de estructura deben cumplir propiedades asociadas a las identidades de Jacobi graduadas

$$\left[\left[G^1, G^2\right\}, G^3\right\} + ciclo\ graduado = 0$$

donde el ciclo graduado se define de tal manera que coincide con la estructura cíclica normal, excepto que se debe colocar un signo menos cuando se intercambian dos operadores fermiónicos.

Desarrollemos las identidades de Jacobi graduadas para operadores bosónicos y fermiónicos.

1) En el caso de tres operadores fermiónicos la identidad de Jacobi graduada se convierte en la identidad de Jacobi tradicional

$$[[B_i, B_j\}, B_k\} + ciclo\ graduado = [[B_i, B_j], B_k] + [[B_k, B_i], B_j] + [[B_j, B_k], B_i] = 0$$

2) Veamos el caso de un operador fermiónico y dos operadores bosonicos

$$[[F_\alpha, B_i\}, B_j\} + g.c. = [[F_\alpha, B_i], B_j\} + g.c. = [[F_\alpha, B_i], B_j] + g.c. \Rightarrow$$

$$[[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_j, F_\alpha], B_i] + [[B_i, B_j], F_\alpha] = 0$$

3) En el caso de dos operadores fermiónicos y un operador bosónico, debemos usar con cuidado la definición de conmutador garaduado y de ciclo graduado

$$[[F_\alpha, F_\beta\}, B_i\} + g.c. = [[F_\alpha, F_\beta\}, B_i\} + [[B_i, F_\alpha\}, F_\beta\} - [[F_\beta, B_i\}, F_\alpha\}$$

el signo menos en el tercer término se debe al intercambio de los dos operadores fermiónicos

$$\begin{aligned} [[F_\alpha, F_\beta\}, B_i\} + g.c. &= [\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i\} + [[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - [[F_\beta, B_i], F_\alpha\} \\ &= [\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\} \end{aligned}$$

4) Finalmente, el caso de tres operadores fermiónicos

$$[[F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma\} + g.c. = [[F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma\} + [[F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta\} + [[F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha\}$$

obsérvese que en este caso ningún término tiene signo menos, dado que en los dos términos siguientes la operación cíclica hace dos intercambios

$$\begin{aligned} [[F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma\} + g.c. &= [\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma\} + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta\} + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha\} \\ &= [\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma] + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta] + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha] \end{aligned}$$

por tanto, el conjunto de identidades de Jacobi graduadas viene dado por

$$\begin{aligned} [[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_j, F_\alpha], B_i] + [[B_i, B_j], F_\alpha] &= 0 \\ [[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_j, F_\alpha], B_i] + [[B_i, B_j], F_\alpha] &= 0 \\ [\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\} &= 0 \\ [\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma] + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta] + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha] &= 0 \end{aligned}$$

puede verificarse explícitamente que cada uno de estos términos se anula (ver apéndice ???).

Ahora usamos el álgebra de Lie graduada

$$[B_i, B_j] = ic_{ij}^k B_k\ ;\ [F_\alpha, B_i] = s_{\alpha i}^\beta F_\beta\ ;\ [B_i, F_\alpha] = s_{i\alpha}^\beta F_\beta\ ; \{F_\alpha, F_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^i B_i \tag{3.7}$$

es muy importante asociar las letras latinas con los operadores bosónicos y las letras griegas con los operadores fermiónicos. Esto es particularmente importante para las constantes de estructura que mezclan los dos tipos de índices $s_{\alpha i}^{\beta}$ y $s_{i\alpha}^{\beta}$, no podemos denotar simplemente s_{12}^{β} puesto que es necesario saber qué índice corresponde a cada tipo de operador. $s_{1_B 2_F}^{\beta}$ es diferente a $s_{1_F 2_B}^{\beta}$. Por otro lado es obvio que

$$c_{ij}^{k} = -c_{ji}^{k} \ ; \ \gamma_{\alpha\beta}^{i} = \gamma_{\beta\alpha}^{i} \tag{3.8}$$

Usaremos las Ecs. (B.5-B.8) y (3.7) para obtener las restricciones sobre las constantes de estructura

$$\begin{aligned}
[[B_i, B_j], B_k] + [[B_k, B_i], B_j] + [[B_j, B_k], B_i] &= 0 \Rightarrow \\
\left[ic_{ij}^{m} B_m, B_k\right] + [ic_{ki}^{m} B_m, B_j] + \left[ic_{jk}^{m} B_m, B_i\right] &= 0 \Rightarrow \\
ic_{ij}^{m} [B_m, B_k] + ic_{ki}^{m} [B_m, B_j] + ic_{jk}^{m} [B_m, B_i] &= 0 \Rightarrow \\
-c_{ij}^{m} c_{mk}^{n} B_n - c_{ki}^{m} c_{mj}^{n} B_n - c_{jk}^{m} c_{mi}^{n} B_n &= 0 \Rightarrow \\
\left(c_{ij}^{m} c_{mk}^{n} + c_{ki}^{m} c_{mj}^{n} + c_{jk}^{m} c_{mi}^{n}\right) B_n &= 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

A partir de la Ec. (B.6)

$$[[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_j, F_\alpha], B_i] + [[B_i, B_j], F_\alpha] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[s_{\alpha i}^{\beta} F_\beta, B_j\right] + \left[-s_{\alpha j}^{\beta} F_\beta, B_i\right] + \left[ic_{ij}^{k} B_k, F_\alpha\right] &= 0 \Rightarrow \\
s_{\alpha i}^{\beta} [F_\beta, B_j] - s_{\alpha j}^{\beta} [F_\beta, B_i] + ic_{ij}^{k} [B_k, F_\alpha] &= 0 \Rightarrow \\
s_{\alpha i}^{\beta} s_{\beta j}^{\gamma} F_\gamma - s_{\alpha j}^{\beta} s_{\beta i}^{\gamma} F_\gamma - ic_{ij}^{k} s_{\alpha k}^{\gamma} F_\gamma &= 0 \Rightarrow \\
\left(s_{\alpha i}^{\beta} s_{\beta j}^{\gamma} - s_{\alpha j}^{\beta} s_{\beta i}^{\gamma} - ic_{ij}^{k} s_{\alpha k}^{\gamma}\right) F_\gamma &= 0
\end{aligned}$$

de la Ec. (B.7) encontramos

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[\gamma_{\alpha\beta}^{k} B_k, B_i\right] + \left\{-s_{\alpha i}^{\lambda} F_\lambda, F_\beta\right\} - \left\{s_{\beta i}^{\lambda} F_\lambda, F_\alpha\right\} &= 0 \Rightarrow \\
i\gamma_{\alpha\beta}^{k} c_{ki}^{n} B_n - s_{\alpha i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta}^{n} B_n - s_{\beta i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}^{n} B_n &= 0 \Rightarrow \\
\left(i\gamma_{\alpha\beta}^{k} c_{ki}^{n} - s_{\alpha i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta}^{n} - s_{\beta i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}^{n}\right) B_n &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, de la Ec. (B.8)

$$\begin{aligned}
[\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma] + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta] + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha] &= 0 \Rightarrow \\
\left[\gamma_{\alpha\beta}^{k} B_k, F_\gamma\right] + \left[\gamma_{\gamma\alpha}^{k} B_k, F_\beta\right] + \left[\gamma_{\beta\gamma}^{k} B_k, F_\alpha\right] &= 0 \Rightarrow \\
-\gamma_{\alpha\beta}^{k} s_{\gamma k}^{\delta} F_\delta - \gamma_{\gamma\alpha}^{k} s_{\beta k}^{\delta} F_\delta - \gamma_{\beta\gamma}^{k} s_{\alpha k}^{\delta} F_\delta &= 0 \Rightarrow \\
\left(\gamma_{\alpha\beta}^{k} s_{\gamma k}^{\delta} + \gamma_{\gamma\alpha}^{k} s_{\beta k}^{\delta} + \gamma_{\beta\gamma}^{k} s_{\alpha k}^{\delta}\right) F_\delta &= 0
\end{aligned}$$

En resumen, las condiciones sobre las constantes de estructura (en una notación más sugestiva) son

$$\begin{aligned}
\left(c_{ij}{}^{m} c_{mk}{}^{n} + c_{ki}{}^{m} c_{mj}{}^{n} + c_{jk}{}^{m} c_{mi}{}^{n}\right) B_n &= 0 \\
\left(s_{\alpha i}{}^{\beta} s_{\beta j}{}^{\gamma} - s_{\alpha j}{}^{\beta} s_{\beta i}{}^{\gamma} - ic_{ij}{}^{k} s_{\alpha k}{}^{\gamma}\right) F_\gamma &= 0 \\
\left(i\gamma_{\alpha\beta}{}^{k} c_{ki}{}^{n} - s_{\alpha i}{}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta}{}^{n} - s_{\beta i}{}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}{}^{n}\right) B_n &= 0 \\
\left(\gamma_{\alpha\beta}{}^{k} s_{\gamma k}{}^{\delta} + \gamma_{\gamma\alpha}{}^{k} s_{\beta k}{}^{\delta} + \gamma_{\beta\gamma}{}^{k} s_{\alpha k}{}^{\delta}\right) F_\delta &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

definiremos cuatro tipos de matrices $C_i,\ S_i,\ \Sigma_\alpha,\ \Gamma_\alpha$ con elementos matriciales

$$(C_i)_j{}^k = ic_{ji}{}^k \;\; ; \;\; (S_i)_\alpha{}^\beta = s_{\alpha i}{}^\beta \;\; ; \;\; (\Sigma_\alpha)_i{}^\beta = s_{i\alpha}{}^\beta \;\; ; \;\; (\Gamma_\alpha)_\beta{}^i = \gamma_{\beta\alpha}{}^i \tag{3.10}$$

de modo que las Ecs. (3.9) se convierten en

$$\begin{aligned}
\left[-(C_i)_j{}^m (C_k)_m{}^n + (C_i)_k{}^m (C_j)_m{}^n + (C_k)_j{}^m (C_i)_m{}^n\right] B_n &= 0 \\
\left[(S_i)_\alpha{}^\beta (S_j)_\beta{}^\gamma - (S_j)_\alpha{}^\beta (S_i)_\beta{}^\gamma - (C_j)_i{}^k (S_k)_\alpha{}^\gamma\right] F_\gamma &= 0 \\
\left[(\Gamma_\beta)_\alpha{}^k (C_i)_k{}^n - (S_i)_\alpha{}^\lambda (\Gamma_\beta)_\lambda{}^n - (S_i)_\beta{}^\lambda (\Gamma_\alpha)_\lambda{}^n\right] B_n &= 0 \\
\left[(\Gamma_\beta)_\alpha{}^k (S_k)_\gamma{}^\delta + (\Gamma_\alpha)_\gamma{}^k (S_k)_\beta{}^\delta + (\Gamma_\gamma)_\beta{}^k (S_k)_\alpha{}^\delta\right] F_\delta &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

También se pueden expresar las identidades de jacobi graduadas en términos de las cuatro matrices de la Ec. (3.10), puesto que en las últimas expresiones no usamos la matriz Σ_α. La primera identidad permanece intacta, y a partir de la Ec. (B.6)

$$[[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_j, F_\alpha], B_i] + [[B_i, B_j], F_\alpha] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[s_{\alpha i}^{\beta} F_\beta, B_j\right] + \left[s_{j\alpha}^{\beta} F_\beta, B_i\right] + \left[ic_{ij}^{k} B_k, F_\alpha\right] &= 0 \Rightarrow \\
-s_{\alpha i}^{\beta}[B_j, F_\beta] + s_{j\alpha}^{\beta}[F_\beta, B_i] + ic_{ij}^{k}[B_k, F_\alpha] &= 0 \Rightarrow \\
-s_{\alpha i}^{\beta} s_{j\beta}^{\gamma} F_\gamma + s_{j\alpha}^{\beta} s_{\beta i}^{\gamma} F_\gamma + ic_{ij}^{k} s_{k\alpha}^{\gamma} F_\gamma &= 0 \Rightarrow \\
\left(-s_{\alpha i}^{\beta} s_{j\beta}^{\gamma} + s_{j\alpha}^{\beta} s_{\beta i}^{\gamma} - ic_{ji}^{k} s_{k\alpha}^{\gamma}\right) F_\gamma &= 0
\end{aligned}$$

De la Ec. (B.7) encontramos

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[\gamma_{\alpha\beta}^{k} B_k, B_i\right] + \left\{-s_{\alpha i}^{\lambda} F_\lambda, F_\beta\right\} - \left\{s_{\beta i}^{\lambda} F_\lambda, F_\alpha\right\} &= 0 \Rightarrow \\
i\gamma_{\alpha\beta}^{k} c_{ki}^{n} B_n - s_{\alpha i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta}^{n} B_n - s_{\beta i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}^{n} B_n &= 0 \Rightarrow \\
\left(i\gamma_{\alpha\beta}^{k} c_{ki}^{n} - s_{\alpha i}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta}^{n} - s_{\beta i}^{\lambda} \gamma_{\alpha\lambda}^{n}\right) B_n &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de la Ec. (B.8)

$$\begin{aligned}
[\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma] + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta] + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha] &= 0 \Rightarrow \\
\left[\gamma_{\alpha\beta}^{k} B_k, F_\gamma\right] + \left[\gamma_{\gamma\alpha}^{k} B_k, F_\beta\right] + \left[\gamma_{\beta\gamma}^{k} B_k, F_\alpha\right] &= 0 \Rightarrow \\
\gamma_{\alpha\beta}^{k} s_{k\gamma}^{\delta} F_\delta + \gamma_{\gamma\alpha}^{k} s_{k\beta}^{\delta} F_\delta - \gamma_{\beta\gamma}^{k} s_{\alpha k}^{\delta} F_\delta &= 0 \Rightarrow \\
\left(\gamma_{\alpha\beta}^{k} s_{k\gamma}^{\delta} + \gamma_{\gamma\alpha}^{k} s_{k\beta}^{\delta} - \gamma_{\beta\gamma}^{k} s_{\alpha k}^{\delta}\right) F_\delta &= 0
\end{aligned}$$

Resumiendo, las condiciones sobre las constantes de estructura se escriben como

$$\begin{aligned}
\left(c_{ij}{}^m c_{mk}{}^n + c_{ki}{}^m c_{mj}{}^n + c_{jk}{}^m c_{mi}{}^n\right) B_n &= 0 \\
\left(-s_{\alpha i}{}^\beta s_{j\beta}{}^\gamma + s_{j\alpha}{}^\beta s_{\beta i}{}^\gamma - ic_{ji}{}^k s_{k\alpha}{}^\gamma\right) F_\gamma &= 0 \\
\left(i\gamma_{\alpha\beta}{}^k c_{ki}{}^n - s_{\alpha i}{}^\lambda \gamma_{\lambda\beta}{}^n - s_{\beta i}{}^\lambda \gamma_{\alpha\lambda}{}^n\right) B_n &= 0 \\
\left(\gamma_{\alpha\beta}{}^k s_{k\gamma}{}^\delta + \gamma_{\gamma\alpha}{}^k s_{k\beta}{}^\delta - \gamma_{\beta\gamma}{}^k s_{\alpha k}{}^\delta\right) F_\delta &= 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

de modo que las Ecs. (3.12) se reescriben así:

$$\begin{aligned}
\left[-\left(C_i\right)_j{}^m\left(C_k\right)_m{}^n+\left(C_i\right)_k{}^m\left(C_j\right)_m{}^n+\left(C_k\right)_j{}^m\left(C_i\right)_m{}^n\right]B_n &= 0\\
\left[-\left(S_i\right)_\alpha{}^\beta\left(\Sigma_\beta\right)_j{}^\gamma+\left(\Sigma_\alpha\right)_j{}^\beta\left(S_i\right)_\beta{}^\gamma-\left(C_i\right)_j{}^k\left(\Sigma_\alpha\right)_k{}^\gamma\right]F_\gamma &= 0\\
\left[\left(\Gamma_\beta\right)_\alpha{}^k\left(C_i\right)_k{}^n-\left(S_i\right)_\alpha{}^\lambda\left(\Gamma_\beta\right)_\lambda{}^n-\left(S_i\right)_\beta{}^\lambda\left(\Gamma_\lambda\right)_\alpha{}^n\right]B_n &= 0\\
\left[\left(\Gamma_\beta\right)_\alpha{}^k\left(\Sigma_\gamma\right)_k{}^\delta+\left(\Gamma_\alpha\right)_\gamma{}^k\left(\Sigma_\beta\right)_k{}^\delta-\left(\Gamma_\gamma\right)_\beta{}^k\left(S_k\right)_\alpha{}^\delta\right]F_\delta &= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2.4 Representación adjunta de las álgebras graduadas

Primero demostramos que la primera de las Ecs. (3.11) forma la representación adjunta de la subalgebra de Lie bosónica, i.e. que de acuerdo con la asignación de matrices en la Ec. (3.10) reproducimos la subalgebra de Lie dada por la Ec. (3.7)

$$[C_i, C_j] = ic_{ij}{}^m C_m \Rightarrow$$

$$\left(C_i\right)_k{}^m\left(C_j\right)_m{}^n-\left(C_j\right)_k{}^m\left(C_i\right)_m{}^n = ic_{ij}{}^m\left(C_m\right)_k{}^n$$

usando la Ec. (3.10)

$$\begin{aligned}
\left(ic_{ki}{}^m\right)\left(ic_{mj}{}^n\right)-\left(ic_{kj}{}^m\right)\left(ic_{mi}{}^n\right) &= \left(ic_{ij}{}^m\right)\left(ic_{km}{}^n\right)\Rightarrow\\
\left(ic_{ki}{}^m\right)\left(ic_{mj}{}^n\right)-\left(ic_{kj}{}^m\right)\left(ic_{mi}{}^n\right) &= -\left(ic_{ij}{}^m\right)\left(ic_{mk}{}^n\right)\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(c_{ki}{}^m\right)\left(c_{mj}{}^n\right)-\left(c_{kj}{}^m\right)\left(c_{mi}{}^n\right)+\left(c_{ij}{}^m\right)\left(c_{mk}{}^n\right) &= 0\Rightarrow\\
\left(c_{ij}{}^m\right)\left(c_{mk}{}^n\right)+\left(c_{ki}{}^m\right)\left(c_{mj}{}^n\right)+\left(c_{jk}{}^m\right)\left(c_{mi}{}^n\right) &= 0
\end{aligned}$$

la última igualdad coincide con la identidad de Jacobi de la primera de las Ecs. (3.9). Por tanto, la identidad de Jacobi conduce a la representación adjunta a través de las Ecs. (3.10).

Construiremos ahora la representación adjunta del álgebra graduada completa. Trabajaremos con la segunda y tercera de las ecuaciones (3.13), comenzando por la segunda

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Sigma_\alpha\right)_j{}^\beta\left(S_i\right)_\beta{}^\gamma-\left(C_i\right)_j{}^k\left(\Sigma_\alpha\right)_k{}^\gamma-\left(S_i\right)_\alpha{}^\beta\left(\Sigma_\beta\right)_j{}^\gamma\right] &= 0\Rightarrow\\
\left[\left(\Sigma_\alpha\right)_j{}^\beta\left(S_i\right)_\beta{}^\gamma-\left(C_i\right)_j{}^k\left(\Sigma_\alpha\right)_k{}^\gamma-s_{\alpha i}{}^\beta\left(\Sigma_\beta\right)_j{}^\gamma\right] &= 0\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Sigma_\alpha\right)\left(S_i\right)-\left(C_i\right)\left(\Sigma_\alpha\right)\right]_j{}^\gamma &= s_{\alpha i}{}^\beta\left(\Sigma_\beta\right)_j{}^\gamma\Rightarrow\\
\left[\left(\Sigma_\alpha\right)\left(S_i\right)-\left(C_i\right)\left(\Sigma_\alpha\right)\right] &= s_{\alpha i}{}^\beta\left(\Sigma_\beta\right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

y a partir de la tercera de las Ecs. (3.13)

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Gamma_\beta\right)_\alpha{}^k\left(C_i\right)_k{}^n-\left(S_i\right)_\alpha{}^\lambda\left(\Gamma_\beta\right)_\lambda{}^n-\left(S_i\right)_\beta{}^\lambda\left(\Gamma_\lambda\right)_\alpha{}^n\right] &= 0\Rightarrow\\
\left[\left(\Gamma_\beta\right)_\alpha{}^k\left(C_i\right)_k{}^n-\left(S_i\right)_\alpha{}^\lambda\left(\Gamma_\beta\right)_\lambda{}^n-s_{\beta i}{}^\lambda\left(\Gamma_\lambda\right)_\alpha{}^n\right] &= 0\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Gamma_\beta\right)\left(C_i\right)-\left(S_i\right)\left(\Gamma_\beta\right)\right]_\alpha{}^n &= s_{\beta i}{}^\lambda\left(\Gamma_\lambda\right)_\alpha{}^n\Rightarrow\\
\left[\left(\Gamma_\beta\right)\left(C_i\right)-\left(S_i\right)\left(\Gamma_\beta\right)\right] &= s_{\beta i}{}^\lambda\left(\Gamma_\lambda\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Con las ecuaciones (3.14,3.15) se puede hacer un arreglo matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha S_i - C_i \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha C_i - S_i \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_{\alpha i}{}^{\beta} \left(\Sigma_\beta\right) \\ s_{\alpha i}{}^{\beta} \left(\Gamma_\beta\right) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha S_i \\ \Gamma_\alpha C_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & C_i \Sigma_\alpha \\ S_i \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix} = s_{\alpha i}{}^{\beta} \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\beta \\ \Gamma_\beta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \\ = \; & s_{\alpha i}{}^{\beta} \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\beta \\ \Gamma_\beta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ahora si denotamos

$$r\left(F_\alpha\right) \equiv \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \; ; \; r\left(B_i\right) \equiv \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

se encuentra que

$$\left[r\left(F_\alpha\right), r\left(B_i\right)\right] = s_{\alpha i}{}^{\beta} r\left(F_\beta\right)$$

por tanto, las funciones definidas en la Ec. (3.16) reproducen el álgebra $\left[F_\alpha, B_i\right] = s_{\alpha i}{}^{\beta} F_\beta$. Para demostrar que forman una representación reproducimos la otra álgebra graduada

$$\begin{aligned} \left[r\left(B_i\right), r\left(B_j\right)\right] &= r\left(B_i\right) \equiv \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & S_j \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & S_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_i C_j - C_j C_i & 0 \\ 0 & S_i S_j - S_j S_i \end{pmatrix} \\ \left[r\left(B_i\right), r\left(B_j\right)\right] &= \begin{pmatrix} \left[C_i, C_j\right] & 0 \\ 0 & \left[S_i, S_j\right] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.17}$$

por otro lado, a partir de las Ecs. (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \left[\left(C_i\right)_k{}^{m} \left(C_j\right)_m{}^{n} - \left(C_j\right)_k{}^{m} \left(C_i\right)_m{}^{n}\right] &= \left(C_i\right)_j{}^{m} \left(C_k\right)_m{}^{n} \Rightarrow \\ \left[\left(C_i\right)\left(C_j\right) - \left(C_j\right)\left(C_i\right)\right]_k{}^{n} &= i c_{ij}{}^{m} \left(C_m\right)_k{}^{n} \Rightarrow \\ \left[C_i, C_j\right] &= i c_{ij}{}^{m} C_m \Rightarrow \end{aligned} \tag{3.18}$$

ahora usamos la segunda de las Ecs. (3.11)

$$\left(S_i\right)_\alpha{}^{\beta} \left(S_j\right)_\beta{}^{\gamma} - \left(S_j\right)_\alpha{}^{\beta} \left(S_i\right)_\beta{}^{\gamma} - \left(C_j\right)_i{}^{k} \left(S_k\right)_\alpha{}^{\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[S_i, S_j\right] = i c_{ij}{}^{k} S_k \tag{3.19}$$

y reemplazando las Ecs. (3.18, 3.19) en la Ec. (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \left[r\left(B_i\right), r\left(B_j\right)\right] &= \begin{pmatrix} i c_{ij}{}^{m} C_m & 0 \\ 0 & i c_{ij}{}^{m} S_m \end{pmatrix} = i c_{ij}{}^{m} \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & S_m \end{pmatrix} \\ \left[r\left(B_i\right), r\left(B_j\right)\right] &= i c_{ij}{}^{m} r\left(B_m\right) \end{aligned}$$

luego $r\left(B_i\right)$ forma una representación de los operadores bosónicos. Adicionalmente, de acuerdo con las Ecs. (3.18, 3.19); las submatrices C_i and S_i también forman una representación de esta subalgebra (aunque S_i no es necesariamente irreducible).

Finalmente, debemos probar que $r(F_\alpha)$ reproduce las relaciones de anticommutación para los operadores fermiónicos

$$\begin{aligned}
\{r(F_\alpha), r(F_\beta)\} &= \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\beta \\ \Gamma_\beta & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\beta \\ \Gamma_\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Sigma_\alpha\Gamma_\beta & 0 \\ 0 & \Gamma_\alpha\Sigma_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_\beta\Gamma_\alpha & 0 \\ 0 & \Gamma_\beta\Sigma_\alpha \end{pmatrix} \\
\{r(F_\alpha), r(F_\beta)\} &= \begin{pmatrix} \Sigma_\alpha\Gamma_\beta + \Sigma_\beta\Gamma_\alpha & 0 \\ 0 & \Gamma_\alpha\Sigma_\beta + \Gamma_\beta\Sigma_\alpha \end{pmatrix} \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

tomando la cuarta de las Ecs. (3.13) encontramos

$$\begin{aligned}
\left[(\Gamma_\beta)_\alpha{}^k(\Sigma_\gamma)_k{}^\delta + (\Gamma_\alpha)_\gamma{}^k(\Sigma_\beta)_k{}^\delta - (\Gamma_\gamma)_\beta{}^k(S_k)_\alpha{}^\delta\right] &= 0 \Rightarrow \\
\left[(\Gamma_\beta)_\alpha{}^k(\Sigma_\gamma)_k{}^\delta + (\Gamma_\gamma)_\alpha{}^k(\Sigma_\beta)_k{}^\delta\right] &= (\Gamma_\gamma)_\beta{}^k(S_k)_\alpha{}^\delta \\
\left[\Gamma_\beta\Sigma_\gamma + \Gamma_\gamma\Sigma_\beta\right]_\alpha{}^\delta &= (\Gamma_\gamma)_\beta{}^k(S_k)_\alpha{}^\delta \\
\left[\Gamma_\beta\Sigma_\gamma + \Gamma_\gamma\Sigma_\beta\right] &= i\gamma_{\gamma\beta}{}^k S_k \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

—-

de la Ec. (B.7) obtenemos

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^k_{\alpha\beta}B_k, B_i\right] + \left\{s^\lambda_{i\alpha}F_\lambda, F_\beta\right\} + \left\{s^\lambda_{i\beta}F_\lambda, F_\alpha\right\} &= 0 \Rightarrow \\
i\gamma^k_{\alpha\beta}c^n_{ki}B_n + s^\lambda_{i\alpha}\gamma^n_{\lambda\beta}B_n + s^\lambda_{i\beta}\gamma^n_{\lambda\alpha}B_n &= 0 \Rightarrow \\
\left(-i\gamma_{\alpha\beta}{}^k c_{ik}{}^n + s_{i\alpha}{}^\lambda\gamma_{\lambda\beta}{}^n + s_{i\beta}{}^\lambda\gamma_{\alpha\lambda}{}^n\right)B_n &= 0 \\
\left[-(\Gamma_\beta)_\alpha{}^k(C_k)_i{}^n + (\Sigma_\alpha)_i{}^\lambda(\Gamma_\beta)_\lambda{}^n + (\Sigma_\beta)_i{}^\lambda(\Gamma_\alpha)_\lambda{}^n\right]B_n &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\Sigma_\alpha\Gamma_\beta + \Sigma_\beta\Gamma_\alpha\right]_i{}^n &= (\Gamma_\beta)_\alpha{}^k(C_k)_i{}^n \\
\left[\Sigma_\alpha\Gamma_\beta + \Sigma_\beta\Gamma_\alpha\right] &= i\gamma_{\alpha\beta}{}^k C_k \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

reemplazando las Ecs. (3.21, 3.22) en la Ec. (3.20) se encuentra

$$\begin{aligned}
\{r(F_\alpha), r(F_\beta)\} &= \begin{pmatrix} i\gamma_{\alpha\beta}{}^k C_k & 0 \\ 0 & i\gamma_{\alpha\beta}{}^k S_k \end{pmatrix} = i\gamma_{\alpha\beta}{}^k\begin{pmatrix} C_k & 0 \\ 0 & S_k \end{pmatrix} \\
\{r(F_\alpha), r(F_\beta)\} &= i\gamma_{\alpha\beta}{}^k r(B_k)
\end{aligned}$$

así que hemos demostrado que las matrices definidas en las Ecs. (3.16) forman una representación (la representación adjunta) del álgebra graduada completa.

Una propiedad que será de gran importancia en análisi posteriores es el siguiente: tomando la tercera de las Ecs. (3.9) y las definiciones (3.10), se puede ver que las constantes de estructura $\gamma_{\alpha\beta}$ definidas en (3.7) son invariantes numéricos bajo la subálgebra de Lie

$$(S_i)_\alpha{}^\delta\gamma_{\delta\beta}{}^j + (S_i)_\beta{}^\delta\gamma_{\alpha\delta}{}^j - \gamma_{\alpha\beta}{}^k(C_i)_k{}^j = 0 \qquad (3.23)$$

3.3 Construcción de las álgebras graduadas supersimétricas

Cambiaremos la notación F de los generadores fermiónicos por la notación Q, mas común en la literatura. Primero intentaremos determinar el valor del conmutador $[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}]$ donde el índice i rotula los diferentes espinores de Weyl de dos componentes Q_α, $i = 1, ..., N$. Usaremos las Ecs. (2.67,2.68), que nos dicen en qué representaciones irreducibles de (j, j') yacen los operadores $X_\mu, P_\mu, M_{\mu\nu}$. Usando dichas ecuaciones, vemos que el conmutador a evaluar debe transformar en la forma

$$[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] \sim (1/2, 0) \otimes [(1, 0) \oplus (0, 1)]_A = (3/2, 0) \oplus (1/2, 0) \oplus (1/2, 1)$$

pero no hay ningún operador dentro del álgebra que esté en las representaciones $(3/2, 0)$ ó $(1/2, 1)$. Adicionalmente, los únicos operadores que están en la representación $(1/2, 0)$ son los operadores Q. Por tanto, el conmutador debe ser una combinación lineal de operadores espinoriales Q

$$[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (a_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i}$$

como ya vimos, los espinores de Weyl tienen en su conjugada una representación no equivalente, de modo que también debemos incluír los generadores correspondientes a esta representación i.e.

$$\left[\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}\right] \sim (0, 1/2) \otimes [(1, 0) \oplus (0, 1)] = (1, 1/2) \oplus (0, 3/2) \oplus (0, 1/2)$$

en el álgebra no tenemos operadores en las representaciones, $(1, 1/2)$ ni $(0, 3/2)$. Por otro lado, los operadores $\bar{Q}$ son los únicos que están en la representación $(0, 1/2)$, de modo que el conmutador debe ser entonces una combinación lineal de ellos.

$$\left[\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{2} (\bar{a}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^i{}_{\dot{\beta}}$$

el anticonmutador $\left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}\right\}$ transforma como $(0, 1/2) \otimes (1/2, 0) = (1/2, 1/2)$ es decir una representación vectorial. El único generador vectorial es P_μ

$$\left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}\right\} = 2c_i{}^j \, (d^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \, P_\mu$$

Ahora bien, dado que $Q_{\alpha i}$, $\bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}$ son operadores fermiónicos, se tiene que las constantes de estructura de $\{Q, \bar{Q}\}$ (correspondientes a las $\gamma' s$ en la Ec. 3.7), deben ser invariantes bajo la subálgebra de Lie indicada en la Ec. (3.23), por tanto las matrices d^μ deben coincidir con las matrices σ 2×2 indicadas en (???)

$$\begin{aligned}
[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i} \\
\left[\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}\right] &= -\frac{1}{2} \bar{Q}^i{}_{\dot{\beta}} \, (\sigma_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

recordemos que $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$ pero solo $S_{\mu\nu}$ contribuye a este conmutador puesto que es el que contiene las simetrías internas (no geométricas). Podemos ver por ejemplo que

$$\left[Q, M_{ij}\varepsilon^{ijk}\right] \equiv [Q, S_k] = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon^{ijk} Q \simeq \frac{1}{2}\sigma^k Q \sim \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix} Q$$

el conmutador $\left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}\right\}$ lo parametrizaremos de la forma

$$\left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}\right\} = 2c_i{}^j \, (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \, P_\mu$$

tomando el adjunto se encuentra que $c_i{}^j = \left(c_j{}^i\right)^*$ teniendo en cuenta que σ_μ es hermítica, por tanto existe una matriz unitaria U que diagonaliza a $c_i{}^j$. Redefiniendo los operadores

$$Q'_{\alpha i} \rightarrow U_i{}^j Q_{\alpha i} \quad ; \quad \bar{Q}'^i{}_{\dot{\alpha}} \rightarrow \bar{Q}^j{}_{\dot{\alpha}} \left(U^{-1}\right)_j{}^i$$

asumiendo una métrica positiva para el espacio de Hilbert, se tiene que

$$\langle \ldots | \left\{Q, Q^\dagger\right\} | \ldots \rangle = \left\| \; Q^\dagger | \ldots \rangle \; \right\|^2 + \left\| \; Q^\dagger | \ldots \rangle \; \right\|^2 > 0 \;\; , \; si \;\; Q \neq 0$$

de esto se deduce que los valores propios de la matriz C (con elementos $c_i{}^j$) deben ser positivos

$$Q''_{\alpha i} \rightarrow \sqrt{c_i} Q'_{\alpha i} \quad ; \quad \bar{Q}''^i{}_{\dot{\alpha}} \rightarrow \sqrt{c_i} \bar{Q}'^i{}_{\dot{\alpha}} \quad no\ hay\ suma$$

y se obtiene

$$\left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}\right\} = 2\delta_i{}^j \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$$

donde hemos omitido la notación doble prima dado que estos son los generadores que usaremos de ahora en adelante. Estas redefiniciones no alteran las propiedades anteriores de los $Q's$. Las constantes de estructura $\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}$ deben ser tensores numéricamente invariantes del grupo de Lorentz en virtud de la identidad de acuerdo con la tercera de las Ecs. (3.12).

El signo se determina requiriendo que $E \equiv P_0$ sea un operador definido positivo para cada índice i, lo cual está relacionado con el hecho de definir una métrica positiva.

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left\{Q_{\alpha i}, \left(Q_{\alpha i}\right)^\dagger\right\} = \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}\right\} = 2\delta_i{}^i \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu = 2Tr\left[\sigma^\mu P_\mu\right]$$

para una partícula en reposo se tiene que $P_\mu = (E, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left\{Q_{\alpha i}, \left(Q_{\alpha i}\right)^\dagger\right\} = 2Tr\left[\sigma^0 P_0\right] = 2Tr\left[\mathbb{I}_{2\times 2} E\right] = 4E > 0$$

de modo que el signo escogido es el correcto.

Ahora examinemos el conmutador $\left[Q_{\alpha i}, P_\mu\right]$

$$\left[Q_{\alpha i}, P_\mu\right] \sim (1/2, 0) \otimes (1/2, 1/2) = (0, 1/2) \oplus (1, 1/2)$$

por tanto el conmutador será de la forma

$$\left[Q_{\alpha i}, P_\mu\right] = f_{ij} \left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta} j}$$

la relación adjunta es

$$\begin{aligned} \left[Q^{\dot{\alpha} i}, P_\mu\right] &= \left(f_{ij}\right)^* \left(\bar{\sigma}_\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} Q_{\beta j} \\ &\Rightarrow \;\; \left[\left[Q_{\alpha i}, P_\mu\right], P_\nu\right] = f_{ij} f^*_{jk} \left(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu\right)_\alpha{}^\beta Q_{\beta k} \end{aligned}$$

a partir de la relación $\left[P_\mu, P_\nu\right] = 0$, y la identidad de Jacobi, encontramos que para la matriz F con elementos f_{ij} se llega a la relación $FF^* = 0$, en virtud de que el factor matricial σ no se anula. La forma más general de $\{Q, Q\}$ debe estar en la representación $\{1, 0\}$ ó $\{0, 0\}$. Los elementos $M_{\mu\nu}$ transforman en la representación $(1, 0)$. Sin embargo, si suponemos que $\{Q, Q\} \sim M_{\mu\nu}$ llegamos a que $\left[\{Q, Q\}, P_\mu\right] \sim \left[M_{\alpha\beta}, P_\mu\right] \neq 0$, pero $\left[\{Q, Q\}, P_\mu\right] = 0$ puesto que $\{Q, Q\}$ debe ser otro operador fermiónico. Por tanto, este conmutador no puede contener combinaciones lineales de $M_{\mu\nu}$. Por otro lado, los únicos elementos que están en la representación $\{0,0\}$ (invariantes de Poincaré e invariantes supersimétricos), son los generadores de la simetría interna.

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{[i,j]} + \textit{un término simétrico en } \alpha, \beta$$

Z_{ij} son combinaciones lineales de los generadores de la simetría interna y por tanto conmuta con P_μ con lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{\alpha\beta} [\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\}, P_\mu] = \varepsilon^{\alpha\beta} \{Q_{\alpha i}, [Q_{\beta j}, P_\mu]\} - \{i \leftrightarrow j\} \\ 0 &= \varepsilon^{\alpha\beta} f_{jk} (\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}} \left\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^{\dot{\beta}k}\right\} - \{i \leftrightarrow j\} \sim f_{[ij]} P_\mu \end{aligned}$$

de modo que F es simétrico y con $FF^* = 0 \Rightarrow$

$$FF^\dagger = F(F^*)^T = FF^* = 0 \Rightarrow f_{ij} = 0$$

de lo cual resulta

$$[Q_{\alpha i}, P_\mu] = \left[\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}, P_\mu\right] = 0$$

Finalmente, el conmutador $[Q_{\alpha i}, B_r]$ con generadores bosónicos internos debe estar en la representación $(1/2, 0) \otimes (0,0) = (1/2, 0)$ con lo cual queda

$$[Q_{\alpha i}, B_r] = (b_r)_i{}^j Q_{\alpha j}$$

dado que el grupo interno es compacto (de acuerdo con el teorema de Coleman Mandula), éste admite una representación unitaria y las matrices de la representación se pueden elegir hermíticas i.e. $b_r = b_r^\dagger$. Para $\bar{Q}$ tenemos en consecuencia

$$\left[\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}, B_r\right] = -\bar{Q}^j{}_{\dot{\alpha}} (b_r)_j{}^i$$

por lo tanto, el grupo más grande que puede actuar de manera no trivial sobre Q es $U(N)$.

Finalmente, vale la pena comentar que la doble estructura de índices de los operadores fermiónicos refleja la estructura de producto directo de los operadores de simetría bosónicos: α y $\dot{\alpha}$ pertenecen al grupo de Poincaré e "i" es el índice asociado a la simetría interna.

???????????????????????????

———————————-

————————————

————————————

Chapter 4

Propiedades del superespacio

4.1 Algebra graduada minimal

En nuestro caso trabajaremos con el álgebra minimal supersimétrica ($N = 1$), en donde solo aparece un operador fermiónico de cada representación. En tal caso no aparecen las cargas centrales en el álgebra, la cual vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \ , \ \left\{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} = 0 \ , \ [P_\mu, Q_\alpha] = 0 && (4.1)\\
\left[P_\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right] &= 0 \ , \ \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu \ , \ [M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta && (4.2)\\
\left[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right] &= -i\left(\bar\sigma_{\mu\nu}\right)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \bar{Q}_{\dot\beta} \ , \ [P_\mu, P_\nu] = 0 \ , \ [P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i\left(g_{\alpha\mu}P_\beta - g_{\beta\mu}P_\alpha\right) && (4.3)\\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}\right) && (4.4)
\end{aligned}$$

$$\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta = \left(\tfrac{1}{4}\right)\left[\left(\sigma_\mu\right)_\alpha{}^{\dot\gamma}\left(\bar\sigma_\nu\right)_{\dot\gamma}{}^\beta - \left(\sigma_\nu\right)_\alpha{}^{\dot\gamma}\left(\bar\sigma_\mu\right)_{\dot\gamma}{}^\beta\right] \tag{4.5}$$

Donde Q_α, $\bar{Q}_{\dot\beta}$ son los nuevos operador fermiónicos.

4.1.1 El efecto de los Operadores Q_α sobre las Componentes de Spin

Una de las consecuencias mas importantes que tiene la introducción del álgebra Supersimétrica, es la transformación de los valores propios de espín correspondientes a los estados propios del mismo número cuántico. Como ejemplo particular, analicemos el efecto de Q_α sobre estados de partículas sin masa. El cuadrimomento de estas partículas es:

$$E^2 = (\vec{p})^2 \Rightarrow p^\mu = (E, 0, 0, E) \tag{4.6}$$

Recordando la definición del casimir del grupo de Poincaré

$$W_\mu = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} M^{\beta\gamma} P^\delta \tag{4.7}$$

Donde W_μ junto con P_μ definido en (2.69) son los denominados operadores de Casimir del grupo de Poincaré, cuyas normas cuadradas cumplen las siguientes propiedades:

$$W_\mu W^\mu = m^2 s\,(s+1) \quad ; \quad P_\mu P^\mu = m^2 \tag{4.8}$$

A partir de (4.7) resulta

$$W_0 = \frac{1}{4}\epsilon_{0\beta\gamma\delta} M^{\beta\gamma} P^\delta$$

de (4.6) podemos ver que solo sobreviven los términos con $\delta = 0, 3$ de modo que:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{4}\epsilon_{0\beta\gamma 0} M^{\beta\gamma} P^0 + \frac{1}{4}\epsilon_{0\beta\gamma 3} M^{\beta\gamma} P^3 = \frac{1}{4}\epsilon_{0123} M^{12} P^3 + \frac{1}{4}\epsilon_{0213} M^{21} P^3 \\ W_0 &= \frac{1}{2}\epsilon_{0123} M^{12} E = \frac{1}{2} M^{12} E \end{aligned}$$

donde hemos usado la antisimetría de $\epsilon_{0\beta\gamma 3}$ y $M^{\beta\gamma}$. Aplicando la definición de M^{12} Ec. (2.65) resulta

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk} M_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{312} M_{12} + \frac{1}{2}\varepsilon_{321} M_{21} = \varepsilon_{312} M_{12} \\ J_3 &= M_{12} \end{aligned}$$

con lo cual

$$W_0 = J_3 E$$

Es decir que W_0 representa la componente z del momentum angular total de la partícula multiplicada por su energía. Si denotamos como λ a la componente z del momento angular total de la partícula, entonces:

$$W_0 \left|E,\lambda\right\rangle = E J_3 \left|E,\lambda\right\rangle = E\lambda \left|E,\lambda\right\rangle \tag{4.9}$$

Por lo tanto veamos qué efecto produce Q_α sobre $|E,\lambda\rangle$:

$$\begin{aligned} W_0 Q_\alpha \left|E,\lambda\right\rangle &= \left\{[W_0, Q_\alpha] + Q_\alpha W_0\right\}\left|E,\lambda\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\{E\left[M_{12}, Q_\alpha\right] + E\lambda Q_\alpha\right\}\left|E,\lambda\right\rangle \\ &= \frac{E}{2}\left\{-i\left(\sigma_{12}\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta + \lambda Q_\alpha\right\}\left|E,\lambda\right\rangle \\ &= \frac{E}{2}\left\{-\frac{i}{4}\left[\left(\sigma_1\right)_\alpha{}^{\dot\gamma}\left(\bar\sigma_2\right)_{\dot\gamma}{}^\beta - \left(\sigma_2\right)_\alpha{}^{\dot\gamma}\left(\bar\sigma_1\right)_{\dot\gamma}{}^\beta\right] + \lambda\delta_\alpha{}^\beta\right\} Q_\beta\left|E,\lambda\right\rangle \\ &= \frac{E}{2}\left\{-\frac{1}{2}\left(\sigma_3\right)_\alpha{}^\beta + \lambda\delta_\alpha{}^\beta\right\} Q_\beta\left|E,\lambda\right\rangle \Rightarrow \\ W_0 Q_1\left|E,\lambda\right\rangle &= \frac{E}{2}\left\{-\frac{1}{2} + \lambda\right\} Q_1\left|E,\lambda\right\rangle && (4.10) \\ W_0 Q_2\left|E,\lambda\right\rangle &= \frac{E}{2}\left\{\lambda + \frac{1}{2}\right\} Q_2\left|E,\lambda\right\rangle && (4.11) \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la ecuación (4.5) y la tercera relación en (4.2) además de la siguiente identidad para las matrices de Pauli:

$$\left(\sigma_i\right)_\alpha{}^{\dot\gamma}\left(\bar\sigma_j\right)_{\dot\gamma}{}^\beta = i\left(\sigma_k\right)_\alpha{}^\beta$$

Vemos por lo tanto que Q_1 baja la componente z del momentum angular J en $\frac{1}{2}$ y Q_2 la sube en la misma cantidad.

4.1.2 Variables de Grassmann

La introducción de operadores fermiónicos en el álgebra de Poincaré, conlleva la aparición de variables anticonmutantes que acompañan a estos operadores en expresiones bosónicas. Estas son las denominadas variables de Grassmann. Para el caso de los operadores Q_α y $\bar Q_{\dot\alpha}$ definiremos las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \left\{\theta_\alpha, \theta_\beta\right\} &= 0 && (4.12) \\ \left\{\bar\theta_{\dot\alpha}, \bar\theta_{\dot\beta}\right\} &= 0 && (4.13) \end{aligned}$$

Podemos definir de manera semejante a (2.47, 2.48) un producto interior:

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha} &= \theta_{\beta}\varepsilon^{\beta\alpha} \Longrightarrow \theta\theta = \theta_{\alpha}\theta^{\alpha} \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \Longrightarrow \bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.14}$$

De esta forma productos entre variables de Grassmann y espinores tales como:

$$\theta_{\alpha}\psi^{\alpha} \tag{4.15}$$

Constituyen expresiones que conmutan con todos los operadores bosónicos de la teoría. Para lo que sigue, es conveniente que el lector explore las propiedades de los productos internos entre variables de Grassman y espinores descritas en el Apéndice A.3.

4.1.3 Translaciones Supersimétricas y el concepto de superespacio

Dado que el álgebra supersimétrica implica un ampliación del algebra de Poincaré, podemos intuír que el espacio de Minskowski $\mathbb{R}^4$ sobre el cual actúan los generadores de Poincaré, debe igualmente ampliarse con la inclusión de variables de Grassmann (coordenadas anticonmutantes) adicionales asociadas a los operadores espinoriales Q_{α} y $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. El espacio Minkowskiano así ampliado es denominado el **superespacio**. Veremos ahora que dos traslaciones sucesivas en las variables de Grassmann implican además una traslación en el espacio de Minkowski. Para ello recordemos que el operador translación (espacio temporal) en el espacio de Minkowski, se escribe en términos de los generadores de Poincaré:

$$U(x) = e^{ix^{\mu}p_{\mu}} = e^{ix\cdot p} \tag{4.16}$$

Su extensión natural en el superespacio es:

$$U\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = e^{i\left(x^{\mu}p_{\mu}+\theta_{\alpha}Q^{\alpha}+\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)} = e^{i\left(x\cdot p+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}\right)} \tag{4.17}$$

Por lo tanto dos translaciones sucesivas en las coordenadas del superespacio estarían dadas por:

$$U\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)U\left(y,\xi,\bar{\xi}\right) = e^{i\left(x\cdot p+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}\right)}e^{i\left(y\cdot p+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right)} \tag{4.18}$$

Las cuales pueden ser reescritas como un solo operador traslación a partir de la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorff, la cual está dada por ([1] Sec. 11.6 pag 460):

$$e^{A}e^{B} = e^{\left(A+B+\left(\frac{1}{2}\right)[A,B]+\left(\frac{1}{12}\right)[A,[A,B]]-\left(\frac{1}{12}\right)[B,[B,A]]+\ldots\right)} \tag{4.19}$$

De esta manera tenemos:

$$U\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)U\left(y,\xi,\bar{\xi}\right) = e^{i\left\{(x+y)\cdot p+(\theta+\xi)Q+\left(\bar{\theta}+\bar{\xi}\right)\bar{Q}+\frac{i}{2}\left[\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q},\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right]\right\}} \tag{4.20}$$

Donde hemos tenido en cuenta que los términos de órdenes mayores a los cuadráticos en la serie (4.19) se anulan dado el caracter anticonmutativo de los espinores y las variables de Grassmann. Evaluando el conmutador en el exponente tenemos:

$$\begin{aligned} \left[\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q},\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right] &= [\theta Q,\xi Q] + \left[\theta Q,\bar{\xi}\bar{Q}\right] + \left[\bar{\theta}\bar{Q},\xi Q\right] + \left[\bar{\theta}\bar{Q},\bar{\xi}\bar{Q}\right] \\ &= \left[\theta Q,\bar{\xi}\bar{Q}\right] + \left[\bar{\theta}\bar{Q},\xi Q\right] \\ &= \theta_{\alpha}Q^{\alpha}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} - \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\theta_{\alpha}Q^{\alpha} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\xi_{\alpha}Q^{\alpha} - \xi_{\alpha}Q^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \\ &= -\theta_{\alpha}Q^{\alpha}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} + \theta_{\alpha}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}Q^{\alpha} - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\xi^{\alpha}Q_{\alpha} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\xi^{\alpha}Q_{\alpha}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \\ &= \theta_{\alpha}Q^{\alpha}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} + \theta_{\alpha}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}Q^{\alpha}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}Q_{\alpha}\xi^{a} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}Q_{\alpha}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\xi^{\alpha} \\ &= \theta_{\alpha}\left\{Q^{\alpha},\bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right\}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}},Q_{\alpha}\right\}\xi^{\alpha} \\ &= 2\left[\theta_{\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma_{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\xi^{\alpha}\right]P^{\mu} = 2\left[\theta_{\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} - \xi_{\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right]P^{\mu} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Donde hemos tenido en cuenta la siguiente identidad para productos internos:

$$\xi_\alpha \eta^\alpha = -\xi^\alpha \eta_\alpha \tag{4.22}$$

Por lo tanto la expresión (4.20) toma la siguiente forma:

$$U\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)U\left(y,\xi,\bar{\xi}\right) = e^{i\left\{(x^\mu+y^\mu)P_\mu+(\theta+\xi)Q+\left(\bar{\theta}+\bar{\xi}\right)\bar{Q}+i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\xi}-\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\right)P_\mu\right\}} \tag{4.23}$$

A partir de la cual podemos deducir que las coordenadas del superespacio se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \acute{x}^\mu &= x^\mu + y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} & (4.24)\\ \acute{\theta} &= \theta + \xi & (4.25)\\ \acute{\bar{\theta}} &= \bar{\theta} + \bar{\xi} & (4.26) \end{aligned}$$

La expresión anterior nos indica que existe una traslación adicional generada por los términos $i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}$ asociados a las variables de Grassman, como se había mencionado anteriormente.
A partir de (4.24) a (4.26) podemos obtener una representación para los operadores Q_α y $\overline{Q}_{\dot{\alpha}}$, teniendo en cuenta que la variación para las coordenadas $x, \theta, \overline{\theta}$ se debe definir como:

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = e^{i\left(y^\mu P_\mu + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)}\mathbf{r} \simeq \left[1 + i\left(y^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\bar{Q}\right)\right]\mathbf{r}$$

de modo que

$$\delta\mathbf{r} = i\left(y^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\bar{Q}\right)\mathbf{r} \quad ; \quad \mathbf{r} = \left(x^\nu, \theta, \overline{\theta}\right) \tag{4.27}$$

Evaluando explícitamente $\delta\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} &= i\left[y^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\bar{Q}\right]\left(x^\nu, \theta, \overline{\theta}\right) \Rightarrow\\ \delta x^\nu &= i\left[y^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\bar{Q}\right] x^\nu\\ \delta\theta &= i\left[y^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\bar{Q}\right]\theta = i\left(\xi Q\right)\theta\\ \delta\overline{\theta} &= i\left[y^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\bar{Q}\right]\bar{\theta} = i\left(\overline{\xi}\bar{Q}\right)\overline{\theta} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que los generadores de Poincaré no actúan sobre las variables de Grassman, y los generadores de una representación no transforman las variables de Grassman de la otra representación. Es decir tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta\theta &= i\left(\xi Q\right)\theta \;\; ; \;\; \delta\bar{\theta} = i\left(\bar{\xi}\bar{Q}\right)\bar{\theta}\\ \delta x^\nu &= i\left(y^\mu P_\mu + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right) x^\nu & (4.28) \end{aligned}$$

Comparando (4.28) con (4.25) tenemos:

$$i\left(\xi Q\right)\theta = \xi \Rightarrow i\left(\xi_\alpha Q^\alpha\right)\theta_\beta = \xi_\beta \Rightarrow i\left(\xi_\alpha Q^\alpha\right)\theta_\beta = \xi_\alpha \delta^\alpha{}_\beta$$

la última igualdad nos lleva a la relación (condición de suficiencia)

$$iQ^\alpha\theta_\beta = \delta^\alpha{}_\beta$$

similarmente, comparando (4.28) con (4.26)

$$i\left(\bar{\xi}\bar{Q}\right)\bar{\theta} = \bar{\xi} \Rightarrow i\left(\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \Rightarrow i\left(\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

con lo cual llegamos a

$$i\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

la comparación de (4.28) con (4.24) es un poco más complicada

$$\begin{aligned} x^{\nu\prime} &= x^\nu + y^\nu + i\theta\sigma^\nu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\nu\bar{\theta} = x^\nu + \delta x^\nu = x^\nu + i\left(y^\mu P_\mu + \xi_\alpha Q^\alpha + \bar{\xi}^{\dot\alpha}\bar{Q}_{\dot\alpha}\right)x^\nu \\ &\Rightarrow\ y^\nu + i\theta_\alpha\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\xi}_{\dot\alpha} - i\xi_\alpha\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha} = i\left(y^\mu P_\mu + \xi_\alpha Q^\alpha + \bar{\xi}^{\dot\alpha}\bar{Q}_{\dot\alpha}\right)x^\nu \end{aligned}$$

y dado que y^μ, ξ_α y $\bar{\xi}^{\dot\alpha}$ son linealmente independientes

$$\begin{aligned} y^\nu &= i\left(y^\mu P_\mu\right)x^\nu \\ -i\xi_\alpha\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha} &= i\left(\xi_\alpha Q^\alpha\right)x^\nu \\ i\theta_\alpha\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\xi}_{\dot\alpha} &= i\left(\bar{\xi}^{\dot\alpha}\bar{Q}_{\dot\alpha}\right)x^\nu = i\left(\bar{Q}^{\dot\alpha}\bar{\xi}_{\dot\alpha}\right)x^\nu \end{aligned}$$

estas igualdades se cumplen si

$$\begin{aligned} i\left(P_\mu\right)x^\nu &= \delta_\mu{}^\nu\ ;\ Q^\alpha x^\nu = -\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha} \\ \bar{Q}^{\dot\alpha}x^\nu &= \left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\theta_\alpha \end{aligned} \tag{4.29}$$

las propiedades de transformación quedan

$$iQ^\alpha\theta_\beta = \delta^\alpha{}_\beta\ ,\ i\bar{Q}_{\dot\alpha}\bar{\theta}^{\dot\beta} = \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\ ,\ i\left(P_\mu\right)x^\nu = \delta_\mu{}^\nu\ ,\ Q^\alpha x^\nu = -\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha}\ ,\ \bar{Q}^{\dot\alpha}x^\nu = \left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\theta_\alpha \tag{4.30}$$

estas propiedades nos sugieren la construcción de una representación para los generadores del álgebra graduada de la forma

$$\begin{aligned} i\Gamma\left(Q^\alpha\right) &= \partial^\alpha + F\left(\partial_\mu\right) + H\left(\bar{\partial}_{\dot\alpha}\right) \\ i\Gamma\left(\bar{Q}_{\dot\alpha}\right) &= \bar{\partial}_{\dot\alpha} + G\left(\partial_\mu\right) + K\left(\partial^\alpha\right) \\ i\Gamma\left(P_\mu\right) &= \partial_\mu + J\left(\partial_\mu\right) + L\left(\partial^\alpha\right) \end{aligned}$$

Con $\partial^\alpha \equiv \partial/\partial\theta_\alpha$, $\partial_{\dot\alpha} \equiv \partial/\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}$. Como ya vimos en las Ecs. (4.24)-(4.26) el generador Q^α solo afecta a las traslaciones en las coordenadas x_μ, θ_α pero no en las coordenadas $\bar{\theta}_{\dot\alpha}$. Similarmente, $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ solo afecta a las coordenadas x_μ, $\bar{\theta}_{\dot\alpha}$. Finalmente, P_μ solo cambia a las coordenadas x_μ. Por tanto, la forma de la representación de los generadores se simplifica

$$\begin{aligned} i\Gamma\left(Q^\alpha\right) &= \partial^\alpha + F\left(\partial_\mu\right) \\ i\Gamma\left(\bar{Q}_{\dot\alpha}\right) &= \bar{\partial}_{\dot\alpha} + G\left(\partial_\mu\right) \\ i\Gamma\left(P_\mu\right) &= \partial_\mu \end{aligned}$$

nos queda determinar las funciones $F\left(\partial_\mu\right)$, $G\left(\partial_\mu\right)$ utilizando las Ecs. (4.29)

$$\begin{aligned} i\Gamma\left(Q^\alpha\right)x^\nu &= -i\left(\sigma^\nu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha} = -i\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha}\delta_\mu{}^\nu \\ &= -i\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha}\partial_\mu x^\nu \Rightarrow \\ F\left(\partial_\mu\right) &= -i\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha}\partial_\mu \end{aligned}$$

similarmente

$$G\left(\partial_\mu\right) = i\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu$$

la forma final de las representaciones de los generadores es

$$i\Gamma\left(Q^\alpha\right) = \partial^\alpha - i\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\alpha}\partial_\mu \tag{4.31}$$

$$i\Gamma\left(\bar{Q}_{\dot\alpha}\right) = \bar{\partial}_{\dot\alpha} + i\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu \tag{4.32}$$

$$i\Gamma\left(P_\mu\right) = \partial_\mu \tag{4.33}$$

4.1.4 Derivadas Covariantes en el Superespacio

Para obtener la forma explícita de las derivadas covariantes en el superespacio debemos ver como se transforma un operador arbitrario Φ bajo traslaciones infinitesimales ϵ^μ, ξ en dicho superespacio. Tal transformación está dada por:

$$\begin{aligned}
\acute{\Phi} &= U^\dagger\left(\epsilon^\mu,\xi,\bar{\xi}\right)\Phi U\left(\epsilon^\mu,\xi,\bar{\xi}\right) \\
\acute{\Phi} &= e^{-i\left\{\epsilon^\mu P_\mu+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right\}}\Phi e^{i\left\{\epsilon^\mu P_\mu+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right\}} \\
&\approx \left\{1-i\left(\epsilon^\mu P_\mu+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right)\right\}\Phi\left\{1+i\left(\epsilon^\mu P_\mu+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right)\right\} \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

expandiendo los términos y despreciando los términos de segundo orden en la traslación infinitesimal i.e. $\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu, \xi\xi, \bar{\xi}\bar{\xi}, \varepsilon^\mu\xi, \varepsilon^\mu\bar{\xi}$, se encuentra

$$\acute{\Phi} = \Phi + i\epsilon^\mu\left[\Phi, P_\mu\right] + i\left[\Phi,\xi Q\right] + i\left[\Phi,\bar{\xi}\bar{Q}\right] \qquad (4.35)$$

Por otro lado podemos expandir $\acute{\Phi}$ en serie de Taylor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\acute{\Phi}\left(x^\mu+\epsilon^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}-i\xi\sigma^\mu\bar{\theta},\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi}\right) &\approx \Phi\left(x^\mu,\theta,\bar{\theta}\right)+\xi_\alpha\partial^\alpha\Phi-\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi \\
&\quad+\left(\epsilon^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}-i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\Phi \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

De tal manera que comparando (4.35) y (4.36) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha\partial^\alpha\Phi-\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi+\left[\epsilon^\mu+i\theta_\alpha\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}-i\xi_\alpha\left(\sigma_\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right]\partial_\mu\Phi &= i\epsilon^\mu\left[\Phi,P_\mu\right] \\
&\quad+i\left[\Phi,\xi_\alpha Q^\alpha\right]+i\left[\Phi,\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu\partial_\mu\Phi+\xi_\alpha\left[-i\left(\sigma_\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_\mu+\partial^\alpha\right]\Phi-\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi+i\theta_\alpha\left(\sigma^\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\partial_\mu\Phi &= i\epsilon^\mu\left[\Phi,P_\mu\right] \\
&\quad+i\left[\Phi,\xi_\alpha Q^\alpha\right]+i\left[\Phi,\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu\partial_\mu\Phi+\xi_\alpha\left[-i\left(\sigma_\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_\mu+\partial^\alpha\right]\Phi-\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\left[i\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu+\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right]\Phi &= i\epsilon^\mu\left[\Phi,P_\mu\right] \\
&\quad+i\left[\Phi,\xi_\alpha Q^\alpha\right]+i\left[\Phi,\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\Phi &= i\left[\Phi,P_\mu\right] \quad ; \quad \left[-i\left(\sigma_\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^\mu+\partial^\alpha\right]\Phi = i\left[\Phi,Q^\alpha\right] \\
-\left[i\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu+\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right]\Phi &= i\left[\Phi,\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right]
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado el caracter independiente de las variables infinitesimales. Teniendo en cuenta los resultados en (**??**) podemos definir las siguientes derivadas para el superespacio:

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu \\
D^\alpha &= -i\left(\sigma_\mu\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^\mu+\partial^\alpha \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\left(i\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu+\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right) \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Mas adelante veremos que las derivadas (4.40) son covariantes bajo transformaciones supersimétricas, es decir que conmutan con las variaciones asociadas a dichas transformaciones.

4.1.5 Propiedades de las Derivadas Covariantes

Veremos ahora dos propiedades importantes de las derivadas (4.40) a saber:

1. Las derivadas covariantes (4.40) satisfacen el algebra de Lie graduada.
2. Toda variación de un supercampo $\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ con respecto a las variables de Grassmann debe conmutar con las respectivas derivadas (4.40).

La primera propiedad implica la verificación de las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned}
\left\{D^{\alpha},D^{\beta}\right\} &= \left\{-i\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^{\mu}+\partial^{\alpha}\ ,-i\left(\sigma_{\nu}\right)^{\beta\dot{\gamma}}\bar{\theta}_{\dot{\gamma}}\partial^{\nu}+\partial^{\beta}\right\} \\
&= -\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{\nu}\right)^{\beta\dot{\gamma}}\left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\bar{\theta}_{\dot{\gamma}}\right\}\partial^{\mu}\partial^{\nu}-i\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\partial^{\beta}\right\}\partial^{\mu}-i\left(\sigma_{\mu}\right)^{\beta\dot{\gamma}}\left\{\partial^{\alpha},\bar{\theta}_{\dot{\gamma}}\right\}\partial^{\mu} \\
&\quad +\left\{\partial^{\alpha},\partial^{\beta}\right\}\Rightarrow \\
\left\{D^{\alpha},D^{\beta}\right\} &= 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}},\bar{D}_{\dot{\beta}}\right\} &= \left\{i\theta^{\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial^{\mu}+\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\ ,\ i\theta^{\beta}\left(\sigma_{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\partial^{\nu}+\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\} \\
&= -\left(\sigma_{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\left\{\theta^{\alpha}\ ,\ \theta^{\beta}\right\}\partial^{\mu}\partial^{\nu}+i\left(\sigma_{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left\{\theta^{\alpha},\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\}\partial^{\mu}+i\left(\sigma_{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\left\{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}},\theta^{\beta}\right\}\partial^{\nu} \\
&\quad +\left\{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}},\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\}\Rightarrow \\
\left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}},\bar{D}_{\dot{\beta}}\right\} &= 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
\left\{D_{\beta},\bar{D}_{\dot{\beta}}\right\} &= \left\{-i\varepsilon_{\beta\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^{\mu}+\varepsilon_{\beta\alpha}\partial^{\alpha},-i\theta^{\gamma}\left(\sigma_{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial^{\nu}-\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\} \\
&= -\varepsilon_{\beta\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\theta^{\gamma}\right\}\partial^{\mu}\partial^{\nu}+i\varepsilon_{\beta\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\}\partial^{\mu} \\
&\quad -i\left(\sigma_{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\varepsilon_{\beta\alpha}\left\{\partial^{\alpha},\theta^{\gamma}\right\}\partial^{\nu}-\varepsilon_{\beta\alpha}\left\{\partial^{\alpha},\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\} \\
&= -i\varepsilon_{\beta\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\left\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}},\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\}\partial^{\mu}-i\left(\sigma_{\nu}\right)^{\gamma}{}_{\dot{\beta}}\varepsilon_{\beta\alpha}\left\{\partial^{\alpha},\theta_{\gamma}\right\}\partial^{\nu} \\
&= -i\varepsilon_{\beta\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}\partial^{\mu}-i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma_{\nu}\right)^{\gamma}{}_{\dot{\beta}}\partial^{\nu} \\
&= -i\left(\sigma_{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\partial^{\mu}-i\left(\sigma_{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\partial^{\nu} \\
&= -2i\left(\sigma_{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\partial^{\mu} \\
&= 2\left(\sigma_{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}P^{\mu}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Donde hemos utilizado las siguientes identidades:

$$\left\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}},\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\right\} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \tag{4.44}$$

$$\left\{\partial^{\alpha},\theta_{\gamma}\right\} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \tag{4.45}$$

veamos como se obtiene 4.45

$$\begin{aligned}
\left\{\partial^{\alpha},\theta_{\gamma}\right\}(\ldots) &= \partial^{\alpha}\left[\theta_{\gamma}(\ldots)\right]+\theta_{\gamma}\partial^{\alpha}(\ldots)=\left[\partial^{\alpha}\theta_{\gamma}\right](\ldots)-\theta_{\gamma}\partial^{\alpha}(\ldots)+\theta_{\gamma}\partial^{\alpha}(\ldots) \\
&= \delta^{\alpha}{}_{\gamma}(\ldots)
\end{aligned}$$

La segunda propiedad se obtiene directamente de las definiciones (4.31), (4.32) y (4.40). De tal manera que:

$$\delta\left(D_\beta S\right) = i\left(\xi_\alpha Q^\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)\left(D_\beta S\right) = i D_\beta\left(\xi_\alpha Q^\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right) S = D_\beta \delta\left(S\right) \tag{4.46}$$

similarmente ocurre para $\bar{D}_{\dot{\beta}}$. Más sintéticamente

$$\left[D_\alpha, \delta_\xi\right] = \left[D_\alpha, \delta_{\bar{\xi}}\right] = 0 \;\; ; \;\; \left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \delta_\xi\right] = \left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \delta_{\bar{\xi}}\right] = 0$$

Chapter 5

Construcción de Supercampos

De manera semejante a la definición de campo en el espacio-tiempo, en supersimetría se pueden definir "supercampos" como funciones en cada punto $\left(x^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right)$ del superspacio. Estas funciones pueden ser escalares, espinoriales, vectoriales, etc. En general un campo escalar supersimétrico es un mapeo que va del superespacio $\left(x^{\mu}, \theta_{\alpha}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)$ a los números complejos. Una función de este tipo puede ser expandida en serie de Taylor con respecto a las variables de Grassman, dicha serie tendría un número finito de términos dado el carácter anticonmutativo de θ_{α} y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ [1] la forma más general para un supercampo escalar está dada por ([9] pag 38 Cap 3, [5] Pag 40):

$$\begin{aligned} S\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} A_{\mu}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} D(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

cada campo escalar contribuye con dos grados de libertad (una componente compleja), el campo vectorial contribuyen con 8 grados de libertad (4 componentes cada una compleja), y los campos espinoriales contribuyen con 4 grados de libertad puesto que pertenecen al espacio C^2. De acuerdo con este conteo, este supercampo tiene en total 16 grados de libertad bosónicos dados por:

$$f(x), \ m(x), \ n(x), \ A_{\mu}(x), \ D(x) \tag{5.2}$$

Y además 16 grados de libertad fermiónicos dados por:

$$\phi(x), \ \bar{\chi}(x), \ \bar{\lambda}(x), \ \psi(x) \tag{5.3}$$

los campos definidos por (5.2, 5.3), se denominan campos componentes del supercampo. Definiremos ahora los siguientes operadores de proyección

$$P_1 = \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box} \quad P_2 = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\Box} \qquad -P_T = \frac{D^{\alpha}\bar{D}^2 D_{\alpha}}{8\Box} = \frac{\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}}}{8\Box}$$

estos operadores junto con $P_+ = 1/\left(4\sqrt{\Box}\right) D^2$, $P_- = 1/\left(4\sqrt{\Box}\right) D^2$ forman un conjunto cerrado de operadores diferenciales bajo composición. A veces es conveniente escribir

$$P_L = (P_1 + P_2) = \frac{\left(D^2 + \bar{D}^2\right)^2}{16\Box}$$

Estos proyectores satisfacen $P_1 + P_2 + P_T = 1$, es decir inducen una descomposición natural del operador identidad. Por tanto el supercampo escalar se puede reescribir como

$$\begin{aligned} S\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) &= (P_1 + P_2 + P_T) S\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) = P_2 S\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) + P_1 S\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) + P_T S\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) \\ &\equiv \Phi\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) + \bar{\Phi}\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) + V\left(x, \bar{\theta}, \theta\right) \end{aligned}$$

[1] Dado que se tienen cuatro elementos de Grassmann a saber θ_1, θ_2, $\bar{\theta}^{\dot{1}}$, $\bar{\theta}^{\dot{2}}$ la expansion contiene como maximo potencias cuárticas.

Que definen a los campos quiral, anti-quiral y vectorial respectivamente. Estos campos pueden definirse equivalentemente de la siguiente forma

1. Supercampo Quiral:
$$\Phi\left(x,\bar{\theta},\theta\right)\equiv P_2 S\left(x,\bar{\theta},\theta\right)=\frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box}S\left(x,\bar{\theta},\theta\right)$$
si operamos con $\bar{D}$ a la izquierda a ambos lados obtenemos tres operadores $\bar{D}$ seguidos y por tanto el campo se anula de modo que
$$\bar{D}\Phi\left(x,\bar{\theta},\theta\right)=\frac{\bar{D}^3D^2}{16\Box}S\left(x,\bar{\theta},\theta\right)=0$$
por tanto el campo quiral cumple la propiedad
$$\bar{D}\Phi=0 \tag{5.4}$$
tomaremos de aquí en adelante la Ec. (5.4) como nuestra definición de supercampo quiral. Otra forma posible de definirlo es
$$\begin{aligned}\left[\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= -i\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi\Rightarrow\\ \left[\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= 0\end{aligned}$$
de modo que el supercampo quiral conmuta con el generador $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.

2. Supercampo Antiquiral:
$$D\bar{\Phi}=0 \tag{5.5}$$

3. Supercampo Vectorial:
$$D^2G=\bar{D}^2G=0$$
que se puede traducir en
$$V\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=\bar{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) \tag{5.6}$$
como veremos más adelante, cada uno de estos supercampos va a contener un conjunto de campos componentes que formarán un multiplete irreducible bajo transformaciones supersimétricas. Construiremos a continuación la forma general para cada uno de estos supercampos.

5.1 Supercampo Quiral

La condición (5.4) puede ser simplificada si introducimos el siguiente operador ([9] Cap 3 pag 41):
$$U\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=e^{i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\right)} \tag{5.7}$$
El cual cumple las siguientes identidades importantes ([1] Pag 468):
$$\begin{aligned}U^{-1}\bar{D}_{\dot{\alpha}}U &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} && (5.8)\\ U\left[F\left(x,\bar{\theta},\theta\right)\right] &= F\left(y,\theta\right) && (5.9)\\ y^\mu &= x^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} && (5.10)\end{aligned}$$
Obsérvese que este operador se puede interpretar como una traslación específica en la variables de Grassman, construída de tal forma que coloca a la función en el "origen" con respecto a $\bar{\theta}$. La condición de campo quiral (5.4) toma la forma:
$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi &= 0\Rightarrow U^{-1}\bar{D}_{\dot{\alpha}}UU^{-1}\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=0\Rightarrow\\ -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\left[U^{-1}\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\right] &= 0 && (5.11)\end{aligned}$$

Lo cual nos indica que $U^{-1}\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ no depende explícitamente de $\bar{\theta}$ es decir:

$$U^{-1}\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\equiv\Psi\left(x,\theta\right)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\Phi &= U\Psi\left(x,\theta\right)=\Psi\left(y,\theta\right) &(5.12)\\ y^{\mu} &= x^{\mu}+i\theta^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &(5.13)\end{aligned}$$

Por lo tanto si reescribimos Ψ en función de x^{μ}, θ y $\bar{\theta}$ obtendremos la forma general para los supercampos quirales (5.4)[2]. Para lograr este objetivo es necesario expandir en serie de Taylor a la función $\Psi\left(y,\theta\right)$, la cual contiene hasta términos de orden 2 en θ [3]:

$$\Psi\left(y,\theta\right)=A\left(y\right)+\sqrt{2}\left[\theta\psi\left(y\right)\right]+\left(\theta\theta\right)F\left(y\right) \tag{5.14}$$

A su vez las componentes A, ψ y F son funciones de y expandibles alrededor de x. En términos generales, la expansión para cualquier función $g\left(y\right)$ está dada por (Ver apéndice C.1):

$$g\left(y\right)=g\left(x\right)+i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}g\left(x\right)-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box g\left(x\right) \tag{5.15}$$

De lo cual deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Psi\left(y,\theta\right) &= A\left(x\right)+i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A\left(x\right)+\\ &\quad \sqrt{2}\theta_{\beta}\left[\psi^{\beta}\left(x\right)+i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right)\right]+\left(\theta\theta\right)F\left(x\right) &(5.16)\end{aligned}$$

Donde el resto de términos se anula teniendo de nuevo en cuenta la anticonmutatividad de las variables de grassmann. Reordenando términos tenemos (Ver el apéndice C.1):

$$\begin{aligned}\Psi\left(y,\theta\right) &= \Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=A\left(x\right)+i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A\left(x\right)+\\ &\quad \sqrt{2}\left[\theta\psi\left(x\right)\right]-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right)\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right]+\left(\theta\theta\right)F\left(x\right) &(5.17)\end{aligned}$$

5.2 Supercampo Antiquiral

De manera semejante al caso anterior podemo, construir la forma general para los supercampos antiquirales, los cuales cumplen la condición (5.5). De esta manera haciendo la transformación:

$$U^{-1}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=e^{-i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\right)} \tag{5.18}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}UD_{\alpha}U^{-1} &= \partial_{\alpha} &(5.19)\\ U^{-1}\left[F\left(x,\bar{\theta},\theta\right)\right] &= F\left(y,\bar{\theta}\right) &(5.20)\\ \left(y^{\mu}\right)^{\dagger} &= x^{\mu}-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} &(5.21)\end{aligned}$$

[2]Obsérvese que aunque $\Psi\left(y,\theta\right)$ no es función explícita de $\bar{\theta}$, si depende implícitamente de esta variable a través de la relación (5.13). Sin embargo, las variaciones de $\bar{\theta}$ no son independientes de las otras variables del superespacio.

[3]Esto es debido a que y^{μ} es a su vez función cuadrática en las variables de Grassmann.

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} D_\alpha\bar{\Phi} &= 0 \Rightarrow UD_\alpha U^{-1}U\bar{\Phi}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \\ \partial_\alpha\left[U\bar{\Phi}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\right] &= 0 \Rightarrow \\ & \quad U\bar{\Phi}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) \ \textit{no depende de } \theta \end{aligned} \tag{5.22}$$

Es decir:

$$\bar{\Phi} = U^{-1}\bar{\Psi}\left(x,\theta\right) = \bar{\Psi}\left(y^\dagger,\bar{\theta}\right) \tag{5.23}$$

con la variable "y" definida por (5.13). De forma análoga al caso del supercampo Quiral, la expresión (5.23) nos indica el máximo orden de expansión en $y^\dagger$ es decir:

$$\bar{\Psi}\left(y^\dagger,\bar{\theta}\right) = A^*\left(y^\dagger\right) + \sqrt{2}\left[\bar{\psi}\left(y^\dagger\right)\bar{\theta}\right] + \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)F^*\left(y^\dagger\right) \tag{5.24}$$

Por lo tanto la expansión para una función cualquiera $\bar{g}\left(y^\dagger\right)$está dada por:

$$\bar{g}\left(y^\dagger\right) = \bar{g}\left(x\right) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{g}\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\bar{g}\left(x\right) \tag{5.25}$$

De lo cual se deduce:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\left(y^\dagger,\bar{\theta}\right) &= \bar{A}\left(y^\dagger\right) + \sqrt{2}\left[\bar{\theta}\bar{\psi}\left(y^\dagger\right)\right] + \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\bar{F}\left(y^\dagger\right) \Longrightarrow \\ \bar{\Psi}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= \bar{A}\left(x\right) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{A}\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\bar{A}\left(x\right) + \\ & \quad \sqrt{2}\left[\bar{\theta}\bar{\psi}\left(x\right)\right] + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left[\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^\beta\left(x\right)\right] + \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\bar{F}\left(x\right) \end{aligned} \tag{5.26}$$

Donde (5.26) representa la forma general de un supercampo antiquiral.

5.3 Variación Susy para el Supercampo Quiral

Obtendremos ahora expresiones generales para las variaciones supersimétricas de las componentes A, ψ y F del supercampo Quiral (5.14). Como resultados importantes de este cálculo se destaca lo siguiente:

- Las variaciones SUSY convierten campos bosónicos en campos fermiónicos y viceversa.
- Cuando se hace una transformación supersimétrica sobre los campos A, ψ y F, cada una de estas transformaciones se puede escribir en términos de los campos A, ψ y F. Por lo tanto la tripla $(A,\ \psi, F)$, es invariante supersimétrica. Adicionalmente ningún subconjunto de dicha tripla (o combinación lineal de ellos), es invariante SUSY, es decir es irreducible. Por tanto $(A,\ \psi, F)$ forma un triplete supersimétrico conocido como el triplete quiral.
- Del ítem anterior vale la pena resaltar que el triplete quiral es un multiplete irreducible de campos con diferente espín, ya que $(A,\ F)$ son campos bosónicos en tanto que ψ es un campo fermiónico. Este tipo de multipletes no son posibles con teorías gauge basadas en grupos de Lie.
- La variación de F, da como resultado una divergencia total en el espacio-tiempo. Teniendo en cuenta la manera como se construye el principio variacional para cualquier teoría de campos, este hecho da indicios de como construír Lagrangianas invariantes supersimétricas, a saber tomando las componentes superiores F de los supercampos.

Para obtener las variaciones supersimétricas de los campos A, ψ y F, usaremos las siguientes identidades ([9] Pag 49) (Ver apéndice C.2):

$$\begin{aligned}
A\left(x\right) &= \left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} \\
\sqrt{2}\psi^{\alpha}\left(x\right) &= \left.D^{\alpha}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} \\
-4F\left(x\right) &= \left.D_{\alpha}D^{\alpha}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} \qquad (5.27)\\
\left[\bar D_{\dot\alpha}\,,D^{2}\right] &= 4iD^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\mu} \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

De tal manera que:

$$\begin{aligned}
\delta A\left(x\right) &= \left.\delta\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = i\left(\xi_{\alpha}Q^{\alpha}+\bar\xi^{\dot\alpha}\bar Q_{\dot\alpha}\right)\left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = i\left(\xi_{\alpha}D^{\alpha}+\bar\xi_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha}\right)\left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= i\xi_{\alpha}\left.D^{\alpha}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = i\sqrt{2}\xi\psi\left(x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\delta\psi^{\beta}\left(x\right) &= i\sqrt{2}\left(\xi_{\alpha}Q^{\alpha}+\bar\xi^{\dot\alpha}\bar Q_{\dot\alpha}\right)\left.D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = i\sqrt{2}\left(\xi_{\alpha}D^{\alpha}+\bar\xi_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha}\right)\left.D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= i\sqrt{2}\,\xi_{\alpha}\left.D^{\alpha}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} + i\sqrt{2}\,\bar\xi_{\dot\alpha}\left.\bar D^{\dot\alpha}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la naturaleza quiral del campo i.e. $\bar D^{\dot\alpha}\Phi=0$, se tiene que

$$\bar D^{\dot\alpha}D^{\beta}\Phi = \bar D^{\dot\alpha}D^{\beta}\Phi + D^{\beta}\bar D^{\dot\alpha}\Phi = \left\{\bar D^{\dot\alpha},D^{\beta}\right\}\Phi$$

con lo cual $\sqrt{2}\delta\psi^{\beta}\left(x\right)$ se escribe:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\delta\psi^{\beta}\left(x\right) &= i\frac{\sqrt{2}}{2}\,\xi_{\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\left.DD\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} + i\sqrt{2}\,\bar\xi_{\dot\alpha}\left\{\bar D^{\dot\alpha},D^{\beta}\right\}\left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= -i\frac{\sqrt{2}}{2}\,\varepsilon^{\beta\alpha}\xi_{\alpha}\left.DD\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} + 2i\sqrt{2}\,\bar\xi_{\dot\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot\alpha}\left.P_{\mu}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} \qquad (5.29)\\
&= \frac{-i\sqrt{2}}{2}\,\xi^{\beta}\left.DD\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} + 2i\sqrt{2}\,\bar\xi_{\dot\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot\alpha}\left.P_{\mu}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= 2i\sqrt{2}\xi^{\beta}F + 2i\sqrt{2}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot\alpha}\bar\xi_{\dot\alpha}\left(-i\partial_{\mu}\right)\left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
\sqrt{2}\delta\psi^{\beta}\left(x\right) &= 2\sqrt{2}\left(i\xi^{\beta}F + \bar\xi_{\dot\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot\alpha}\partial_{\mu}A\right) \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4\delta F\left(x\right) &= \left.\delta D_{\beta}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = i\left(\xi_{\alpha}D^{\alpha}+\bar\xi_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha}\right)\left.D_{\beta}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= i\xi_{\alpha}\left.D^{\alpha}D_{\beta}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} + i\bar\xi_{\dot\alpha}\left.\bar D^{\dot\alpha}D_{\beta}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= -\,i\bar\xi^{\dot\alpha}\left.\bar D_{\dot\alpha}D_{\beta}D^{\beta}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = -\,i\bar\xi^{\dot\alpha}\left(\left[\bar D_{\dot\alpha}\,,D^{2}\right]+D^{2}\bar D_{\dot\alpha}\right)\left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= -\,i\bar\xi^{\dot\alpha}\left[\bar D_{\dot\alpha}\,,D^{2}\right]\left.\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0} = 4\bar\xi^{\dot\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\mu}\left.D^{\alpha}\Phi\right|_{\theta=0,\,\bar\theta=0}\\
&= 4\sqrt{2}\bar\xi^{\dot\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\mu}\psi^{\alpha}\left(x\right) \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado además la condición (5.4). Con el resultado obtenido en (5.31) confirmamos lo mencionado anteriormente, es decir F transforma como una divergencia total.

5.4 Producto de Multipletes

Teniendo en cuenta la propiedad vista anteriormente para las componentes F de los supercampos quirales, se puede pensar en construír funciones Lagrangianas generales mediante el cálculo de tales componentes para diferentes productos de estos supercampos. Esta posibilidad resulta razonable debido al caracter clausurativo del producto de supercampos quirales[4]. Por lo tanto resulta conveniente obtener la forma explícita de tales productos en función de los campos componentes A, ψ y F Demostraremos además en esta sección la mencionada propiedad de clausura. Para ello basta con tener en cuenta la siguiente identidad ([9] Pag 39):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi\Psi) &= \left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi\right)\Psi \pm \Phi\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi\right) \qquad (5.32)\\ + &: \textit{Supercampos } \Phi \textit{ de paridad de Grassmann par}\\ - &: \textit{Supercampos } \Phi \textit{ de paridad de Grassmann impar} \end{aligned}$$

De lo cual se deduce inmediatamente lo siguiente para el caso de supercampos escalares Quirales:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi\Psi) = \left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi\right)\Psi + \Phi\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi\right) = 0 \qquad (5.33)$$

Es decir, se mantiene la propiedad (5.4), la cual define los supercampos quirales. De igual manera se puede proceder para productos de ordenes mayores. Por otro lado el producto de dos supercampos (5.14) expandidos en serie de Taylor está dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_1\Phi_2 &= \left[A_1(y) + \sqrt{2}\left[\theta_\alpha\psi_1^\alpha(y)\right] + (\theta_\alpha\theta^\alpha)F_1(y)\right]\left[A_2(y) + \sqrt{2}\left[\theta_\beta\psi_2^\beta(y)\right] + \left(\theta_\beta\theta^\beta\right)F_2(y)\right]\\ &= A_1A_2 + \sqrt{2}\theta_\beta\left(A_1\psi_2^\beta + A_2\psi_1^\beta\right) + (\theta_\alpha\theta^\alpha)(F_1A_2 + F_2A_1) + 2\left[\theta_\alpha\psi_1^\alpha(y)\right]\left[\theta_\beta\psi_2^\beta(y)\right] \end{aligned} \qquad (5.34)$$

El término $2\left[\theta_\alpha\psi_1^\alpha(y)\right]\left[\theta_\beta\psi_2^\beta(y)\right]$ en (5.34) puede ser reescrito como:

$$2\left[\theta_\alpha\psi_1^\alpha\right]\left[\theta_\beta\psi_2^\beta\right] = -2\theta_\alpha\theta_\beta\psi_1^\alpha\psi_2^\beta = \left(\frac{1}{2}\right)\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta)(\psi_1\psi_2) = -(\theta\theta)(\psi_1\psi_2) \qquad (5.35)$$

Donde hemos utilizado las identidades (C.2), (C.3) y (C.6). Reemplazando (5.35) en (5.34) tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi_1\Phi_2 &= A_1A_2 + \sqrt{2}\theta_\beta\left(A_1\psi_2^\beta + A_2\psi_1^\beta\right) + (\theta_\alpha\theta^\alpha)(F_1A_2 + F_2A_1 - \psi_1\psi_2) \Rightarrow && (5.36)\\ \Phi_1\Phi_2|_0 &= A_1A_2 && (5.37)\\ \Phi_1\Phi_2|_\theta &= A_1\psi_2^\beta + A_2\psi_1^\beta && (5.38)\\ \Phi_1\Phi_2|_{\theta\theta} &= F_1A_2 + F_2A_1 - \psi_1\psi_2 && (5.39) \end{aligned}$$

De igual manera se pueden realizar productos de ordenes superiores para supercampos[5]:

$$\begin{aligned} \acute{\Phi} &= \Phi_1\Phi_2\\ \Phi_1\Phi_2\Phi_3 &= \acute{\Phi}\Phi_3 \Rightarrow\\ \acute{\Phi}\Phi_3\Big|_0 &= \acute{A}A_3 = A_1A_2A_3 && (5.40)\\ \acute{\Phi}\Phi_3\Big|_\theta &= \acute{A}\psi_3^\beta + A_3\acute{\psi}^\beta = A_3A_2\psi_1^\alpha + A_3A_1\psi_2^\alpha + A_1A_2\psi_3^\alpha && (5.41)\\ \acute{\Phi}\Phi_3\Big|_{\theta\theta} &= \acute{F}A_3 + F_3\acute{A} - \acute{\psi}\psi_3\\ &= F_1A_2A_3 + F_2A_1A_3 - (\psi_1\psi_2)A_3\\ &\quad + F_3A_1A_2 - A_2(\psi_1\psi_3) - A_1(\psi_2\psi_3) && (5.42) \end{aligned}$$

[4] Es decir: El producto de supercampos quirales tambien lo es.

[5] Tendremos en cuenta hasta orden tres ya que es el máximo orden para productos de campos en Lagrangianas renormalizables.

Es importante anotar que las componentes cuadráticas de los productos construídos anteriormente, no contienen derivadas espacio-temporales de los campos F, ψ o A, lo cual implica que de ellos no se pueden derivar términos cinéticos para tales campos ([9] Cap 4 Pag 51 Secc 4-2). Para obtener tales términos debemos además tener en cuenta productos de la forma $\Phi\ \bar{\Phi}$ los cuales no conducen a supercampos quirales o antiquirales pero cuyas componentes superiores tambien transforman como divergencias totales. La forma general para este producto está dada por (ver apéndice C.3) [6]:

$$\Phi\bar{\Phi}\big|_{(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})} = \partial_\mu A \partial^\mu \bar{A} - \left(\frac{i}{2}\right)\left[\psi\left(\sigma^\mu\right)\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}\right] + F\left(x\right)\bar{F}\left(x\right) \tag{5.43}$$

Donde se pueden identificar claramente los términos cinéticos para el Boson escalar A y el espinor ψ los cuales corresponden a los respectivos términos en las Lagrangianas de Klein-Gordon y Dirac. Por otro lado teniendo en cuenta la ausencia de término cinético para F, se asume que esta componente no representa ningun campo real.

5.5 Superpotencial

Con base en los supercampos quirales, tenemos hasta ahora tres tipos de términos que pueden formar parte de una Lagrangiana supersimétrica

- Componentes superiores del supercampo quiral o de productos de éstos (que también son quirales.
- Términos análogos para el supercampo antiquiral
- Componente superior del producto de un campo quiral con un campo antiquiral, que genera términos cinéticos para los campo del supermultiplete quiral y antiquiral.

la acción supersimétrica de éstos términos se escribe

$$I = -\frac{1}{4}\int d^4x\ D^2\left(\Phi_i\Phi_j\Phi_k\ldots\right) - \frac{1}{4}\int d^4x\ \bar{D}^2\left(\bar{\Phi}_i\bar{\Phi}_j\bar{\Phi}_k\ldots\right) + \int d^4x\ D^2\bar{D}^2\left(\bar{\Phi}\Phi\right) \tag{5.44}$$

introduciendo la siguiente notación

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}D^2 &\equiv \int d^2\theta\ \ ;\ \ -\frac{1}{4}\bar{D}^2 \equiv \int d^2\bar{\theta} \\ \frac{1}{16}D^2\bar{D}^2 &= \frac{1}{16}\bar{D}^2D^2 = \frac{D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha}{16} = \frac{D_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}}{16} \equiv \int d^2\theta\ d^2\bar{\theta} \equiv \int d^4\theta \end{aligned}$$

definimos además por conveniencia

$$d^6s \equiv d^4x\ d^2\theta\ \ ;\ \ d^6\bar{s} \equiv d^4x\ d^2\bar{\theta}\ \ ;\ \ d^8z \equiv d^4x\ d^2\theta\ d^2\bar{\theta} \equiv d^4x\ d^4\theta$$

de modo que la acción más general (5.44) que se puede construír con supercampos quirales y antiquirales se puede reescribir como

$$I = \int d^6s\ W\left(\Phi\right) + \int d^6\bar{s}\ \bar{W}\left(\bar{\Phi}\right) + \int d^8z\ \bar{\Phi}_i\Phi_i \tag{5.45}$$

donde $W(\Phi)$ es un funcional de solo los supercampos quirales y es llamado el superpotencial. W se puede ver a su vez como una expansión compleja en productos de supercampos, de tal manera que

[6]Esta es la denominada Lagrangiana de Wess-Zumino.

sus componentes superiores constituyen los términos de interacción[7]. Tales componentes superiores se obtienen teniendo en cuenta los términos asociados al superpotencial en la acción Ecs. (5.44, 5.45) ([10] Pag 21, [5] Pag 65, [9] Pag 53)

$$\begin{aligned}
W &= W(\Phi) \;\; \text{(Superpotencial)} \\
-V_w(A,\psi,F) &= -\left(\frac{1}{4}\right) D^2 W(\Phi)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = -\left(\frac{1}{4}\right) D_\alpha D^\alpha W(\Phi)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\
&= -\left(\frac{1}{4}\right) D_\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_j} D^\alpha \Phi_j\right)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\
&= -\left(\frac{1}{4}\right) \left\{\left[D_\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_j}\right)\right](D^\alpha \Phi_j) + \frac{\partial W}{\partial \Phi_j} D_\alpha (D^\alpha \Phi_j)\right\}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\
&= -\left(\frac{1}{4}\right) \left\{\left[\frac{\partial}{\partial \Phi_i}\left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_j}\right)(D_\alpha \Phi_i)\right](D^\alpha \Phi_j) + \frac{\partial W}{\partial \Phi_j} D_\alpha (D^\alpha \Phi_j)\right\}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \qquad (5.46) \\
&= -\left(\frac{1}{4}\right) \left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}\right)(D_\alpha \Phi_i)(D^\alpha \Phi_j) + \frac{\partial W}{\partial \Phi_j} D_\alpha (D^\alpha \Phi_j)\right\}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\
V_w(A,\psi,F) &= \left(\frac{1}{2}\right) \psi_i \psi_j \left[\frac{\partial^2 W(\Phi \to A)}{\partial A_i \partial A_j}\right] - F_j \frac{\partial W(\Phi \to A)}{\partial A_j} \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

Donde A_j son las componentes de orden cero de los supercampos quirales. Recordando que existe en la acción , el complejo conjugado de este término, le sumamos a (5.46) su complejo conjugado y obtenemos:

$$V_w(A,\psi,F) = -\left(\bar{F}_j F_j + F_j \frac{\partial W}{\partial A_j} + \bar{F}_j \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_j}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} + CC\right) \qquad (5.48)$$

Donde el término $F_j \bar{F}_j$ proviene realmente del sector cinético (5.43), pero dado que estos campos no adquieren propagador, dichos términos tienen la forma de términos de interacción y por eso se colocan en el superpotencial, pero se debe tener cuidado de removerlo del término cinético para evitar un doble conteo. En la expresión anterior vemos que el último término representa las interacciones entre fermiones, donde las segundas derivadas de W respecto de los campos escalares A representan los acoplamientos de Yukawa. Por otro lado podemos simplificar los términos lineales en $\frac{\partial W}{\partial A_j}$ teniendo en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos F:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pounds}{\partial(\partial_\mu F_i)} - \frac{\partial \pounds}{\partial F_i} &= 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial V}{\partial F_i} = 0 \;,\; \frac{\partial V}{\partial \bar{F}_i} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{F}_i + \frac{\partial W}{\partial A_i} = 0 \;,\; F_i + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_i} = 0 \\
V_w(A,\psi,F) &= -\bar{F}_j F_j + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} + CC\right) \qquad (5.49)
\end{aligned}$$

en realidad teniendo en cuenta las ecuaciones de Euler Lagrange, los campos $F, \bar{F}$ se pueden remover completamente del superpotencial lo que refuerza su carácter de campos auxiliares. Dado que los terminos $\bar{F}_j F_j$ estan constituídos por campos escalares se deduce que forman parte del sector escalar del potencial supersimétrico el cual puede eventualmente originar procesos de violación espontánea de simetría.
Al definir modelos específicos tendremos en cuenta la renormalizabilidad de estos, de tal manera que los productos de supercampos van hasta orden tres:

$$W(\Phi) = n_i \Phi_i + \left(\frac{1}{2}\right) m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \qquad (5.50)$$

[7]De hecho los términos $\Phi\bar{\Phi}$ o términos similares tambien aportan al Potencial SUSY, como lo veremos mas adelante cuando calculemos la Lagrangiana SUSY invariante gauge general

De acuerdo con la expresión anterior, los campos F y los acoplamientos de Yukawa estan dados por:

$$\begin{aligned}
-\bar{F}_i &= \frac{\partial W(\Phi \to A)}{\partial A_i} = n_i + m_{ij}A_j + y_{ijk}A_jA_k \qquad (5.51)\\
M_{ij} &= \frac{\partial^2 W(\Phi \to A)}{\partial A_i \partial A_j} = m_{ij} + 2y_{ijk}A_k\\
\frac{\partial^3 W(\Phi \to A)}{\partial A_i \partial A_j \partial A_k} &= 2y_{ijk} \qquad (5.52)
\end{aligned}$$

el Lagrangiano generado por los campos quirales y antiquirales se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\pounds &= \pounds_{cin} + \pounds_{Yuk} + \pounds_{escalar} \quad ; \quad \pounds_{Yuk} = -\frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j + C.C.\\
-\pounds_{escalar} &= V_S\left(A_i, \bar{A}_j\right) = \bar{F}_iF_i
\end{aligned}$$

M_{ij} expresa la matriz de masa para los fermiones cuando se calcula en el mínimo del potencial escalar. Por otro lado, la matriz a de masa bosónica viene dad por

$$M_B^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_S}{\partial \bar{A}_i \partial A_j} & \frac{\partial^2 V_S}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j} \\ \frac{\partial^2 V_S}{\partial A_i \partial A_j} & \frac{\partial^2 V_S}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j} \end{pmatrix}$$

los términos de masa toman la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_S}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{A}_i \partial A_k}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{A}_j \partial \bar{A}_k}\right) = \left(\bar{M}M\right)_{ij}\\
\frac{\partial^2 V_S}{\partial \bar{A}_i \partial A_j} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial A_j \partial A_k}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_k}\right) = \left(\bar{M}M\right)_{ij} = \left(M_F^2\right)_{ij}\\
\frac{\partial^2 V_S}{\partial A_i \partial A_j} &= -\left(\frac{\partial^3 W}{\partial A_i \partial A_j \partial A_k}\right)F_k \quad ; \quad \frac{\partial^2 V_S}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j} = -\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \bar{A}_i \partial \bar{A}_j \partial \bar{A}_k}\right)\bar{F}_k
\end{aligned}$$

y encontramos que

$$TrM_B^2 = 2Tr\left(\bar{M}M\right) = 2TrM_F^2$$

en el estado base supersimétrico $V = 0$, y se obtiene $F_i = \bar{F}_i = 0$, y los bosones y fermiones adquieren la misma masa, lo cual es consistente con la relación

$$\left[P_\mu P^\mu, Q_\alpha\right] = \left[P_\mu P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = 0$$

cuando supersimetría se rompe espontáneamente estas matrices de masa deben ser diagonalizadas y las diferentes componentes de un supermultiplete adquieren diferente masa.

5.6 Supercampo Vectorial y Campos Gauge

Si se desea obtener supercampos que contengan campos gauge neutros como el de la electrodinámica, es necesario en primera instancia, que tales supercampos contengan componentes reales. Como consecuencia estos deben cumplir la condición (5.6). La forma general de este tipo de supercampo escalar está dada por ([9] Cap 5 Pag 59):

$$\begin{aligned}
V &= C(x) + i\left[\theta\chi(x) - \bar{\theta}\bar{\chi}(x)\right] + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left[M(x) + iN(x)\right] - \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left[M(x) - iN(x)\right]\\
&\quad -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left[\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\chi(x)\right] - i\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\theta\left[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right]\\
&\quad +\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right] \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

Donde C, D, M , N y A_μ son campos reales. Dimensionalmente en unidades de energía partiendo de que las dimensiones de $[A_\mu]=1$, se obtiene que $[V]=0$, y los campos tienen las siguientes dimensiones $[C]=0$, $[\chi]=[\bar{\chi}]=\frac{1}{2}$, $[\lambda]=\left[\bar{\lambda}\right]=\frac{3}{2}$, $[M]=[N]=1$, $[D]=2$. La expresión anterior está basada en la generalización del supercampo vectorial constituído por la suma de un supercampo quiral y su conjugado antiquiral, teniendo en cuenta las expresiones (5.4) y (5.5). Por otro lado resulta claro que la expresión (5.53) no está unívocamente definida ya que podemos hacer la siguiente transformación manteniendo el caracter real de V ([9] Pag 60 cap 5)[8]:

$$\acute{V}=V+\left(\frac{i}{g}\right)\left(\Phi-\bar{\Phi}\right) \tag{5.54}$$

Tomando la notación de las Ecs. (5.17, 5.26) para las componentes de los campos quiral y antiquiral, vemos que esta transformación conlleva a las siguientes transformaciones para los campos en V :

$$\begin{aligned}
\acute{C} &= C\left(x\right)+\frac{i}{g}\left(A-\bar{A}\right)\ ,\ \acute{\chi}=\chi+\frac{\sqrt{2}}{g}\psi\ ,\ \acute{M}=M+\frac{1}{g}\left(\bar{F}+F\right) && (5.55)\\
\acute{N} &= N+\frac{i}{g}\left(\bar{F}-F\right)\ ,\ \acute{A}_\mu=A_\mu+\frac{1}{g}\partial_\mu\left(A+\bar{A}\right)\ ,\ \acute{D}=D && (5.56)\\
\acute{\lambda} &= \lambda\ ,\ \acute{\chi}=\chi+\frac{\sqrt{2}}{g}\psi && (5.57)
\end{aligned}$$

Donde identificamos inmediatamente la típica transformación gauge no homogenea para el campo bosónico A_μ y además vemos que λ y D se mantienen invariantes. A estos dos campos podemos adicionarle el tensor de campo $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ el cual resulta invariante dada la manera como transforma A_μ. Adicionalmente utilizando podemos elegir A, $\bar{A}$ de tal forma que $C'=0$, elegir $\psi,\bar{\psi}$ de tal forma que $\chi',\bar{\chi}'$ se anulen y elegir $F,\bar{F}$ de tal forma que se anulen M y N.

$$C+\frac{i}{g}\left(A-\bar{A}\right)=0,\quad \chi+\frac{\sqrt{2}}{g}\psi=0\quad etc.$$

esta escogencia conocida como gauge de Wess-Zumino hace que solo sobrevivan los campos invariantes gauge $\left(F_{\mu\nu},\lambda,\bar{\lambda},D\right)$. Estos resultados nos inducen a definir (5.54) como una generalización supersimétrica de las transformaciones de gauge abelianas de las teorías de campo bosónicas. Los campos $\left(\lambda_\alpha,\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}F_{\mu\nu},D\right)$ son invariantes gauge y como veremos más adelante, este conjunto de campos constituye además un supermultiplete irreducible bajo transformaciones supersimétricas. Para comprobar la afirmación anterior debemos obtener las variaciones de cada campo y ver que ellos se transforman unos en función de los otros de manera independiente. Las variaciones de los campos se obtienen de una manera similar al caso de los campos del multiplete quiral. Por lo tanto es necesario en primera instancia escribir los campos del supercampo vectorial como componentes de V, fácilmente se obtiene (antes de aplicar el gauge de Wess Zumino)

$$\begin{aligned}
V|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= C\ \ ;\ \ D_\alpha V|_{\theta=\bar{\theta}=0}=i\chi_\alpha\ \ ;\ \ \bar{D}_{\dot{\alpha}}V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=-i\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\\
D^2V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= -2i\left(M+iN\right)\ \ ;\ \ \bar{D}^2D_\alpha V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=-\bar{\partial}^2D_\alpha V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=4i\lambda_\alpha\\
D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= -\partial^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=-4i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\\
D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \partial^\alpha\bar{D}^2D_\alpha V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=8D\\
\left[D_\alpha,\bar{D}_{\dot{\alpha}}\right]V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= 2\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=-2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}A_\mu\\
D^\beta\bar{D}^2D_\alpha V\Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \partial^\beta\bar{D}^2D_\alpha V\Big|_{\theta=\bar{\theta}=0}=4\delta^\beta{}_\alpha D-2i\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu} && (5.58)
\end{aligned}$$

[8]Donde g corresponde a la constante de acoplamiento gauge.

Con lo cual se pueden calcular las variaciones de los campos del supercampo vectorial. Escribiremos solo las variaciones asociadas a los campos invariantes gauge ([9] Pags 60-61):

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_\alpha &= i\theta_\alpha D - \frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta F_{\mu\nu} \\
\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} &= -i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} D - \frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} F_{\mu\nu} \qquad (5.59)\\
\delta F_{\mu\nu} &= -i\left[\partial_\mu\left(\theta\sigma_\nu\bar{\lambda} - \lambda\sigma_\nu\bar{\theta}\right) - \partial_\nu\left(\theta\sigma_\mu\bar{\lambda} - \lambda\sigma_\mu\bar{\theta}\right)\right] \\
\delta D &= \partial_\mu\left(\theta\sigma^\mu\bar{\lambda} - \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\lambda\right) \qquad (5.60)
\end{aligned}$$

Donde vemos de nuevo que la componente de orden superior D transforma como una divergencia total, es decir puede constituír términos en lagrangianas supersimétricas. Estas variaciones también nos muestran que el multiplete definido por $\left(\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} F_{\mu\nu}, D\right)$ constituye un supermultiplete irreducible bajo transformaciones supersimétricas y además invariante gauge.

Las transformaciones de los otros campos no son particularmente elucidantes y se pueden ver en ([9] Pags 60-61). Además, dado que los otros campos se pueden absorber utilizando el gauge adecuado, dichas transformaciones no son muy relevantes.

5.7 Supermultiplete Intensidad de Campo

De nuevo emulando el procedimiento seguido para los campos quirales, la idea es encontrar los campos del supermultiplete vectorial a partir de un supercampo que los genere como componentes del mismo, las cuales se extraerían utilizando derivadas parciales sucesivas. Teniendo en cuenta que los campos de menor dimensionalidad son $[\lambda_\alpha] = \left[\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\right] = \frac{3}{2}$ en tanto que $[D] = [F_{\mu\nu}] = 2$, esto sugiere que el supercampo que contiene solo a los campos del supermultiplete sea espinorial y lo denotaremos como W_α. Usando un análisis dimensional (teniendo en cuenta que $[D_\alpha] = [D_{\dot{\alpha}}] = \frac{1}{2}$), se espera que el supercampo W_α genere las componentes λ_α como $W_\alpha|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \sim \lambda_\alpha$, y que los campos D, $F_{\mu\nu}$ se generen ambos a través de primeras derivadas. Por otro lado, tomando el subconjunto apropiado de las relaciones (5.58) que contiene solo a los elementos del supermultiplete, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{D}^2 D_\alpha V\big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} &= -4i\lambda_\alpha \\
D^\alpha\left(\bar{D}^2 D_\alpha V\right)\big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} &= -8D \\
D^\beta\left(\bar{D}^2 D_\alpha V\right)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} &= -4\delta^\beta_{\ \alpha} D + 2i\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \beta} F_{\mu\nu} \qquad (5.61)
\end{aligned}$$

Lo cual nos indica que $W_\alpha \equiv \bar{D}^2 D_\alpha V$ puede ser el supercampo buscado[9]. Nótese que este supercampo es quiral i.e. $\bar{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha = 0$, y de dimensionalidad 3/2, es decir espinorial. A priori, se puede pensar que también se requiere el supercampo conjugado $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ a fin de generar $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$. Sin embargo teniendo en cuenta que $\left[D^2\right] = 0$, se puede pensar en generar $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ aplicando este operador sobre W_α

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}D^2 W_\alpha\bigg|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= -\frac{1}{4}D^2\bar{D}^2 D_\alpha V\bigg|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -\frac{1}{4}D^2\left[\bar{D}^2, D_\alpha\right]V\bigg|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
-\frac{1}{4}D^2 W_\alpha\bigg|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= -i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}} V\big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -4\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

De modo que W_α genera todo el supermultiplete intensidad de campo sin recurrir a su conjugado. Si este es el supercampo que contiene solo al supermultiplete en cuestión, debe cumplir la condición de

[9]Ya que basta con realizar derivaciones covariantes sucesivas para hallar cada elemento del multiplete como ocurre en (5.27). Una derivada covariante mapea un supercampos en otro supercampo.

invarianza gauge. Esto se comprueba fácilmente teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned}\acute{W}_\alpha &= \bar{D}^2 D_\alpha \left[V + i\left(\Lambda - \bar{\Lambda}\right)\right] = \bar{D}^2 D_\alpha V + i\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda \\ &= W_\alpha + i\left[\bar{D}^2, D_\alpha\right]\Lambda = W_\alpha - 4i\left(\sigma^\mu\right)^*_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \bar{D}^{\dot{\alpha}}\Lambda = W_\alpha \Rightarrow \\ \acute{W}_\alpha &= W_\alpha \end{aligned} \tag{5.62}$$

de modo que W_α es un supercampo espinorial quiral invariante gauge, por lo tanto podemos escribir

$$W_\alpha = \left(W_\alpha|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}\right) + \left(\theta_\beta\, D^\beta W_\alpha\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}\right) - (\theta\theta)\left[\left(\frac{1}{4}\right) D_\beta D^\beta W_\alpha\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}\right] \tag{5.63}$$

O equivalentemente:

$$W_\alpha = -4i\lambda_\alpha + \theta_\beta\left(-4\delta_\alpha^{\ \beta} D + 2i\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \beta} F_{\mu\nu}\right) - 4\,(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{5.64}$$

Donde hemos utilizado la identidad ([9] Pag 62):

$$-\left(\frac{1}{4}\right) D_\beta D^\beta W_\alpha\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = -4\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{5.65}$$

5.7.1 Término Cinético para W_α

Dado que los supercampos W_α y $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ son quiral y antiquiral respectivamente se deduce que sus componentes de orden superior constituyen términos de una Lagrangiana es decir:

$$\pounds_{W_\alpha} = -\frac{1}{4}\left(D^2 W_\alpha W^\alpha|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} + \bar{D}^2\bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}}|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}\right) \tag{5.66}$$

Para calcular estos términos debemos tener en cuenta lo siguiente (Ver apéndice C.3.1):

$$D^2 W_\alpha W^\alpha = 2\left(D^2 W_\alpha\right) W^\alpha - 2\left(D_\beta W_\alpha D^\beta W^\alpha\right) \tag{5.67}$$

Donde podemos reemplazar (5.65) y (5.64) de tal manera que:

$$-\frac{1}{4}\, D^2 W_\alpha W^\alpha|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = 32\left[-i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \frac{D^2}{2} - \frac{1}{4}\left({}^*F^{\rho\tau}F_{\rho\tau} + F^{\rho\tau}F_{\rho\tau}\right) + \text{H-C}\right] \tag{5.68}$$

Donde hemos utilizado las identidades (C.6) y además, las siguientes expresiones ([5] Pag 60, [9] Cap 1 Pag 8, [1] Cap 11 pag 459. Ver Apéndice B):

$$\bar{\sigma}^\nu\,\sigma^\tau\bar{\sigma}^\rho + \bar{\sigma}^\rho\,\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu = 2\left(\eta_{\tau\rho}\sigma_\nu + \eta_{\tau\nu}\sigma_\rho - \eta_{\nu\rho}\sigma_\tau\right) \tag{5.69}$$

$$\bar{\sigma}^\nu\,\sigma^\tau\bar{\sigma}^\rho - \bar{\sigma}^\rho\,\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu = 2i\varepsilon^{\nu\tau\rho\alpha}\sigma_\alpha \tag{5.70}$$

$$\bar{\sigma}^\nu\,\sigma^\tau\bar{\sigma}^\rho = \left(\eta_{\tau\rho}\sigma_\nu + \eta_{\tau\nu}\sigma_\rho - \eta_{\nu\rho}\sigma_\tau + i\varepsilon^{\nu\tau\rho\alpha}\sigma_\alpha\right) \tag{5.71}$$

$$Tr\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\,\sigma^\tau\bar{\sigma}^\rho\right) = 2\left(-\eta^{\nu\rho}\eta^{\tau\mu} + \eta^{\rho\tau}\eta^{\nu\mu} + \eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\mu} + i\varepsilon^{\nu\tau\rho\mu}\right) \tag{5.72}$$

$${}^*F^{\mu\nu} = \left(\frac{i}{2}\right)\varepsilon^{\mu\nu rs}F_{rs} \tag{5.73}$$

Vemos de esta manera que (5.68) contiene los términos cinéticos de los cuales se deducen las ecuaciones de Maxwell para A_μ y de Dirac para los espinores $\lambda, \bar{\lambda}$; siendo estos campos no masivos. Para el campo D no hay un término cinético, de lo cual deducimos que este no representa un campo físico, de manera similar al caso de F.

5.8 Invarianza Gauge Supersimétrica

5.8.1 Términos Cinéticos Invariantes Gauge (Caso Abeliano)

Los términos del Lagrangiano invariante supersimétrico que provienen de los campos quirales y antiquirales, fueron construídos antes que el supercampo vectorial, de modo que en general no cumplen la simetría gauge de éste último. Si por otro lado, queremos incorporar un principio gauge a la teoría, es necesario que todos los términos del Lagrangiano supersimétrico sean invariantes gauge. Las transformaciones de gauge homogéneas expresadas en una teoría gauge local abeliana como la QED, pueden ser generalizadas al caso de Supercampos Quirales Φ_j [10], de la siguiente manera:

$$\acute{\Phi}_j = e^{-iq_j\Lambda}\Phi_j \ , \ \bar{D}_{\alpha}\Lambda = 0 \tag{5.74}$$

Es decir Λ debe ser un Supercampo Quiral, ya que de esta forma garantizamos que el nuevo campo gauge también es quiral. La aparición de campos gauge se traslada a la Supersimetría de manera semejante a los casos no supersimétricos. Se puede observar que el término cinético $\bar{\Phi}\Phi$ no cumple con la invarianza Gauge:

$$\overline{\acute{\Phi}_j}\acute{\Phi}_j = \bar{\Phi}_j e^{iq_j\bar{\Lambda}} e^{-iq_j\Lambda}\Phi_j = \bar{\Phi}_j e^{iq_j\left(\bar{\Lambda}-\Lambda\right)}\Phi_j \neq \bar{\Phi}_j\Phi_j$$

Debemos introducir entonces un supercampo vectorial gauge y además modificar el término cinético (5.43) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_j\Phi_j &\longrightarrow \bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j \\ V &= \bar{V} \end{aligned} \tag{5.75}$$

Con lo cual obtenemos un término cinético invariante gauge:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j\right)' &= \bar{\Phi}_j e^{i\left(q_j\bar{\Lambda}\right)} e^{\left(q_j g \acute{V}\right)} e^{-i\left(q_j\Lambda\right)}\Phi_j = \bar{\Phi}_j e^{q_j\left[gV + i\left(\Lambda-\bar{\Lambda}\right) - i\left(\Lambda-\bar{\Lambda}\right)\right]}\Phi_j \Rightarrow \\ \left(\bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j\right)' &= \bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j \end{aligned} \tag{5.76}$$

Donde hemos utilizado las transformaciones gauge (5.74) y (5.54). Obtendremos ahora la forma explícita de (5.75) en el gauge SUSY de Wess-Zumino, donde se hacen cero todos los campos diferentes a los elementos del supermultiplete intensidad de campo $\left(F_{\mu\nu}, \lambda_{\alpha}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, D\right)$. Es decir:

$$C = M = N = \chi = \bar{\chi} = 0 \Rightarrow \tag{5.77}$$

$$V = -\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu} + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D \tag{5.78}$$

De tal manera que (Ver apéndice C.3.2):

$$V^2 = \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 A^{\mu}A_{\mu} \ , \ V^3 = 0 \Rightarrow \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \bar{\Phi}_j\left[1 + q_j g V + \left(\frac{1}{2}\right) q_j^2 g^2 V^2\right]\Phi_j\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\ &= \left[\bar{\Phi}_j\Phi_j + q_j g\bar{\Phi}V\Phi_j + \left(\frac{1}{2}\right) q_j^2 g^2\bar{\Phi}V^2\Phi_j\right]\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \Rightarrow \\ \bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \left(\bar{D}_{\mu}\bar{A}\right)\left(D^{\mu}A\right) + i\left(D_{\mu}\psi\right)\sigma^{\mu}\bar{\psi} + \frac{iq_j g}{\sqrt{2}}\left[\bar{A}\left(\lambda\psi\right) - \left(\bar{\psi}\bar{\lambda}\right)A\right] + \frac{q_j g\bar{A}AD}{2} + F\bar{F} \\ D_{\mu} &= \left(\partial_{\mu} + i\frac{q_j g A_{\mu}}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.80}$$

[10] Utilizamos los subindices j para representar los diferentes campos de materia.

Dada la manera como hemos construído el término (5.79) queda garantizada su invarianza gauge. Tal como en las teorías de campo tradicionales, la exigencia del gauge local condujo a un acople entre los campos componentes del supercampo vectorial, con los campos componentes de los supercampos quiral y antiquiral. Finalmente, un aspecto importante para destacar lo constituye el nuevo término de interacción entre los campos físicos del supercampo quiral Φ_j y el espinor λ del multiplete gauge[11].

5.8.2 Términos Cinéticos del tipo $\Phi\bar{\Phi}$ Invariantes Gauge (Caso No Abeliano)

Para el caso de una teoría de campos no Abeliana construída con el algebra de Lie general:

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c \tag{5.81}$$

Podemos generalizar de manera semejante al caso Abeliano la transformación homogenea para Supercampos quirales:

$$\begin{aligned} \acute{\Phi}_i &= \left[e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\right]_{ij}\Phi_j \ , \ \bar{D}_\alpha\left(T\cdot\Lambda\right) = 0 \\ i &: \text{ índice de grados de libertad internos} \end{aligned} \tag{5.82}$$

Donde $T^a\Lambda^a$ debe ser un supercampo quiral para mantener el carácter quiral bajo transformaciones gauge. Por otro lado la generalización del término cinético para Φ está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i\Phi_i &\to \bar{\Phi}_i\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{ij}\Phi_j \\ V &= T_aV_a : \text{Campo Vectorial Gauge, No Abeliano.} \end{aligned} \tag{5.83}$$

Donde la invarianza gauge está garantizada siempre y cuando los campos V_a transformen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left[e^{qg\left(T\cdot\acute{V}\right)}\right]_{ij} &= \left[e^{-iq\left(\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}\right)}\right]_{il}\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{lm}\left[e^{iq(T\cdot\Lambda)}\right]_{mj} \\ \left[e^{-qg\left(T\cdot\acute{V}\right)}\right]_{ij} &= \left[e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\right]_{il}\left[e^{-qg(T\cdot V)}\right]_{lm}\left[e^{iq\left(\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}\right)}\right]_{mj} \end{aligned} \tag{5.84}$$

transformación que es de la forma $A' = UAU^\dagger = UAU^{-1}$, y que se reduce adecuadamente en el caso abeliano. Con estas reglas de transformación se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Phi}_i'\right)\left[e^{gq(T\cdot V)}\right]_{ij}'\Phi_j' &= \left(\bar{\Phi}_k\right)\left[e^{iq\left(\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}\right)}\right]_{ki}\left[e^{-iq\left(\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}\right)}\right]_{il}\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{lm}\left[e^{iq(T\cdot\Lambda)}\right]_{mj}\left[e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\right]_{jn}\Phi_n \\ &= \bar{\Phi}_k\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{km}\Phi_m \end{aligned} \tag{5.85}$$

Es decir, hemos obtenido la invarianza gauge buscada. Por otro lado, las componentes superiores de (5.83) en el gauge de Wess-Zumino estan dadas por (Ver apéndice C.3.3):

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_k\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{km}\Phi_m\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= D_\mu A_m D^\mu \bar{A}_m - i\psi_m\left(\sigma^\mu\right)\bar{D}_\mu\bar{\psi}_m + \frac{iqg}{\sqrt{2}}\left[\lambda^a\bar{A}_k\left(T^a\right)_{km}\psi_m - \bar{\psi}_k\left(T^a\right)_{km}A_m\bar{\lambda}^a\right] \\ &+ \bar{F}_mF_m + \frac{qg}{2}\bar{A}_k\left(T^a\right)_{km}A_mD^a \end{aligned} \tag{5.86}$$

Destacamos de nuevo la aparición de un término de interacción entre los fermiones ψ del supermultiplete quiral y los elementos λ del supermultiplete gauge. Estos últimos son los denominados Gauginos, ya que existe una partícula de éstas por cada Bosón Gauge. Por otro lado, los dos últimos términos formarán parte del potencial escalar gauge supersimétrico, dado que éstos no definen ninguna evolución temporal para los campos F, A y D (ningún propagador), es también usual en este caso como en el caso abeliano, colocar estos términos en el superpotencial ya que son términos de interacción, aunque debe tenerse cuidado con el doble conteo (recuérdese que en el caso abeliano solo aparecía el término $\bar{F}F$).

[11] Dado que este espinor es compañero de multiplete del campo gauge A_μ asociado a los fotones, este ha recibido el nombre de "Fotino".

5.8.3 Derivadas covariantes gauge supersimétricas

Para terminar la construcción completa de los términos cinéticos debemos construír el multiplete gauge, con el cual se obtiene la evolución temporal de los campos gauge. Este objetivo solo se logra despues de una construcción general de derivadas covariantes Gauge-Supersimétricas. Definiremos tales derivadas de la siguiente manera ([5] Pag 77, [9] cap 7 pag 86):

$$\nabla_A \ , \ A = \alpha, \dot{\alpha}, \mu \tag{5.87}$$

Las cuales tienen la siguiente regla de transformación gauge:

$$\begin{aligned} (\nabla_A \Phi)' &= e^{-iq(T\cdot\Lambda)} (\nabla_A \Phi) \\ &= e^{-iq(T\cdot\Lambda)} \nabla_A e^{iq(T\cdot\Lambda)} \Phi' = \nabla'_A \Phi' \Rightarrow \\ \nabla'_A &= e^{-iq(T\cdot\Lambda)} \nabla_A e^{iq(T\cdot\Lambda)} \end{aligned} \tag{5.88}$$

A partir de (5.88), debemos encontrar la forma general de ∇_A para cada índice en (5.87). Teniendo en cuenta que las funciones $T \cdot \Lambda$ y $\bar{T} \cdot \bar{\Lambda}$ son quiral y antiquiral respectivamente llegamos a las siguientes identidades (ver apéndice C.3.4):

$$\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, e^{iqT\cdot\Lambda}\right] = 0 \Rightarrow \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{iqT\cdot\Lambda} = e^{iqT\cdot\Lambda} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Rightarrow e^{-iqT\cdot\Lambda} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{iqT\cdot\Lambda} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \tag{5.89}$$

$$\left[D_\alpha, e^{-iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}}\right] = 0 \Rightarrow D_\alpha e^{-iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}} = e^{-iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}} D_\alpha \Rightarrow e^{iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}} D_\alpha e^{-iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}} = D_\alpha \tag{5.90}$$

De tal manera que podemos realizar la siguiente escogencia:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\alpha}} &= \bar{D}_{\dot{\alpha}} \\ \nabla_\alpha &= e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)} D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)} \end{aligned} \tag{5.91}$$

Ya que estas cumplen la regla de transformación (5.88):

$$\nabla'_{\dot{\alpha}} = e^{-iqT\cdot\Lambda} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{iqT\cdot\Lambda} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} = \nabla_{\dot{\alpha}} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned} \nabla'_\alpha &= e^{-gq\bar{T}\cdot\bar{V}'} D_\alpha e^{gq\bar{T}\cdot\bar{V}'} = e^{-iqT\cdot\Lambda} e^{-gq\bar{T}\cdot\bar{V}} e^{iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}} D_\alpha e^{-iq\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}} e^{gq\bar{T}\cdot\bar{V}} e^{iqT\cdot\Lambda} \\ &= e^{-iqT\cdot\Lambda} e^{-gq\bar{T}\cdot\bar{V}} D_a e^{gq\bar{T}\cdot\bar{V}} e^{iqT\cdot\Lambda} \\ \nabla'_\alpha &= e^{-iqT\cdot\Lambda} \nabla_\alpha e^{iqT\cdot\Lambda} \end{aligned} \tag{5.93}$$

Donde hemos utilizado el caracter hermítico de T y V y las reglas de transformación (5.84). Para definir la derivada ∇_μ debemos tener en cuenta lo siguiente (ver apéndice C.3.4):

$$\{\nabla_a, \nabla_{\dot{\alpha}}\}' = e^{-iqT\cdot\Lambda} \{\nabla_a, \nabla_{\dot{\alpha}}\} e^{iqT\cdot\Lambda}$$

Teniendo en cuenta que los espinores de segundo rango con índices mezclados se comportan como cuadrivectores (ver Ec. 2.59), y que las derivadas covariantes gauge-supersimétricas deben formar una representación del álgebra SUSY (4.2); podemos definir:

$$\{\nabla_a, \nabla_{\dot{\alpha}}\} \equiv -2i\nabla_{\alpha\dot{\alpha}} = -2i \left(\sigma^\mu\right)_{a\dot{\alpha}} \nabla_\mu \tag{5.94}$$

Donde hemos escogido los coeficientes en consistencia con el álgebra SUSY (4.2). Tenemos de esta manera una generalización invariante gauge del algebra supersimétrica:

$$\{\nabla_a, \nabla_{\dot{\alpha}}\} = -2i \left(\sigma^\mu\right)_{a\dot{\alpha}} \nabla_\mu \tag{5.95}$$

$$\{\nabla_a, \nabla_\beta\} = \left\{\nabla_{\dot{\alpha}}, \nabla_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{5.96}$$

Teniendo definida una representación de las derivadas covariantes podemos inmediatamente encontrar los elementos de la conección afín asociada a las transformaciones gauge supersimétricas (Ver apéndice C.3.4):

$$\begin{aligned} \nabla_A F &= (D_A - i\Gamma_A)\, F \Rightarrow \\ \Gamma_{\dot{\alpha}} &= 0\ ,\ \Gamma_a = ie^{-gq(\bar{T}\cdot\bar{V})}\left(D_\alpha e^{gq(\bar{T}\cdot\bar{V})}\right) \qquad (5.97) \\ \Gamma_\mu &= \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}_\nu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Gamma_a\right) \qquad (5.98) \end{aligned}$$

De tal manera que en el caso Abeliano, tenemos para Γ_a la siguiente expresión ([5] pag 81):

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= ie^{-gq\bar{V}}\left(D_\alpha e^{gq\bar{V}}\right) \Rightarrow \\ \Gamma_a &= iqg\left(D_\alpha V\right) \qquad (5.99) \end{aligned}$$

5.8.4 Extensión no abeliana de W_α y términos cinéticos para el supermultiplete gauge

Teniendo en cuenta la definición Abeliana para W_a (5.62), la expresión (5.99) nos lleva a definir la siguiente generalización no Abeliana del multiplete intensidad de Campo:

$$W_\alpha = -\frac{i}{qg}\bar{D}^2\left(\Gamma_\alpha\right) = \frac{1}{qg}\bar{D}^2\left[e^{-gqT\cdot V}\left(D_\alpha e^{gqT\cdot V}\right)\right] \qquad (5.100)$$

El cual tiene la siguiente regla de transformación (ver apéndice C.3.5):

$$W'_\alpha = e^{-iq(T\cdot\Lambda)}W_\alpha e^{iq(T\cdot\Lambda)} \qquad (5.101)$$

La cual nos indica que W_a transforma de manera homogénea, equivalentemente a las derivadas covariantes. El término cinético del Lagrangiano SUSY para los campos gauge No Abelianos se obtiene como en el caso Abeliano: hallando las componentes superiores del escalar $W_\alpha W^\alpha$. En este caso es preferible expandir W_α hasta orden cuadrático, teniendo en cuenta que a partir de potencias cúbicas en V todos los productos se anulan (C.32 y C.33), ya que la expresión completa para W_α en función de los campos en V es bastante compleja. Para ello es más conveniente parametrizar la Ec. (5.100), de la forma

$$W_\alpha = T^a W^a_\alpha = -\frac{i}{qg}T^a\bar{D}^2\left(\Gamma^a_\alpha\right) = \frac{1}{qg}\bar{D}^2\left[e^{-gqT\cdot V}\left(D_\alpha e^{gqT\cdot V}\right)\right]$$

De acuerdo con lo anterior tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{qg}T^a\Gamma^a_\alpha &= \left(\frac{1}{qg}\right)e^{-qgT\cdot V}\left(D_\alpha e^{qT\cdot V}\right) \\ &= D_\alpha T^a V^a + \left(\frac{qg}{2}\right)\left[T^a, T^b\right]D_\alpha V^a V^b + ... \\ &= T^c\left[D_\alpha V^c + \left(\frac{iqg}{2}\right)f^{abc}\left(D_\alpha V^a\right)V^b + ...\right] \Rightarrow \\ -\frac{i}{qg}\Gamma^c_\alpha &= D_\alpha V^c + \left(\frac{iqg}{2}\right)f^{abc}\left(D_\alpha V^a\right)V^b + ... \Rightarrow \qquad (5.102) \\ W^a_\alpha &= -\frac{i}{qg}\bar{D}^2\left(\Gamma^a_\alpha\right) = \bar{D}^2\left(D_\alpha V^c\right) - \left(\frac{iqg}{2}\right)f^{abc}\bar{D}^2\left(V^b\left(D_\alpha V^a\right)\right) + ... \qquad (5.103) \end{aligned}$$

Vemos en (**??**) un primer término correspondiente a la parte Abeliana dada por (5.64):

$$W^c_{\beta\,(\text{Abeliano})} = -4i\lambda^c_\beta + \theta_\gamma\left(-4\delta^\gamma_\beta D^c + 2i\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)^\gamma_\beta F^c_{\mu\nu}\right) - 4\left(\theta\theta\right)\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\left(\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right)^c$$

El segundo término corresponde a la generalización No Abeliana de W_α. Este está dado por: (Ver Apéndice C.3.5):

$$\left(\frac{iqg}{2}\right) f^{abc} \bar{D}^2 \left(V^b \left(D_\beta V^a\right)\right) =$$

$$\left(\frac{iqg}{2}\right) f^{abc} \left\{ \begin{array}{l} -i \left[\partial_\alpha \left(A^{\mu b} A^a_\mu\right) + \partial^\tau \left(A^a_\alpha A^b_\tau - A^b_\alpha A^a_\tau\right) + i\varepsilon^{\tau\nu\mu}{}_\alpha \partial_\tau \left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\right] \theta^2 \left(\sigma^c\right. \\ \quad -2i \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} \left[A^b_\mu \left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\gamma}} - \left(\bar{\lambda}^b\right)^{\dot{\gamma}} A^a_\mu\right] \theta^2 + 2 \left(\sigma^\nu\right)^{\dot{\gamma}}_\alpha \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} \theta^\alpha A^b_\nu \end{array}\right.$$

De esta manera tenemos:

$$\begin{aligned} W^c_{\beta\,(\text{No-Abeliano})} &= -4i\lambda^c_\beta + \left[2i \left(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu\right)^{\gamma}_{\beta} \left[F^c_{\mu\nu(\text{Abeliano})} - \left(\frac{qg}{2}\right) f^{cab} A^a_\mu A^b_\nu\right] - 4\delta^{\gamma}_{\beta} D^c\right] \theta_\gamma \\ & \quad - \left(4\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} \left[\partial_\mu \delta^{ca} - \left(\frac{qg}{2}\right) f^{cab} A^b_\mu\right] \left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\gamma}} \theta^2 \\ &\Rightarrow \\ & W^c_{\beta\,(\text{No-Abeliano})} = -4i\lambda^c_\beta + \left[2i \left(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu\right)^{\gamma}_{\beta} F^c_{\mu\nu} - 4\delta^{\gamma}_{\beta} D^c\right] \theta_\gamma - \left(4\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} D^{ca}_\mu \left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\gamma}} \theta^2 \end{aligned} \tag{5.105}$$

$$F^c_{\mu\nu} = F^c_{\mu\nu(\text{Abeliano})} - \left(\frac{qg}{2}\right) f^{cab} A^a_\mu A^b_\nu \tag{5.106}$$

$$D^{ca}_\mu = \partial_\mu \delta^{ca} - \left(\frac{qg}{2}\right) f^{cab} A^b_\mu \tag{5.107}$$

Donde hemos utilizado el caracter antisimétrico de las constantes de estructura no Abelianas f^{cab} y además no hemos tenido en cuenta las divergencias totales. Teniendo $W^c_{\beta\,(\text{No-Abeliano})}$ podemos finalmente hallar el término cinético para los campos Gauge No-Abelianos (Ver Apéndice B):

$$-\frac{1}{4} D^2 \left[\left(W_\alpha\right)^c \left(W^\alpha\right)^c\right] + \bar{D}^2 \left[\left(\bar{W}^{\dot{\alpha}}\right)^c \left(\bar{W}_{\dot{\alpha}}\right)^c\right]\Big| =$$

$$32 \left\{-i\lambda^{c\beta} \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} D^{ca}_\mu \left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\gamma}} + \frac{1}{4} \left(F^{\tau\rho}\right)^c F^c_{\tau\rho} + \frac{1}{2} D^c D^c + \ cc\right\} \tag{5.108}$$

Donde identificamos de nuevo, un término de Maxwell No Abeliano para los campos Gauge $(A^\rho)^c$, un término de Dirac No Abeliano para los espinores $\lambda^{c\beta}$ (Los Gauginos) y un término No Cinético en los campos Auxiliares D^c, el cual debe formar parte del potencial Supersimétrico.

5.9 Lagrangiana SUSY Invariante Gauge General

Podemos ahora, recoger los resultados de las secciones anteriores, y construír una función Lagrangiana Supersimétrica general, invariante ante transformaciones Gauge-Supersimétricas. En dicha función Lagrangiana estan incluídos los términos cinéticos, tanto de los campos Gauge (5.108), como de los campos quirales de materia (5.86). Además se incluyen los términos (5.49) que provienen del superpotencial[12]:

$$
\begin{aligned}
\pounds &= T - V = \bar{\Phi}_k \left[e^{qg(T\cdot V)} \right]_{km} \Phi_m \Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} - \frac{1}{4}\, D^2 \left[(W_\alpha)^c (W^\alpha)^c \right] + \bar{D}^2 \left[\left(\bar{W}^{\dot{\alpha}}\right)^c \left(\bar{W}_{\dot{\alpha}}\right)^c \right] \Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} - V_w \qquad (5.109) \\
&= D_\mu A_m D^\mu \bar{A}_m - i\psi_m \left(\sigma^\mu\right) \bar{D}_\mu \bar{\psi}_m + \frac{iqg}{\sqrt{2}} \left[\lambda^a \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} \psi_m - \bar{\psi}_k \left(T^a\right)_{km} A_m \bar{\lambda}^a \right] \\
&\quad + \frac{qg}{2} \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} A_m D^a + \left(-i\lambda^{c\beta} \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}} D_\mu^{ca} \left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\gamma}} + \frac{1}{4} \left(F^{\tau\rho}\right)^c F^c_{\tau\rho} + CC \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \left(D^c D^c + CC\right) \\
&\quad - \bar{F}_j F_j - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} + CC \right)
\end{aligned}
$$

Podemos hallar una expresión similar a (5.49) para los D-Terms, a partir de (5.109), utilizando de nuevo las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pounds}{\partial \left(\partial_\mu D^a\right)} - \frac{\partial \pounds}{\partial D^a} &= 0 \Rightarrow \qquad (5.110) \\
\frac{\partial V}{\partial D^a} &= 0 \; , \; \frac{\partial V}{\partial \bar{D}^a} = 0 \Rightarrow \\
D^c &= -\frac{qg}{2} \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} A_m
\end{aligned}
$$

Reemplazando (5.110) en (5.109) obtenemos finalmente la siguiente expresión para el potencial SUSY:

$$
V_{SUSY} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(D^c D^c + CC\right) + \bar{F}_j F_j + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} + CC \right) \qquad (5.111)
$$

Al desarrollar los modelos propuestos en este trabajo, retomaremos algunos de los términos presentes en (5.109) y (5.111), teniendo en cuenta la relevancia de estos en los diferentes procesos de análisis que sean de interés.

5.9.1 R-Transformaciones y R-Paridad

Las R-Transformaciones corresponden a transformaciones continuas globales $U(1)$ realizadas sobre las variables de Grassmann de los supercampos, las cuales dejan invariante el álgebra SUSY ([9] pag 55). Estas transformaciones conllevan directamente a una diferenciación entre los elementos de cualquiera de estos Supercampos; ya que cada elemento ha de transformar de manera diferente. Esta característica natural de las R-transformaciones ha sido utilizada en el denominado Modelo Estándar Supersimétrico Minimal (MSSM) para diferenciar entre las partículas conocidas del modelo Estándar y sus compañeras de multiplete, las cuales deberían, en principio, existir si la Supersimetría se presenta en realidad en la Naturaleza ([8] Pag10). Mostraremos lo anteriormente descrito utilizando las definiciones de R-transformación y R-Paridad, las cuales, además nos servirán posteriormente para desarrollar el MSSM. Una R-transformación global $U(1)$ en θ está dada por ([9] Pag 14):

$$
\theta' = e^{i\alpha}\theta, \; \bar{\theta}' = e^{-i\alpha}\bar{\theta} \qquad (5.112)
$$

De tal forma que los operadores SUSY transforman de la siguiente manera ([9] Pag 14):

$$
Q'_\alpha = e^{-i\alpha} Q_\alpha, \; \bar{Q}'_{\dot{\alpha}} = e^{i\alpha} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \qquad (5.113)
$$

[12] Debe tenerse especial cuidado al incluír los términos adicionales debidos al Superpotencial W (5.50), ya que estos deben mantener la invarianza Gauge. Esto lo tendremos en cuenta al formular nuestro modelo fenomenológico.

De lo cual se deduce inmediatamente la invarianza del Algebra (4.2). Por otro lado, utilizando (5.112) podemos definir transformaciones para los supercampos ([9] Pag 55, [5] Pag 51):

$$\begin{aligned} S'\left(x,\theta',\bar{\theta}'\right) &= e^{2in\alpha}S\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = e^{2in\alpha}S\left(x,e^{-i\alpha}\theta',e^{i\alpha}\bar{\theta}'\right) \\ \bar{S}'\left(x,\theta',\bar{\theta}'\right) &= e^{-2in\alpha}\bar{S}\left(x,e^{-i\alpha}\theta',e^{i\alpha}\bar{\theta}'\right) = e^{-2in\alpha}\bar{S}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) \end{aligned} \tag{5.114}$$

Donde n puede variar de acuerdo con el tipo de Supercampo. Por ejemplo para el Supercampo Quiral (5.17) tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= A\left(x\right) + i\theta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A\left(x\right) + \\ &\quad \sqrt{2}\left[\theta\psi\left(x\right)\right] - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right)\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right] + \left(\theta\theta\right)F\left(y\right) \end{aligned} \tag{5.115}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Psi'\left(x,\theta',\bar{\theta}'\right) &= \left[A'\left(x\right) + \theta'^{\alpha}\overline{\theta}'^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta'\theta'\overline{\theta}'\overline{\theta}'\Box A'\left(x\right) + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2}\left[\theta'\psi'\left(x\right)\right] - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta'\theta'\right)\left[\partial_{\mu}\psi'^{\beta}\left(x\right)\sigma^{\mu}\overline{\theta}'\right] + \left(\theta'\theta'\right)F'\left(y\right)\right] \\ \Psi'\left(x,\theta',\bar{\theta}'\right) &= \left[A'\left(x\right) + \theta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A'\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A'\left(x\right) + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2}\left[e^{i\alpha}\theta\psi'\left(x\right)\right] - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_{\mu}\psi'^{\beta}\left(x\right)\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right] + e^{2i\alpha}\left(\theta\theta\right)F'\left(y\right)\right] \end{aligned} \tag{5.116}$$

pero

$$\Psi'\left(x,\theta',\bar{\theta}'\right) = e^{2in\alpha}\Psi\left(A,\psi,F\right)$$

por tanto

$$\begin{aligned} & A'\left(x\right) + \theta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A'\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A'\left(x\right) + \sqrt{2}\left[e^{i\alpha}\theta\psi'\left(x\right)\right] \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_{\mu}\psi'^{\beta}\left(x\right)\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right] + e^{2i\alpha}\left(\theta\theta\right)F'\left(y\right) \\ & = e^{2in\alpha}\left[A\left(x\right) + i\theta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A\left(x\right) + \right. \\ & \quad \left. \sqrt{2}\left[\theta\psi\left(x\right)\right] - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right)\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right] + \left(\theta\theta\right)F\left(y\right)\right] \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$A'\left(x\right) = e^{2in\alpha}A\left(x\right),\ \psi' = e^{2i\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha}\psi,\ F' = e^{2i(n-1)\alpha}F$$

en términos del multiplete quiral se puede decir que la R-transformación aplicada a dicho multiplete lo transforma en

$$\left(A,\psi,F\right) \to e^{2in\alpha}\left(A,e^{-i\alpha}\psi,e^{-2i\alpha}F\right)$$

Donde vemos claramente la diferencia en la forma de transformación entre A, ψ y F. Para el caso de Supercampos Vectoriales en el gauge de Wess-Zumino dado por (5.78) vemos que n debe ser cero para mantener el carácter vectorial ($e^{2in\alpha}$ debe coincidir con su conjugado entonces $n=0$):

$$\begin{aligned} C &= M = N = \chi = \bar{\chi} = 0 \Rightarrow \\ \left(V^{a}\right)' &= -\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A^{a}_{\mu} + ie^{i\alpha}\theta^{2}\bar{\theta}\bar{\lambda}^{a} - ie^{-i\alpha}\bar{\theta}^{2}\theta\lambda^{a} + \frac{1}{2}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}D^{a} \Rightarrow \\ \left(V^{a}\right)' &= V^{a}\left(A^{a}_{\mu},\bar{\lambda}^{a},D^{a}\right) \Rightarrow \\ \left(A^{a}_{\mu}\right)' &= A^{a}_{\mu},\ \left(\lambda^{a}\right)' = e^{-i\alpha}\lambda^{a},\ \left(D^{a}\right)' = D^{a} \end{aligned} \tag{5.117}$$

De acuerdo con (5.115) y (5.117) podemos definir la R-carga para cada campo como:

$$R(A) = 2n,\ R\left(A_\mu^a\right) = R(D^a) = 0,\ R(F) = 2(n-1),\ R(\psi) = 2\left(n - \frac{1}{2}\right),\ R(\lambda^a) = -1 \tag{5.118}$$

Vemos en (5.118) que los Bosones gauge A_μ^a del modelo Standard tienen R-carga diferente de los Gauginos λ^a. Para realizar una diferenciación similar entre los fermiones del MS y los Bosones escalares del multiplete quiral, podemos escoger $n = \frac{1}{2}$ para los supercampos quirales. En el mencionado caso tenemos:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \Rightarrow \\ A'(x) &= e^{i\alpha} A(x),\ \psi' = \psi,\ F' = e^{-i\alpha} F \\ R(\psi) &= 0,\ R(A) = 1,\ R(F) = -1 \end{aligned} \tag{5.119}$$

De esta forma las partículas del modelo Standard tendrán R-carga nula y sus compañeras SUSY, R-carga ± 1. A este conjunto de Supercampos debemos adicionar los Supercampos Quirales de Higgs. De tal manera que la R-carga para los Bosones escalares sea nula:

$$\begin{aligned} H_i' &= H_i\left(h, (\psi_\alpha)_h, F_h\right) \Rightarrow \\ h' &= h,\ (\psi_\alpha)_h' = e^{-i\alpha} (\psi_\alpha)_h,\ F_h' = e^{-2i\alpha} F_h \\ R(h) &= 0,\ R((\psi_\alpha)_h) = -1,\ R(F_h) = -2 \end{aligned} \tag{5.120}$$

De esta manera hemos construído las R-cargas para todos los tipos de partículas del modelo Standard y para sus respectivas compañeras SUSY. La R-Paridad se define como el operador Paridad de la R-Carga, el cual, como todo operador de Paridad, diferencia mediante un signo, dos tipos bien definidos de campos, en este caso las partículas del MS de las partículas SUSY o s-Partículas ([8] pag 10):

$$R_p = (-1)^R = \begin{cases} +1\ Para\ las\ Particulas\ Ordinarias\ del\ MS \\ -1\ Para\ las\ S - Particulas \end{cases} \tag{5.121}$$

En la siguiente Sección sobre el Modelo Standard Minimal Supersimétrico, veremos algunas consecuencias de imponer la conservación de la R-Paridad, además de su relación fenomenológica con los Números Leptónico y Bariónico.

Chapter 6

Rompimiento espontáneo de la supersimetría

Fenomenológicamente es necesario que la supersimetría esté rota, ya que esta teoría predice que las partículas del mismo supermultiplete poseen una misma masa. Como tal espectro no ha sido aún detectado, se espera en general que una vez rota supersimetría las supercompañeras hayan adiquiridos grandes valores de masa y acoplamiento débil con la materia. Veamos el mecanismo para romper supersimetría espontáneamente.

El operador hermítico $\{Q, \bar{Q}\}$ posee autovalores positivos

$$\langle \ldots | \{Q, \bar{Q}\} | \ldots \rangle = \langle \ldots | Q\bar{Q} | \ldots \rangle + \langle \ldots | \bar{Q}Q | \ldots \rangle = \left| \bar{Q} | \ldots \rangle \right|^2 + |Q | \ldots \rangle|^2 \geq 0$$

y solo puede ser cero para todos los estados $| \ldots \rangle$ si $Q = 0$. Por otro lado, del álgebra graduada se puede ver que

$$\sum_{all\ Q} \{Q, \bar{Q}\} \propto E$$

y como $\langle \ldots | \{Q, \bar{Q}\} | \ldots \rangle \geq 0$, el espectro de energía debe ser ≥ 0 ó ≤ 0. Por otro lado, esta constante de proporcionalidad deber ser positiva a fin de tener un espectro de energía acotado por abajo. Esto significa que el espectro de energía (del Hamiltoniano) en una teoría con supersimetría no contiene autovalores negativos. Denotamos el estado o estados de menor energía por $|0\rangle$ el vacío SUSY. De acuerdo con lo anterior, el vacío tiene energía cero i.e. $E|0\rangle = 0$ si y solo si

$$Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0, \qquad \forall Q$$

cualquier estado con energía diferente de cero por ejemplo, un estado de una partícula, no puede ser invariante bajo supersimetría, ya vimos que un operador supersimétrico cambia el espín de dicho estado.

Por otro lado el hecho de que

$$[Q, E] = [Q, P] = 0$$

implica que Q no cambia la energía y el momento de las partículas. Esto implica que los campos asociados a un mismo supermultiplete tengan la misma masa. Por otro lado, el rompimiento espontáneo de supersimetría, significa como es usual, que el vacío de la teoría no es invariante SUSY es decir que $Q|0\rangle \neq 0$, ó $\bar{Q}|0\rangle \neq 0$ para algún Q, y de la discusión anterior se concluye que **supersimetría está espontáneamente rota si y solo si la energía del vacío no es excatamente cero**. Como veremos más adelante, el rompimiento espontáneo de supersimetría puede levantar la degeneración de masas en el supermultiplete aunque la estructura general de este permanece intacta.

Para el álgebra supersimétrica minimal se tiene

$$\langle E\rangle_0 = \langle P_0\rangle_0 = \frac{1}{2}\left\langle \sum_{\alpha=1}^{2}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}\right\rangle_0 = \frac{1}{2}\left\langle \sum_{\alpha=1}^{2}|Q_\alpha|^2\right\rangle_0 \geq 0$$

En supersimetría, el rompimiento espontáneo ocurre cuando alguno de los campos auxiliares adquiere valor esperado en el vacío (vev) diferente de cero. Por ejemplo, si $\langle F\rangle_0 = f$, $\langle A\rangle_0 = a$, y tomando la transformación SUSY de ψ_α se tiene que

$$\langle \delta\psi_\alpha\rangle_0 = i\left\langle \left[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q},\ \psi_\alpha\right]\right\rangle_0$$

obsérvese que si no hubiera RES i.e. $Q\,|0\rangle = \bar{Q}\,|0\rangle = 0,\ \forall Q$, este valor esperado se anularía. Calculemos, este valor esperado usando la Ec. (;;)

$$\langle \delta\psi_\alpha\rangle_0 = -\sqrt{2}\xi_\alpha \langle F\rangle - \sqrt{2}i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \langle A\rangle_0 = -\sqrt{2}\xi_\alpha f$$

obsérvese que la condición $\langle A\rangle_0 \neq 0$, por sí sola no genera RES. Veamos que pasa con el valor esperado de una componente del supermultiplete vectorial, asumamos $\langle D\rangle_0 = d$

$$\langle \delta\lambda_\alpha\rangle_0 = i\left\langle \left[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q},\ \lambda_\alpha\right]\right\rangle_0 = i\xi_\alpha \langle D\rangle_0 - \frac{1}{2}\,\sigma^\mu\sigma^\nu)_\alpha{}^\beta \xi_\beta \langle F_{\mu\nu}\rangle_0 = i\xi_\alpha d$$

lo cual también generaría un RES. Como es usual, la fuente del RES yace en el potencial escalar (superpotencial), el cual se puede escribir como

$$V = \sum \bar{F}_i F_i + \frac{1}{2}\sum (D^a)^2 + \frac{1}{2}\sum D^2 \geq 0$$

con $D^a \equiv \frac{1}{2}g\bar{A}_i T^a_{ij} A_j$, $D \equiv -\left(x + \frac{1}{2}g_1\bar{A}_i q_i A_i\right)$, lo cual resulta de las ecuaciones de movimiento que eliminan a estos campos auxiliares. Para romper SUSY necesitamos que $V > 0$, lo cual se puede generar de varias maneras

1. cuando $F_i = 0$, no tiene solución, lo cual se denomina un rompimiento tipo F
2. $D = 0$, $D^a = 0$, no tienen solución, rompimiento tipo D
3. $F_i = 0$, $D = 0$, $D^a = 0$ tienen solución cada uno pero no tienen una solución común.

En una teoría con SUSY no rota, existe una solución común para las ecuaciones $F_i = 0$, $D = 0$, $D^a = 0$, las cuales generan un estado de mínima energía con energía cero. Análogo al caso de la aparición de bosones de Goldstone en RES de teorías gauge, en el rompimiento SUSY aparece un fermión sin masa de espín 1/2, (Goldstino), que en nuestro caso sería el ψ_α.

6.1 Ejemplos de rompimiento espontáneo de SUSY

6.1.1 Modelo de Wess-Zumino

$V = -\left(\bar{F}_i F_i + F_i\frac{\partial W(A_i)}{\partial A_i} + \bar{F}_i\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}_i}\right)$

Usando las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{\partial V}{\partial F_i} = 0 \Rightarrow \bar{F}_i = -\frac{\partial W}{\partial F_i}$$

tomemos algunos casos particulares para el superpotencial

---

1) Sea $W(A) = \frac{1}{2}mA^2 + \frac{1}{3}gA^3$

$$-\bar{F} = \frac{\partial W}{\partial A} = \left(mA + gA^2\right) \quad ; \quad M = (m + 2gA) \quad ; \quad |V| = \left|mA + gA^2\right|^2$$

examinemos las soluciones de $F = 0 \Rightarrow$ obtenemos un mínimo local con los siguientes valores del vev para el campo Físico A i) $\langle A \rangle_0 = 0$, ii) $\langle A \rangle_0 = -\frac{m}{g}$, si se hace una gráfica de V vs ReA, muestra que aparecen dos mínimos locales con energía cero ($\langle A \rangle_0 = -\frac{m}{g}$ y $\langle A \rangle_0 = 0$ respectivamente), y un máximo local en $\langle A \rangle_0 = -\frac{m}{2g}$. Por tanto **no hay** RES.

---

2) Tomemos una forma más general del superpotencial

$$W(\phi) = \lambda\phi_k + \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k$$

$$-\bar{F}_i = \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} = \lambda_i + m_{ik}A_k + g_{ijk}A_jA_k$$

para que se rompa la supersimetría es necesario escoger $\langle A \rangle_0 = a$, de tal modo que la ecuación

$$\lambda_i + m_{ik}a_k + g_{ijk}a_ja_k = 0$$

no tenga solución. Tomemos un caso sencillo

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \lambda\phi_0 + m\phi_1\phi_2 + g\phi_0\phi_1\phi_1 + h.c. \\ W(A) &= \lambda A_0 + mA_1A_2 + gA_0A_1A_1 + h.c. \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} -\bar{F}_0 &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_0} = \lambda + gA_1A_1 \Rightarrow -\left\langle \bar{F}_0 \right\rangle = \lambda \neq 0 \\ -\bar{F}_1 &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_1} = mA_2 + 2gA_0A_1 \Rightarrow -\left\langle \bar{F}_1 \right\rangle = ma_2 + 2ga_0a_1 \\ -\bar{F}_2 &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_2} = mA_1 \Rightarrow -\left\langle \bar{F}_0 \right\rangle = ma_1 \end{aligned}$$

ocurre rompimiento espontáneo SUSY y el potencial es mayor que cero

$$\langle V \rangle_0 = \bar{F}_iF_i = \lambda^2 + (ma_2 + 2ga_0a_1)^2 + m^2a_1^2 > 0$$

3) Sea $W(\phi) = g\phi\phi_+\phi_- - \mu\phi + \frac{1}{6}f\phi\phi\phi$
Nótese que este potencial tiene una simetría interna

$$\phi_+ \to e^{ie\lambda}\phi_+ \quad ; \quad \phi_- \to e^{-ie\lambda}\phi_- \quad ; \quad \phi \to \phi$$

$$\begin{aligned} -\bar{F}_+ &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_+} = gAA_- \Rightarrow -\left\langle \bar{F}_+ \right\rangle = gaa_- \neq 0 \\ -\bar{F}_- &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_-} = gAA_+ \Rightarrow -\left\langle \bar{F}_- \right\rangle = gaa_+ \\ -\bar{F} &= \frac{\partial W(A)}{\partial A} = gA_+A_- - \mu + \frac{1}{2}fAA \Rightarrow -\left\langle \bar{F} \right\rangle = ga_+a_- - \mu + \frac{f}{2}a^2 \end{aligned}$$

No hay rompimiento espontáneo de SUSY (hay solución consistente para $F_+ = F_- = F = 0$), veamos algunas posibles soluciones

i) Si $a_+ = a_- = 0 \Rightarrow\ a^2 = 2\mu/f$, la simetría $U(1)$ interna, no está rota. El vev del potencial escalar se escribe

$$\langle V\rangle_0 = \langle \bar{F}_i F_i\rangle_0 = (gaa_-)^2 + (gaa_+)^2 + \left(ga_+a_- - \mu + \frac{f}{2}a^2\right)^2 = \left(-\mu + \frac{f}{2}a^2\right)^2 = 0$$

ii) $a = 0$, $a_+a_- = \frac{\mu}{g}$ la simetría $U(1)$ se rompe espontáneamente dando un número infinito de vacíos supersimétricos degenerados. De nuevo se puede comprobar que $\langle V\rangle_0 = 0$.

---

4) Tomemos el lagrangiano completo de la forma

$$= \frac{1}{4}\left.WW\right|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\left.\bar{W}\bar{W}\right|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left.\phi_1^\dagger e^{eV}\phi_1\right|_{\theta\theta} + \left.\phi_2^\dagger e^{eV}\phi_2\right|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} + m\left.\left(\phi_1^\dagger\phi_2 + \phi_1\phi_2^\dagger\right)\right|_{\theta\theta} + \left.2kV\right|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

el último término corresponde al $D-$term, el potencial se escribe

$$V = \frac{1}{2}D^2 + \bar{F}_1F_1 + \bar{F}_2F_2$$

de modo que el lagrangiano se escribe como

$$= \frac{1}{2}D^2 + \bar{F}_1F_1 + \bar{F}_2F_2 + \frac{e}{2}\left(\bar{A}_1A_1 - \bar{A}_2A_2\right)D + kD + \ldots + m$$

las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial D} &= 0 \Rightarrow D + k + \frac{e}{2}\left(\bar{A}_1A_1 - \bar{A}_2A_2\right) = 0\\
\frac{\partial}{\partial \bar{F}_1} &= 0 \Rightarrow -F_1 = \frac{\partial W(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial}{\partial A_1}\left(m\bar{A}_1A_2 + mA_1\bar{A}_2\right) = m\bar{A}_2 \Rightarrow F_1 + m\bar{A}_2 = 0\\
\frac{\partial}{\partial \bar{F}_2} &= 0 \Rightarrow -F_2 = \frac{\partial W(A)}{\partial A_2} = \frac{\partial}{\partial A_2}\left(m\bar{A}_1A_2 + mA_1\bar{A}_2\right) = m\bar{A}_1 \Rightarrow F_2 + m\bar{A}_1 = 0
\end{aligned}$$

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento conducen a las siguientes igualdades

$$F_1 = -m\bar{A}_2 \quad ; \quad F_2 = -m\bar{A}_1 \quad ; \quad D = \frac{e}{2}\left(\bar{A}_2A_2 - \bar{A}_1A_1\right) - k$$

si $a_2 = a_1 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = 0$, $\langle D\rangle = -k \neq 0 \Rightarrow$ hay R.E. SUSY

El potencial se puede escribir como

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\left[k + \frac{e}{2}\left(\bar{A}_1A_1 - \bar{A}_2A_2\right)\right]^2 + m^2\bar{A}_2A_2 + m^2\bar{A}_1A_1\\
&= \frac{1}{2}k^2 + \left(m^2 + \frac{1}{2}ek\right)\bar{A}_1A_1 + \left(m^2 - \frac{1}{2}ek\right)\bar{A}_2A_2 + \frac{1}{8}e^2\left(\bar{A}_1A_1 - \bar{A}_2A_2\right)^2
\end{aligned}$$

observemos que el valor esperado de la variación supersimétrica de λ genera el Goldstino

$$\delta\lambda = i\xi D + \sigma^{\mu\nu}[\ldots]F_{\mu\nu} \Rightarrow \langle\delta\lambda\rangle_0 = i\xi\langle D\rangle_0 = i\xi k$$

si $m^2 > \frac{1}{2}ek$ se tiene que A_1, A_2 tienen masa real. Cuando $m^2 < \frac{1}{2}ek$, no necesariamente $V > 0$, y $A_1 = A_2 = 0$ no necesariamente minimiza el potencial. Para hallar el mínimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \bar{A}_1} &= \left(m^2 + \frac{1}{2}ek\right)A_1 + \frac{e^2}{4}\left(\bar{A}_1A_1 - \bar{A}_2A_2\right)A_1 = 0\\
\frac{\partial V}{\partial \bar{A}_2} &= \left(m^2 - \frac{1}{2}ek\right)A_2 - \frac{e^2}{4}\left(\bar{A}_1A_1 - \bar{A}_2A_2\right)A_2 = 0
\end{aligned}$$

$A_1 = 0$, $\left(m^2 - \frac{1}{2}ek\right) + \frac{e^2}{4}\bar{a}_2 a_2 = 0$. Donde $\langle A_2\rangle_0 = a_2$. El mínimo estaría en $\langle A_1\rangle_0 = 0$, $\langle A_2\rangle_0 = a_2$. Sea $A \equiv A_1$, $\widetilde{A} \equiv A_2 - a_2 \Rightarrow$

$$\langle A\rangle_0 = \left\langle \widetilde{A}\right\rangle_0 = 0 \ ; \ V = \frac{2m^2}{e^2}\left(ek - m^2\right) + 2m^2\bar{A}A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 a_2^2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A + \widetilde{\bar{A}}\right)\right]^2 > 0$$

de modo que hay R.E. SUSY.

El Lagrangiano supersimétrico de QED se escribe como

$$\begin{aligned} {}_{QED} &= -\frac{1}{4}e^2 A_\mu A^\mu\left(\bar{A}_1 A_1 + \bar{A}_2 A_2\right) - m\psi_1\psi_2 - m\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 \\ &\quad -\frac{ie}{\sqrt{2}}\left(A_2\bar{\psi}_2\bar{\lambda} - \bar{A}_2\psi_2\lambda - A_1\bar{\psi}_1\bar{\lambda} + \bar{A}_1\psi_1\lambda\right) \\ &\simeq -\frac{1}{4}e^2 a_2^2 A_\mu A^\mu - m\left(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\right) + \frac{iea_2}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_2\bar{\lambda} - \psi_2\lambda\right) \end{aligned}$$

definamos

$$\psi \equiv \psi_2 \ \ , \ \ \widetilde{\psi} \equiv \frac{\left(m\psi_1 + \frac{iea_2}{\sqrt{2}}\lambda\right)}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2 a_2^2}} \ \ ; \ \ \widetilde{\lambda} \equiv \frac{\left(m\lambda + \frac{iea_2}{\sqrt{2}}\psi_1\right)}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2 a_2^2}}$$

el Lagrangiano se escribe

$$ {}_{QED} \simeq -\frac{1}{4}e^2 a_2^2 A_\mu A^\mu - \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2 a_2^2}\left(\psi\widetilde{\psi} + \bar{\psi}\widetilde{\bar{\psi}}_2\right) + 0\cdot\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}$$

se puede ver que ψ adquiere masa en tanto que $\widetilde{\lambda}$ queda sin masa de modo que corresponde al Goldstino. A_μ es el campo gauge y λ es el gaugino. Hagamos las variaciones SUSY de ψ_1 y λ

$$\delta_\xi\psi_1 = i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A_1 + \sqrt{2}\xi F_1 \ \ ; \ \ \delta_\xi\lambda = i\xi D + \sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu}$$

los valores esperados en el vacío quedan

$$\begin{aligned} \langle\delta_\xi\psi_1\rangle_0 &= \sqrt{2}\xi\langle F_1\rangle_0 = -\sqrt{2}m\langle A_2\rangle_0\xi = -\sqrt{2}ma_2\xi = \sqrt{\frac{1}{2}ek - m^2}\frac{4}{e} \\ \langle\delta_\xi\lambda\rangle_0 &= i\xi\langle D\rangle_0 = -i\xi k \ \ ; \ \ \delta_\xi\widetilde{\lambda} \neq 0 \end{aligned}$$

Después de ver modelos en que se puede romper SUSY y la simetría gauge, resulta interesante ver modelos en los cuales solo se rompa la simetría gauge. Tomemos otro ejemplo de superpotencial con una simetría $U(1)$, de tres escalares, dos cargados y uno neutro.

$$W(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^2 + \mu\phi_+\phi_- + \lambda\phi + g\phi\phi_+\phi_- + h.c.$$

esta teoría es $U(1)$ invariante ante las transformaciones

$$\phi'_\pm = e^{\mp ie}\phi_\pm \ \ , \ \ \phi' = \phi$$

$$\begin{aligned} -\bar{F} &= \frac{\partial W(A)}{\partial A} = ma + \lambda + ga + a_- = 0 \\ -\bar{F}_+ &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_+} = \mu a_- + gaa_- = 0 \\ -\bar{F}_- &= \frac{\partial W(A)}{\partial A_-} = \mu a_+ + gaa_+ = 0 \end{aligned}$$

tenemos dos tipos de soluciones

i) $a_- = a_+ = 0,\ \ a = -\lambda/m$

ii) $a_+ a_- = -\left(1/g\right)\left(ma+\lambda\right) = -\left(1/g\right)\left(\lambda - \frac{m\mu}{g}\right) \quad , \quad a = -\frac{\mu}{g}$

No hay R.E. SUSY, y el caso i) deja a $U\left(1\right)$ no rota, en tanto que el caso ii) rompe $U\left(1\right)$.

6.2 Rompimiento SUSY en una teoría no abeliana

$$-\bar{F}_i = \lambda_i + m_{ik}a_k + g_{ijk}a_j a_k = 0 \tag{6.1}$$

$$D^l = \bar{a}_i T^l_{ik} a_k = 0 \tag{6.2}$$

En teorías no abelianas no existe el término kD debido a que D rompe la simetría gauge. Si a_i satisface (6.1), satisface automáticamente (6.2). Por tanto para teorías SUSY no abelianas solo el $F-$term puede producir un rompimiento espontáneo de la supersimetría.

Chapter 7

Construcción de Lagrangianos supersimétricos

7.1 El problema de naturalidad

Uno de los misterios mas grandes que el modelo estándar deja sin responder es el problema de jerarquía, ya que no parece natural que la escala electrodébil y la escala de Planck estén separadas por tantos órdenes de magnitud ($M_W/M_P \approx 10^{-17}$). Por otro lado si el sector escalar de una teoría gauge se acopla a nueva Física a una cierta escala Λ, la corrección radiativa a la masa de los escalares es de la forma $\delta m^2 \sim O\left(\Lambda^2\right)$, debido a las divergencias cuadráticas asociadas a la autoenergía. Esto implicaría que las masas estimadas de los escalares después de las correcciones radiativas estaría en el mismo orden que la escala de Planck (problema de naturalidad). Una partícula de Higgs tan pesada desemboca en un problema de naturalidad y uno fenomenológico a) Lo natural es que la partícula que produzca el RES electrodébil esté en la escala electrodébil $M_H \sim M_W$. b) La unitariedad de la matriz S, conduce a que el Higgs no puede ser muy pesado, en el modelo estándar en particular el Higgs debe estar en la escala electrodébil, en modelos con mas escalares por lo menos uno de ellos debe estar en la escala electrodébil.

Este problema aunado con los teoremas de imposibilidad, significan un obstáculo para construír teorías más fundamentales que incluyan a la gravedad y al modelo estándar, ya que los escalares adquirirían una masa del orden de la escala de Planck a través de las correciones radiativas (esto además pondría en duda la perturbatividad de la teoría).

Hay varias soluciones posibles para este problema

1) Teorías de technicolor donde se remueven los escalares y se reemplzan por condensados de estados ligados.

2) Se introduce un fine-tuning en los parámetros libres de la teoría.

3) Se estudian modelos que introduzcan nuevas partículas que cancelen las divergencias cuadráticas, esto se puede hacer a través de dos mecanismos fundamentales.

3a) Teorías gauge semejantes al model sigma (teorías de Little Higgs)

3b) Teorías supersimétricas en las cuales cada fermión (bosón) tiene un supercompañero bosónico (fermiónico)

De éstas alternativas, solo la última tiene como añadidura el evadir los teoremas de imposibilidad.

Sin embargo, la supersimetría indica que las supercompañeras deben tener la misma masa que sus compañeras. De modo que para evitar un conflicto con la fenomenología es necesario que supersimetría esté rota y las supercompañeras estén a escalas mayores. Por otro lado, el rompimiento SUSY debe ser tal que no introduzca nuevas divergencias cuadráticas lo cual limita el splitting entre las partículas y sus supercompañeras (usualmente queda como remanente una divergencia logarítmica que es mucho mas suave). Los términos en el lagragiano que rompen SUSY pero sin generar divergencias cuadráticas se denominan **soft breaking terms**.

Para construír una teoría SUSY a bajas energías es necesario tener en cuenta primero que todo el contenido de partículas de la simetría gauge original, las representaciones en donde se encuentran y sus números cuánticos. En el caso particular del modelo estándar que es una teoría $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ tenemos el siguiente contenido de partículas con sus respectivas representaciones

$$\begin{array}{rcl} gluones & : & (8,1,0) \\ W^{\pm}, W^3 & : & (1,3,0) \\ B & : & (1,1,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L & : & (3,2,1/3) & , & u_L^c \sim u_R : \quad (3^*,1,-4/3) & , & d_L^c \sim d_R : \quad (3^*,1,2/3) \\ \begin{pmatrix} \vartheta \\ e \end{pmatrix}_L & : & (1,2,-1) & , & e_L^c \sim e_R : \quad (1,1,2) & & \\ \phi & : & (1,2,1) & & & & \end{array}$$

a cada partícula se le debe asociar su compañera supersimétrica

$$\begin{array}{rcl} q_L, q_R & \rightarrow & \widetilde{q}_L, \widetilde{q}_R \\ fermión & \rightarrow & s - fermión \\ gauge & \rightarrow & gauginos, \quad higgs - higgsino \end{array}$$

en el modelo estándar cada familia fermiónica cancela sus anomalías, pero al introducir fermiones asociados al doblete escalar (higgssinos con números cuánticos $(1,2,1)$) se introducen nuevas anomalías que deben ser canceladas por otro doblete fermiónico tipo Higgsino con números cuánticos $(1,2,-1)$, de modo que el modelo debe contener dos dobletes de Higgs con hipercargas opuestas $Y_{1,2} = \pm 1$.

Por otro lado, los término de rompimiento suave de supersimetría (SBT) pueden aparecer de tres formas:

1) Por rompimiento espontáneo de SUSY global (Goldstino)

2) Por rompimiento espontáneo de SUSY local (Gravitino)

3) Por rompimiento explícito de SUSY (donde en principio los términos SBT son generados por teorías a mas altas energías).

7.2 Construcción de lagrangianos supersimétricos

Se debe introducir un segundo doblete de Higgs H_1^i, H_2^i $Y_{1,2} = \pm 1$, con i =índice de $SU(2)$. El contenido de partículas está dado en la tabla (???)

supercampo vectorial	campo gauge	supercompañero (gaugino)	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\widehat{G}$	g	$\widetilde{g}$	8	0	0
$\widehat{V}$	W^a	$\widetilde{W}^a$	1	3	0
$\widehat{V}'$	B	$\widetilde{B}^a$	1	1	0
multiplete quiral (de materia)	campo fermiónico	supercompañero (s-fermión)	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\widehat{L}$	$(\vartheta,\ e^-)_L$	$\widetilde{L}^j = \left(\widetilde{\vartheta}_L,\ \widetilde{e}_L^-\right)$	1	2	−1
$\widehat{E}$	$\left(e_L^-\right)^c \sim e_R^+$	$\widetilde{E} = \widetilde{e}_R^+$	1	1	2
$\widehat{Q}$	$(u,\ d)_L$	$\widetilde{Q}^j = \left(\widetilde{u}_L,\ \widetilde{d}_L^-\right)$	3	2	1/3
$\widehat{U}$	$(u_L)^c \sim u_R$	$\widetilde{U} = \widetilde{u}_R^*$	3^*	1	−4/3
$\widehat{D}$	$(d_L)^c \sim u_R$	$\widetilde{D} = \widetilde{d}_R^*$	3^*	1	2/3
multiplete quiral (de escalares)	campo escalar	supercompañero (higgsino)	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\widehat{H}_1$	H_1^i	$\left(\widetilde{H}_1^0,\ \widetilde{H}_1^-\right)$	1	2	−1
$\widehat{H}_2$	H_2^i	$\left(\widetilde{H}_2^+,\ \widetilde{H}_2^0\right)$	1	2	1

usando notación de 2 y de 4 componentes para los espinores

$$\begin{aligned}
\psi &= \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\psi^c &= \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \eta^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi_M = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

los términos fermiónicos bilineales pueden tener estructura escalar, pseudoescalar, vectorial o axial. Veamos cual es la expansión de cada una de estas estructuras

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1\psi_2 &= \eta_1\xi_2 + \bar{\eta}_2\bar{\xi}_1 \equiv \bar{\psi}_1 P_L \psi_2 + \bar{\psi}_1 P_R \psi_2 \\
\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2 &= -\eta_1\xi_2 + \bar{\eta}_2\bar{\xi}_1 \\
\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 &= -\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\xi_2 - \bar{\eta}_2\bar{\sigma}^\mu\eta_1 \\
\bar{\psi}_1\psi_2^C &= \eta_1\eta_2 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2 \equiv \bar{\psi}_1 P_L \psi_2^C + \bar{\psi}_1 P_R \psi_2^C
\end{aligned} \tag{7.2}$$

recordemos que los campos de materia están en una supercampo quiral $\widehat{A} \equiv (A, \psi_L, F)$, con A los $s-$fermiones. De la misma forma los campos escalares que rompen espontáneamente supersimetría están en un supercampo quiral $\widehat{H} \equiv (H, \psi_L, F)$, donde los ψ_L serían los Higgsisnos. Los campos gauge están en un supercampo vectorial $\widehat{V^a} = (\lambda_L^a, V^{\mu a}, D^a)$

Para un compendio completo de la notación empleada, ver apéndice (**??**). Recordemos el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i\bar{\lambda}^a\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a + (D_\mu A)^* (D^\mu A) - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + F^*F \\
&\quad + i\sqrt{2}g\left(A^*T^a\psi\lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a A\bar{\psi}\right) + gD^a A^* T^a A + h.c.
\end{aligned}$$

con

$$D_\mu A = \partial_\mu A + igA_\mu^a T^a A \quad ; \quad D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + igA_\mu^a T^a \psi \quad ; \quad D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + gf^{abc} A_\mu^b \lambda^c$$

Las teorías gauge supersimétricas constan de bosones gauge V_μ^a y sus parejas de gauginos de dos componentes λ^α en la representación adjunta del grupo gauge G. De otro lado, existen los campos de materia que consisten en campo escalares complejos A_i y fermiones de dos componentes ψ_i que transforman bajo alguna representación R de G (con frecuencia es la representación fundamental). Escribiremos el lagrangiano de interacción (omitiendo términos cinéticos) donde la forma final se escribirá en términos de fermiones en notación de dos componentes. El lagragiano de interacción consta de tres partes

7.2.1 Autointeracción del multiplete gauge $\widehat{V}$

$$\begin{aligned} -i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a &= -i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \left[\partial_\mu \lambda^a + gf^{abc} A_\mu^b \lambda^c\right] \\ &\rightarrow -igf^{abc}\left(\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \lambda^c\right) A_\mu^b \end{aligned}$$

donde hemos extraído únicamente el término de interacción. Ahora debemos calcular el valor de $\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \lambda^c$ para lo cual recurrimos a las identidades (7.1, 7.2)

$$\begin{aligned} \left(\bar{\lambda}^a \gamma^\mu \lambda^c\right) &= \begin{pmatrix} \lambda^a & \bar{\lambda}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^c \\ \bar{\lambda}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^a & \bar{\lambda}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\mu \bar{\lambda}^c \\ \bar{\sigma}_\mu \lambda^c \end{pmatrix} \\ \left(\bar{\lambda}^a \gamma^\mu \lambda^c\right) &= \lambda^a \sigma_\mu \bar{\lambda}^c + \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}_\mu \lambda^c \end{aligned}$$

de esta forma el término de interacción de $-i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a$ queda

$$\begin{aligned} -i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a &= -\frac{i}{2} gf^{abc}\left(\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}_\mu \lambda^c - \lambda^c \bar{\sigma}^\mu \bar{\lambda}^a\right) A_\mu^b = -\frac{i}{2} gf^{abc}\left(\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}_\mu \lambda^c + \lambda^a \sigma^\mu \bar{\lambda}^c\right) A_\mu^b \\ &= -\frac{i}{2} gf^{abc}\left(\bar{\lambda}^a \gamma^\mu \lambda^c\right) A_\mu^b = \frac{i}{2} gf^{acb}\left(\bar{\lambda}^a \gamma^\mu \lambda^c\right) A_\mu^b \\ -i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a &= \frac{i}{2} gf^{abc}\left(\bar{\lambda}^a \gamma^\mu \lambda^b\right) A_\mu^c \end{aligned}$$

7.2.2 Términos de interacción entre multipletes gauge y de materia $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$

$$\begin{aligned} &= -\left(D_\mu A\right)_i^* \left(D^\mu A\right)_i - i\bar{\psi}_L \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_L + i\sqrt{2} g\left(A^* T^a \psi_L \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a A \bar{\psi}_L\right) \\ &= -\left(\partial_\mu A_i + igA_\mu^a T^a A_i\right)^* \left(\partial^\mu A_i + igA^{\mu a} T^a A_i\right) - i\bar{\psi}_L \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu \psi + igA_\mu^a T^a \psi\right) \\ &\quad + i\sqrt{2} g\left(A^* T^a \psi_L \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a A \bar{\psi}_L\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\partial_\mu A_i^* - igA_\mu^a T_{ij}^a A_j^*\right)\left(\partial^\mu A_i + igA^{\mu b} T_{ik}^b A_k\right) - i\bar{\psi}_L \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu \psi + igA_\mu^a T^a \psi\right) \\ &\quad + i\sqrt{2} g\left(A^* T^a \psi_L \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a A \bar{\psi}_L\right) \end{aligned}$$

de nuevo escribimos solo los términos de interacción

$$\begin{aligned} {}_{int} &= -ig\left(\partial_\mu A_i^*\right) A^{\mu b}\left(T_{ik}^b A_k\right) - ig\left(\partial^\mu A_i\right) A_\mu^a \left(T_{ij}^a A_j^*\right) + g^2\left(A_\mu^a T_{ij}^a A_j^*\right)\left(A^{\mu b} T_{ik}^b A_k\right) \\ &\quad + g\bar{\psi}_L \bar{\sigma}^\mu \left(A_\mu^a T^a \psi\right) + i\sqrt{2} gA^* T^a \psi_L \lambda^a - i\sqrt{2} g\left(\bar{\lambda}^a T^a A \bar{\psi}_L\right) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que las constantes de estructura forman la representación adjunta

$$f^{abc} = i\left(T^{a}\right)^{bc}$$

veamos cada término

$$\begin{aligned} {}_{int,1} &= i\sqrt{2}gA^{*}T^{a}\psi_{L}\lambda^{a} = i\sqrt{2}gA_{i}^{*}T_{ij}^{a}\psi_{Lj}\lambda^{a} = i\left(-i\right)\sqrt{2}gA_{i}^{*}f_{aji}\psi_{Lj}\lambda^{a} \\ i\sqrt{2}gA^{*}T^{a}\psi_{L}\lambda^{a} &= \sqrt{2}gA_{i}^{*}f_{aji}\psi_{Lj}\lambda^{a} \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}^{a}P_{L}\psi_{j} = \begin{pmatrix} \lambda & \bar{\lambda} \end{pmatrix}^{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}_{j} = \lambda^{a}\psi_{j} = \psi_{j}\lambda^{a}$$

reemplazando la última expresión en la penúltima

$${}_{int,1} = i\sqrt{2}gA^{*}T^{a}\psi_{L}\lambda^{a} = \sqrt{2}gA_{i}^{*}f_{aji}\bar{\lambda}^{a}P_{L}\psi_{j}$$

por otro lado,

$$\bar{\psi}_{j}P_{R}\lambda^{a} = \begin{pmatrix} \eta & \bar{\psi} \end{pmatrix}_{j}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{a} \\ \bar{\lambda}^{a} \end{pmatrix} = \bar{\psi}_{j}\bar{\lambda}^{a} = \bar{\lambda}^{a}\bar{\psi}_{j}$$

$$\begin{aligned} {}_{int,2} &= -i\sqrt{2}g\bar{\lambda}^{a}T^{a}\bar{\psi}A = -i\sqrt{2}g\bar{\lambda}^{a}T_{ij}^{a}\bar{\psi}_{i}A_{j} = -i\sqrt{2}gT_{ji}^{a}A_{i}\bar{\psi}_{j}P_{R}\lambda^{a} \\ &= -\sqrt{2}gf_{aij}A_{i}\bar{\psi}_{j}P_{R}\lambda^{a} \end{aligned}$$

$${}_{int,1} + {}_{int,2} = \sqrt{2}gf_{aji}\left[A_{i}^{*}\bar{\lambda}^{a}P_{L}\psi_{j} + A_{i}\bar{\psi}_{j}P_{R}\lambda^{a}\right]$$

otro término

$${}_{int,3} = g\bar{\psi}_{i}\bar{\sigma}^{\mu}\left(A_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}\psi_{j}\right) = gA_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}\bar{\psi}_{i}\bar{\sigma}^{\mu}\psi_{j}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{i}\gamma_{\mu}P_{L}\psi_{j} &= \begin{pmatrix} \eta & \bar{\psi} \end{pmatrix}_{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\mu} \\ \bar{\sigma}_{\mu} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}_{j} = \begin{pmatrix} \eta & \bar{\psi} \end{pmatrix}_{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}_{\mu} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}_{j} \\ \bar{\psi}_{i}\gamma_{\mu}P_{L}\psi_{j} &= \bar{\psi}_{i}\bar{\sigma}_{\mu}\psi_{j} \end{aligned}$$

con lo cual queda

$${}_{int,3} = gA_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}\bar{\psi}_{i}\gamma^{\mu}P_{L}\psi_{j}$$

ahora veamos los términos

$$\begin{aligned} {}_{int,4} &= -ig\left(\partial_{\mu}A_{i}^{*}\right)A^{\mu a}\left(T_{ij}^{a}A_{j}\right) - ig\left(\partial^{\mu}A_{i}\right)A_{\mu}^{a}\left(T_{ij}^{a}A_{j}^{*}\right) \\ &= -igA^{\mu a}\left[\left(\partial_{\mu}A_{i}^{*}\right)\left(T_{ij}^{a}A_{j}\right) + \left(\partial^{\mu}A_{i}\right)A_{\mu}^{a}\left(T_{ij}^{a}A_{j}^{*}\right)\right] \\ &= igA_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}A_{j}^{*}\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}A_{i} \end{aligned}$$

el lagrangiano queda

$$\begin{aligned} {}_{int} &= igA_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}A_{j}^{*}\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}A_{i} + g^{2}\left(A_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}A_{j}^{*}\right)\left(A^{\mu b}T_{ik}^{b}A_{k}\right) \\ &\quad + gA_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}\bar{\psi}_{i}\gamma^{\mu}P_{L}\psi_{j} + \sqrt{2}gf_{aji}\left[A_{i}^{*}\bar{\lambda}^{a}P_{L}\psi_{j} + A_{i}\bar{\psi}_{j}P_{R}\lambda^{a}\right] \\ {}_{int} &= gA_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}\left(\bar{\psi}_{i}\gamma^{\mu}P_{L}\psi_{j} + iA_{j}^{*}\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}A_{i}\right) + g^{2}\left(A_{\mu}^{a}T_{ij}^{a}A_{j}^{*}\right)\left(A^{\mu b}T_{ik}^{b}A_{k}\right) \\ &\quad + \sqrt{2}gf_{aji}\left[A_{i}^{*}\bar{\lambda}^{a}P_{L}\psi_{j} + A_{i}\bar{\psi}_{j}P_{R}\lambda^{a}\right] \end{aligned}$$

si el grupo gauge es el producto directo con un $U\left(1\right)$ entonces el supercampo vectorial se escribe

$$\widehat{V} = \left(\widetilde{B}, B_{\mu}, D'\right)$$

y el valor de $gT_{ij}^{a}\lambda^{a}$ se reemplaza por $gT_{ij}^{a}\lambda^{a} + \frac{1}{2}g'y_{i}\delta_{ij}\widetilde{B}$

7.3 Autointeracciones de los multipletes de materia

$$
{}_D = \frac{1}{2} D^a D^a + g D^a A_i^* T_{ij}^a A_j
$$

las ecuaciones de Euler Lagrange conducen a

$$
D^a = -g T_{ij}^a A_i^* A_j
$$

con lo cual el Lagrangiano queda

$$
{}_D = -\frac{1}{2} D^a D^a + g D^a A_i^* T_{ij}^a A_j = V_D
$$

si la teoría tiene un factor $U(1)$ adicional, entonces hay un factor adicional de la forma

$$
2\xi \widehat{V}'\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \xi D'
$$

para un grupo gauge no abeliano este término rompe la simetría gauge

$$
\begin{aligned}
{}_{D'} &= \frac{1}{2} D' D' + \frac{g'}{2} D' y_i A_i^* A_i + \xi D' \\
D' &= -\frac{g'}{2} y_i A_i^* A_i - \xi D' \\
{}_{D'} &= -\frac{1}{2} D' D' = V_{D'}
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
V = \frac{1}{2} \left[D^a D^a + D'^2 \right]
$$

los términos F contribuyen al potencial de la forma

$$
V = F_i^* F_i \quad ; \quad F_i^* = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}
$$

los términos del superpotencial se escriben de la forma

$$
\begin{aligned}
\phi_i \phi_j|_{\theta\theta} &= A_i F_j + F_i A_j - \psi_i \psi_j \\
\phi_i \phi_j \phi_k|_{\theta\theta} &= A_i A_k F_j + A_j A_k F_i + A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k - \psi_i \psi_k A_j - \psi_j \psi_k A_i
\end{aligned}
$$

donde el contenido de partículas de los multipletes quirales viene dado por

$$
\begin{aligned}
\phi_i &\equiv (A_i, \psi_i, F_i) \\
\widehat{e_L^-} &= \left(\widetilde{e}_L^-,\ e_L^-,\ F_{e_L^-} \right) \ ; \ \widehat{\vartheta}_L^- = \left(\widetilde{\vartheta}_L,\ \vartheta_L,\ F_{\vartheta_L} \right) \ ; \ \widehat{E} = \left(\widetilde{e}_R^+,\ e_L^c,\ F_{e_R} \right) \\
\widehat{u}_L &= \left(\widetilde{u}_L,\ u_L,\ F_{u_L} \right) \ ; \ \widehat{d}_L = \left(\widetilde{d}_L,\ d_L,\ F_{d_L} \right) \ ; \ \widehat{U} = \left(\widetilde{u}_R^*,\ u_L^c,\ F_{u_R} \right) \ ; \ \widehat{D} = \left(\widetilde{d}_R^*,\ d_L^c,\ F_{d_R} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}_1^1 &= \left(H_1^0,\ \widetilde{H}_{1L}^0,\ F_{H_1^0} \right) \ ; \ \widehat{H}_1^2 = \left(H_1^-,\ \widetilde{H}_{1L}^-,\ F_{H_1^-} \right) \\
\widehat{H}_2^1 &= \left(H_2^+,\ \widetilde{H}_{2L}^+,\ F_{H_2^+} \right) \ ; \ \widehat{H}_2^2 = \left(H_2^0,\ \widetilde{H}_{2L}^0,\ F_{H_2^0} \right)
\end{aligned}
$$

el superpotencial mas general invariante gauge es

$$W(\Phi) = W_R + W_{NR}$$

donde W_R es el término invariante ante $R-$paridad.

$$\begin{aligned} W_R &= \varepsilon_{ij}\left[h_\tau \widehat{H}_1^i \widehat{L}^j \widehat{E} + h_b \widehat{H}_1^i \widehat{Q}^j \widehat{D} - h_t \widehat{H}_2^i \widehat{Q}^j \widehat{U} - \mu \widehat{H}_1^i \widehat{H}_2^j\right] \\ W_{NR} &= \varepsilon_{ij}\left[\lambda_L \widehat{L}^i \widehat{L}^j \widehat{E} + \lambda'_L \widehat{Q}^j \widehat{D} - h_t \widehat{L}^i \widehat{Q}^j \widehat{D} - \mu' \widehat{L}^i \widehat{H}_2^j + \lambda_\beta \widehat{U}\widehat{D}\widehat{D}\right] \end{aligned}$$

los términos que violan número leptónico son proporcionales a $\lambda_L, \lambda'_L, \mu'$. La violación del número bariónico es proporcional a λ_B.

En el modelo MSSM no hay violación del número leptónico ni bariónico $\Rightarrow W_{NR} = 0$. Esto se consigue introduciendo la simetría discreta

$$\widehat{H} \to -\widehat{H} \quad ; \quad \widehat{L}, \widehat{Q} \to \widehat{L}, \widehat{Q} \quad ; \quad \widehat{E}, \widehat{U}, \widehat{D} \to \widehat{E}, \widehat{U}, \widehat{D}$$

antes de la introducción de esta simetría discreta, los supercampos $\widehat{H}$, $\widehat{L}$, $\widehat{Q}$ son indistinguibles.

La $R-$paridad sobre un campo quiral actúa como se muestra en la Ec. (;;) para cada campo del supermultiplete quiral. Si queremos que W sea $U(1)_R$ invariante[1] se requiere que

$$W|_F \to e^{2i\alpha} W$$

puesto que $W|_F$ es la que aparece en el Lagrangiano SUSY. Recordemos que el multiplete vectorial por ser real implica que sea $U(1)_R$ invariante. De otra parte la invarianza $U(1)_R$ prohibe términos de masa de Majorana para λ (gaugino). Estos son generados a través de los soft breaking terms. Esto se debe a que un término de masa $\lambda\lambda$ rompe la simetría $U(1)_R$ y la convierte en una simetría discreta Z_2 llamada R-paridad. Los números cuánticos de R-paridad están dados por

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}$$

donde S denota el espín, B, L, son los números bariónico y leptónico respectivamente. Esta simetría viene dada por

$$\begin{aligned} l &: \quad l = 1,\ S = 1/2,\ B = 0 \Rightarrow R = (-1)^{3(-1)+2\cdot\frac{1}{2}} = 1 \\ \widetilde{l} &: \quad l = 1,\ S = 0,\ B = 0 \Rightarrow R = (-1)^{3(-1)+2\cdot 0} = -1 \\ q &: \quad l = 0,\ S = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{3} \Rightarrow R = (-1)^{3\left(\frac{1}{3}\right)+2\cdot\frac{1}{2}} = 1 \\ \widetilde{q} &: \quad l = 0,\ S = 0,\ B = \frac{1}{3} \Rightarrow R = (-1)^{3\left(\frac{1}{3}\right)+2\cdot 0} = -1 \\ \gamma &: \quad l = 0,\ S = 1,\ B = 0 \Rightarrow R = (-1)^{3(0)+2\cdot 1} = 1 \\ \widetilde{\gamma} &: \quad l = 0,\ S = 1/2,\ B = 0 \Rightarrow R = (-1)^{3(0)+2\cdot 1/2} = -1 \end{aligned}$$

vemos que para las partículas no supersimétricas, la R-paridad es $+1$, y para las supersimétricas es -1.

Expandamos algunos términos del potencial de Higgs, es decir algunos términos de W_R

$$\varepsilon_{ij}\widehat{H}_1^i \widehat{L}^j = \widehat{H}_1^1 \widehat{L}^2 - \widehat{H}_1^2 \widehat{L}^1 = \widehat{H}_1^0 \widehat{e}_L^- - \widehat{H}_1^- \widehat{\vartheta}_L^1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}\widehat{H}_1^i \widehat{L}^j \widehat{E} &= \left[\widehat{H}_1^0 \widetilde{e_L} \widehat{E} - \widehat{H}_1^- \widehat{\vartheta}_L^1 \widehat{E}\right]_{\theta\theta} \\ &= H_1^0 \widetilde{e}_R^+ F_{e_L^-} + \widetilde{e}_L^- \widetilde{e}_R^+ F_{H_1^0} + H_1^0 \widetilde{e}_L^- F_{e_R^+} - \widetilde{H}_{1L}^0 e_L^- \widetilde{e}_R^+ - \widetilde{H}_{1L}^0 e_L^c \widetilde{e}_L^- - e_L^- e_L^c H_1^0 \\ &\quad - \left[H_1^- \widetilde{e}_R^+ F_{\vartheta_L} + \widetilde{\vartheta}_L \widetilde{e}_R^+ F_{H_1^-} + H_1^- \widetilde{\vartheta}_L F_{e_R^+} - \widetilde{H}_{1L}^- \vartheta_L \widetilde{e}_R^+ - \widetilde{H}_{1L}^- e_L^c \widetilde{\vartheta}_L - \vartheta_L e_L^c H_1^-\right] \end{aligned}$$

[1]Advertencia: en este caso $U(1)_R$ denota la simetría de R-transformación y no una simetría abeliana quiral.

por otro lado usamos la siguiente identidad

$$e_L^c = \left(e_L^-\right)^c = \left[\left(e^-\right)^c\right]_R = \left(e^+\right)_R = e_R^+$$

Chapter 8

Features of this Shell

Following is a group of paragraphs marked as Short Quote. This environment is appropriate for a short quotation or a sequence of short quotations.

> The buck stops here. *Harry Truman*
>
> Ask not what your country can do for you; ask what you can do for your country. *John F Kennedy*

The Long Quotation tag is used for quotations of more than one paragraph.

> Alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank, and of having nothing to do: once or twice she had peeped.
>
> So she was considering in her own mind (as well as she could, for the hot day made her feel very sleepy and stupid), with pink eyes ran close by her.

Use the Verbatim tag when you want LaTeX to preserve spacing, perhaps when including a fragment from a program such as:

```
#include <iostream>         // < > is used for standard libraries.
void main(void)             // "main" method always called first.
{
  cout << "Hello World.";  // Send to output stream.
}
```

Appendix A

Propiedades de los espinores y variables de Grassman

A.1 Propiedades de los espinores

Demostraremos la propiedad (2.15)

$$e^{i\theta\sigma_k} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

para lo cual se hace una expnasión del operador $e^{i\theta\sigma_k}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta\sigma_k} &= \frac{1}{0!} + \frac{(i\theta\sigma_k)}{1!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^2}{2!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^3}{3!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^4}{4!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^5}{5!} + \ldots \\ &= \left[\frac{1}{0!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^2}{2!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^4}{4!} + \ldots\right] \\ &\quad + \left[\frac{(i\theta\sigma_k)}{1!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^3}{3!} + \frac{(i\theta\sigma_k)^5}{5!} + \ldots\right] \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\sigma_k^2 = 1_{2\times 2}$ tenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta\sigma_k} &= \left[\frac{1}{0!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots\right] \\ &\quad + \left[\frac{(i\theta)\,\sigma_k}{1!} + \frac{(i\theta)^3\,\sigma_k}{3!} + \frac{(i\theta)^5\,\sigma_k}{5!} + \ldots\right] \\ &= \left[\frac{1}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right] \\ &\quad + i\sigma_k\left[\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right] \\ &= \cos\theta\,\mathbf{I}_{2\times 2} + i\sin\theta\;\sigma_k \end{aligned}$$

usemos por ejemplo $\sigma_k = \sigma_z$

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta\sigma_k} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + i\sin\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{e^{i\theta\sigma_k} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}}
$$

Lo cual demuestra las relaciones (2.15)

A.1.1 Representaciones espinoriales del grupo de Lorentz

Veamos como se transforman las matrices N en las M, las cuales estan relacionadas con dos representaciones no equivalentes del Grupo de Lorentz. En particular comprobemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
N &= gM^*g^{-1} \qquad (A.1)\\
g &= -i\sigma_2 \\
N &= e^{i\frac{\sigma_j}{2}(\theta_j + i\varphi_j)}, \; M = e^{i\frac{\sigma_j}{2}(\theta_j - i\varphi_j)}
\end{aligned}
$$

Para ello debemos demostrar la siguiente identidad:

$$
\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2 = -\vec{\sigma} \qquad (A.2)
$$

Sabiendo que:

$$
\begin{aligned}
\vec{\sigma}^* &= \begin{pmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \\
\sigma_i\sigma_j &= i\sigma_k \text{ Y permutaciones Cíclicas.}
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_i^2 = I \qquad (A.3)
$$

De esta manera tenemos:

$$
\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_2\sigma_2\sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \\ -\sigma_2 \\ -\sigma_3 \end{pmatrix} = -\vec{\sigma} \qquad (A.4)
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
gM^*g^{-1} &= \sigma_2 e^{-\frac{i\sigma_j^*}{2}(\theta_j + i\varphi_j)}\sigma_2 = \\
&= \sigma_2 I\sigma_2\cos(\theta + i\varphi) - i\sigma_2\frac{\sigma_j}{2}^*\sigma_2\sin(\theta n_j + i\varphi m_j) \\
&= I\cos(\theta + i\varphi) + i\frac{\sigma_j}{2}\sin(n_j\theta + im_j\varphi) \\
gM^*g^{-1} &= e^{\frac{i\sigma_j}{2}(\theta_j + i\varphi_j)} = N \qquad (A.5)
\end{aligned}
$$

Donde hemos utilizado la identidad dada por:

$$
\begin{aligned}
e^{-i\left(\frac{\vec{\sigma}^*}{2}\right)\cdot(\theta\hat{n} + i\hat{m}\phi)} &= \cos\left[\frac{(\vec{\sigma})^*}{2}\cdot(\theta\hat{n} + i\hat{m}\phi)\right] - i\sin\left[\frac{(\vec{\sigma})^*}{2}\cdot(\theta\hat{n} + i\hat{m}\phi)\right] \\
&= I\cos(\theta + i\phi) - i\left(\frac{\sigma_l^*}{2}\right)\sin(n_l\theta + im_l\phi) \qquad (A.6)
\end{aligned}
$$

A.2 Propiedades de transformación de los espinores duales

As it is shown on page (26), the spinors associated to the non-equivalent representations M and N of the $SL(2C)$ group provides two Lorentz invariants

$$(i\sigma_2\xi)^T \xi \quad ; \quad \left(-i\sigma_2\overline{\xi}\right)^T \overline{\xi} \tag{A.7}$$

from which we define the corresponding duals of both types of spinors

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \;, \quad i\sigma_2\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \\ (i\sigma_2\xi)^T \xi &\equiv \xi^\alpha \xi_\alpha = \text{invariant}; \;\; \alpha = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot{1}} \\ \bar{\xi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \;, \; -i\sigma_2\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{\dot{1}} \\ \bar{\xi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \left(-i\sigma_2\overline{\xi}\right)^T \overline{\xi} &\equiv \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \text{ invariant. } \alpha = \dot{1} \;,\; \dot{2} \end{aligned} \tag{A.8}$$

We define the metric tensor for ξ as the one that transform an element of the spinor ξ_α into its dual ξ^α and same for $\overline{\xi}$

$$\begin{aligned} i\sigma_2\xi &= i\sigma_2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \\ -i\sigma_2\bar{\xi} &= -i\sigma_2 \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot{1}} \\ \bar{\xi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{\dot{1}} \\ \bar{\xi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

then

$$(i\sigma_2)^{\alpha\beta} \xi_\beta = \xi^\alpha \quad ; \quad (-i\sigma_2)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \tag{A.9}$$

therefore the metric tensor for both types of Weyl's spinors are

$$(i\sigma_2)^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon^{\alpha\beta} \quad ; \quad (-i\sigma_2)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{A.10}$$

respectively. Let us denote ξ^D to be the dual of the spinor ξ and similarly for $\overline{\xi}$ then

$$\begin{aligned} i\sigma_2\xi &= \xi^D \Rightarrow \xi = \left[(i\sigma_2)^{-1}\right] \xi^D \\ -i\sigma_2\overline{\xi} &= \overline{\xi}^D \Rightarrow \overline{\xi} = \left[(-i\sigma_2)^{-1}\right] \overline{\xi}^D \end{aligned}$$

therefore

$$\begin{aligned} \xi &= [-i\sigma_2]\, \xi^D \Rightarrow \xi_\alpha = [-i\sigma_2]_{\alpha\beta}\, \xi^\beta \\ \overline{\xi} &= [i\sigma_2]\, \overline{\xi}^D \Rightarrow \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = [i\sigma_2]^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\, \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \end{aligned}$$

so

$$(-i\sigma_2)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} \quad ; \quad (i\sigma_2)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{A.11}$$

comparing (A.10) and (A.11) we obtain

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (i\sigma_2)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad ; \quad = (-i\sigma_2)_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{A.12}$$

observe that the difference in sign between the definitions of the duals of ξ, and $\overline{\xi}$ provides the equality above. It is this fact that makes sense to define the invariants in Eq. (A.7) with a different relative sign.

From Eqs. (2.41) we see that

$$\begin{aligned} \xi' &= N\xi \Leftrightarrow \xi'_\alpha = N_\alpha{}^\beta \xi_\beta \\ \bar{\xi}' &= M\bar{\xi} \Leftrightarrow \bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} = M^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \end{aligned} \tag{A.13}$$

The matrix $N_\alpha{}^\beta$ provides the connection among the transformed components of the Weyl's spinor of type ξ. $M^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ makes the work for the spinors of type $\bar{\xi}$. We wonder to know how the corresponding duals are connected i.e. what matrices provide the transformations

$$\begin{aligned} \xi^{D\prime} &= F\xi^D \Leftrightarrow \xi'^\alpha = F^\alpha{}_\beta \xi^\beta \\ \bar{\xi}^{D\prime} &= G\bar{\xi}^D \Leftrightarrow \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}} = G_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \end{aligned}$$

the connection is provided by the metric tensors, using (A.9), (A.12) and (A.13), we can check the transformation rules for the duals

$$\begin{aligned} \xi^\rho &= \varepsilon^{\rho\alpha}\xi_\alpha \quad ; \quad \xi'_\alpha = N_\alpha{}^\beta \xi_\beta \Rightarrow \\ \xi'^\rho &= \varepsilon^{\rho\alpha}\xi'_\alpha = \varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \xi_\beta = \varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \left(\varepsilon_{\beta\gamma}\xi^\gamma\right) \\ \xi'^\rho &= \left(\varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \varepsilon_{\beta\gamma}\right)\xi^\gamma \equiv F^\rho{}_\gamma \xi^\gamma \end{aligned}$$

the tensor $F^\rho{}_\gamma$ makes the rule of transformation among the duals of ξ

$$F^\rho{}_\gamma = \varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \varepsilon_{\beta\gamma}$$

in matrix notation

$$\begin{aligned} F &= (i\sigma_2)\, N\, (-i\sigma_2) = \sigma_2 N \sigma_2 = \left(N^{-1}\right)^T \\ F^\rho{}_\gamma &= \left[\left(N^{-1}\right)^T\right]^\rho{}_\gamma \end{aligned}$$

finally

$$\xi'^\rho = \left[\left(N^{-1}\right)^T\right]^\rho{}_\gamma \xi^\gamma$$

where we used the explicit form of M, N given by (2.39) and the properties

$$\sigma_2\sigma_2 = 1 \quad ; \quad \sigma_2 \overrightarrow{\sigma} = -\left(\overrightarrow{\sigma}\right)^T \sigma_2$$

we proceed similarly for the other representation

$$\begin{aligned} \xi^\rho &= \varepsilon^{\rho\alpha}\xi_\alpha \quad ; \quad \xi'_\alpha = N_\alpha{}^\beta \xi_\beta \Rightarrow \\ \xi'^\rho &= \varepsilon^{\rho\alpha}\xi'_\alpha = \varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \xi_\beta = \varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \left(\varepsilon_{\beta\gamma}\xi^\gamma\right) \\ \xi'^\rho &= \left(\varepsilon^{\rho\alpha} N_\alpha{}^\beta \varepsilon_{\beta\gamma}\right)\xi^\gamma \equiv F^\rho{}_\gamma \xi^\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}} \quad ; \quad \bar{\xi}^{\dot{\beta}} = M^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\rho}}\bar{\xi}^{\dot{\rho}} \Rightarrow \\ \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}'^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} M^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\rho}}\bar{\xi}^{\dot{\rho}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} M^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\rho}}\left(\varepsilon^{\dot{\rho}\dot{\gamma}}\bar{\xi}_{\dot{\gamma}}\right) \\ \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}} &= \left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} M^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\rho}}\varepsilon^{\dot{\rho}\dot{\gamma}}\right)\bar{\xi}_{\dot{\gamma}} \equiv G_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}}\bar{\xi}_{\dot{\gamma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}} &= \left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} M^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\rho}} \varepsilon^{\dot{\rho}\dot{\gamma}}\right) \\ G &= (-i\sigma_2)\, M\, (i\sigma_2) \\ &= \sigma_2 M \sigma_2 \\ G &= \left(M^{-1}\right)^T \end{aligned}$$

the transformation rule is

$$\bar{\xi}'_{\dot{\alpha}} = \left[\left(M^{-1}\right)^T\right]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\rho}} \bar{\xi}_{\dot{\rho}}$$

In addition if we take into account the properties

$$\left(N^{-1}\right)^T = M^* \quad ; \quad \left(M^{-1}\right)^T = N^*$$

we find that the rule of transformation among the duals are given by

$$\xi'^{\rho} = [M^*]^{\rho}{}_{\gamma} \xi^{\gamma} \quad ; \quad \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}} = [N^*]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\rho}} \bar{\xi}_{\dot{\rho}}$$

if we compare this rules of transformations to the ones of the spinors ξ_ρ, $\xi^{\dot{\alpha}}$ in Eq. (A.13)

$$\xi'_{\alpha} = N_{\alpha}{}^{\beta} \xi_{\beta} \quad ; \quad \bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} = M^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}}$$

we get

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \xi^*_{\alpha} \tag{A.14}$$

A.3 Basic properties of the inner products of spinors and Grassman variables

A.3.1 Basic definitions

Tenemos básicamente tres tipos de "objetos fermiónicos" que se describen a través de espinores, 1) los operadores fermiónicos que actúan sobre los estados para cambiar su espín, usualmente se denotan por Q, $\bar{Q}$. 2) Campos fermiónicos que describen la materia en el modelo estándar (o mas allá) o supercompañeros de partículas bosónicas del modelo estándar (o más allá), usualmente se denotan con letras como $\phi, \chi, \psi, \bar{\phi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$. 3) Variables de Grassman que representan coordenadas en el superespacio, usualmente se representan con letras como $\theta, \bar{\theta}, \xi, \bar{\xi}$. Estos tres tipos de variables fermiónicas son los análogos a: 1) Operadores bosónicos (generadores) del álgebra de Poincaré, 2) Campos bosónicos que describen bosones vectoriales, 3) Coordenadas (conmutantes) espacio temporales. Aquí se manifiesta el carácter supersimétrico de la teoría, pues en las teorías gauges tradicionales solo existe el análogo para los campos bosónicos.

En general, las variables de Grassman y los campos fermiónicos anticonmutan todos entre sí

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = \{\phi, \chi\} = \{\phi, \bar{\chi}\} = \left\{\bar{\phi}, \bar{\chi}\right\} = 0$$

los operadores fermiónicos anticonmutan con las variables de Grassman y con los campos fermiónicos, pero los operadores fermiónicos entre sí solo conmutan si pertenecen a la misma representación es decir $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0$ pero $\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} \neq 0$.

Los tensores métricos asociados a los espinores son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \end{aligned} \tag{A.15}$$

para campos fermiónicos se tiene

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta$$

we define the inner product as $\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha$. Definimos el operador σ^μ como

$$\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma}) \tag{A.16}$$

its elements are

$$\sigma^\mu \to (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{A.17}$$

in order to define a covariant trace, it is necessary to introduce

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \quad ; \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma}) \tag{A.18}$$

so that

$$\begin{aligned} tr\,(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\left[\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\dot{\alpha}}\right] \\ &= -2g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{A.19}$$

$g_{\mu\nu} = \left(-1, \vec{1}\right)$. From the latter expression we can demostrate the completeness relation

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \tag{A.20}$$

A.3.2 Properties of the inner products

A continuación desarrollaremos algunas propiedades de los productos internos entre campos fermiónicos, entre variables de Grassman, y entre términos mixtos que contienen campos fermiónicos y variables de Grassman.

1. $$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\chi_\alpha = -\psi_\beta\left(\varepsilon^{\beta\alpha}\right)\chi_\alpha = -\psi_\beta\chi^\beta$$

2. Usando la Ec. A.14
$$(\psi\chi)^\dagger = (\psi^\alpha\chi_\alpha)^\dagger = \chi^*_\alpha\psi^{\alpha *} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}$$

3. $$\bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$$

4. For the Grassman variables defined in Sec. (4.1.2) we get
$$\begin{aligned} \theta\theta &= \theta_\alpha\theta^\alpha = \theta_1\theta^1 + \theta_2\theta^2 = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta = \varepsilon_{12}\theta^1\theta^2 + \varepsilon_{21}\theta^2\theta^1 \\ &= 2\varepsilon_{12}\theta^1\theta^2 = -2\theta^1\theta^2 \end{aligned}$$

5. $\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta$. We have just demostrated that
$$\theta\theta = -2\theta^1\theta^2 \Rightarrow \theta^1\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta\theta \Rightarrow \theta^2\theta^1 = \frac{1}{2}\theta\theta$$
taking into account that $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$, $\theta^i\theta^i = 0$, $\varepsilon^{ii} = 0$
$$\begin{aligned} \theta^1\theta^2 &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{12}\theta\theta \; ; \; \theta^2\theta^1 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{21}\theta\theta \\ \theta^1\theta^1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{11}\theta\theta = 0 \; ; \; \theta^2\theta^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{22}\theta\theta = 0 \end{aligned}$$
so in a shorter notation
$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta$$

6. In a similar way we have

$$\theta_\alpha\theta_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta$$

7.

$$\bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = 2\varepsilon^{\dot{1}\dot{2}}\bar{\theta}_{\dot{1}}\bar{\theta}_{\dot{2}}$$

8.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \\ \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} (\theta\phi)(\theta\psi) &= \theta^\alpha\phi_\alpha\theta^\beta\psi_\beta = -\phi_\alpha\theta^\alpha\theta^\beta\psi_\beta = -\phi_\alpha\psi_\beta\theta^\alpha\theta^\beta = -\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(\phi\psi)\right]\left[-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta)\right] \\ (\theta\phi)(\theta\psi) &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}(\phi\psi)(\theta\theta) = \frac{1}{2}(\phi\psi)(\theta\theta) \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\phi}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = -\bar{\phi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\phi}\bar{\psi})\right]\left[-\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\right] \\ (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\phi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) = \frac{1}{2}(\bar{\phi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) \end{aligned}$$

A.3.3 Fierz rearrangement

$$\begin{aligned} (\phi\psi)\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &= \phi^\gamma\psi_\gamma\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \phi^\gamma\varepsilon_{\gamma\alpha}\psi^\alpha\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = -\varepsilon_{\gamma\alpha}\psi^\alpha\phi^\gamma\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \\ (\phi\psi)\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\alpha\gamma}\psi^\alpha\phi^\gamma\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\chi}^{\dot{\gamma}} = \delta_\alpha{}^\beta\varepsilon_{\beta\gamma}\psi^\alpha\phi^\gamma\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\bar{\chi}^{\dot{\gamma}} = \delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\psi^\alpha\phi^\gamma\bar{\chi}^{\dot{\gamma}} \end{aligned}$$

using the completeness relation A.20 we get

$$(\phi\psi)\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\psi^\alpha\phi^\gamma\bar{\chi}^{\dot{\gamma}}$$

and using (A.18)

$$\begin{aligned} (\phi\psi)\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\sigma_\mu)_{\gamma\dot{\gamma}}\psi^\alpha\phi^\gamma\bar{\chi}^{\dot{\gamma}} = -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\sigma_\mu)_{\gamma\dot{\gamma}}\phi^\gamma\bar{\chi}^{\dot{\gamma}}\psi^\alpha \\ &= -\frac{1}{2}\left[\phi^\gamma(\sigma_\mu)_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{\chi}^{\dot{\gamma}}\right]\left[\psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\right] \\ &= -\frac{1}{2}(\phi\sigma_\mu\bar{\chi})(\psi\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

A.3.4 Other identities

$$\phi\sigma^{\mu}\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\phi$$

$$\begin{aligned}
\phi\sigma^{\mu}\bar{\chi} &= \phi^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\alpha\beta}\phi_{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}_{\dot{\beta}} = -\bar{\chi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\beta\alpha}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\phi_{\beta} \\
&= -\bar{\chi}_{\dot{\beta}}\left(\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\beta}\beta}\phi_{\beta} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\phi
\end{aligned}$$

$$\left(\sigma^{\mu}\bar{\chi}\right)^{\alpha} = -\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\alpha}$$

$$\left(\sigma^{\mu}\bar{\chi}\right)^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\left(\sigma^{\mu}\bar{\chi}\right)_{\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\rho}}\bar{\chi}^{\dot{\rho}} = -\bar{\chi}_{\dot{\rho}}\left(\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\rho}\alpha} = -\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\alpha}$$

$$2\phi^{\alpha}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = 2\phi^{\gamma}\bar{\psi}^{\dot{\delta}}\delta_{\gamma}{}^{\alpha}\delta_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\beta}}$$

Appendix B

Propiedades de las álgebras graduadas

B.1 Álgebra de Generadores, sección 3.2.2

Evaluemos cada término de la ecuación (3.4). Comenzamos por R_1

$$R_1 \equiv \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * b_j \ , \ b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * b_l\right] =$$

$$\begin{aligned}
& b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * \left[b_j \ , \ b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * b_l\right] + \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} \ , \ b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * b_l\right] * b_j \\
= \ & b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * \left(\left[b_j \ , \ b_k^\dagger\right] * K^2_{bb,kl} * b_l + b_k^\dagger * K^2_{bb,kl} * [b_j \ , \ b_l]\right) \\
& + \left(\left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} \ , \ b_k^\dagger\right] * K^2_{bb,kl} * b_l + b_k^\dagger * \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} \ , \ K^2_{bb,kl} * b_l\right]\right) * b_j
\end{aligned}$$

debemos recordar que los kernels K_{ij} son números complejos de modo que conmutan con todo, por lo tanto

$$\begin{aligned}
R_1 \ = \ & b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bb,ij} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) * \left(\delta_{jk} \delta^3 (\mathbf{q} - \mathbf{r}) K^2_{bb,kl} (\mathbf{r}, \mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s})\right. \\
& - b_k^\dagger (\mathbf{r}) * \delta_{il} \delta^3 (\mathbf{p} - \mathbf{s}) * K^1_{bb,ij} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) K^2_{bb,kl} (\mathbf{r}, \mathbf{s}) * b_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \ = \ & b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bb,ij} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) K^2_{bb,jl} (\mathbf{q}, \mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \\
& - b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^1_{bb,ij} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) K^2_{bb,ki} (\mathbf{r}, \mathbf{p}) * b_j (\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{B.1}$$

el otro término R_2 nos da

$$\begin{aligned}
R_2 \ = \ & \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * b_j \ , \ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] \\
= \ & b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * \left[b_j \ , \ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] + \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} \ , \ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] * b_j \\
R_2 \ = \ & b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} * \left(\left[b_j \ , \ f_k^\dagger\right] * K^2_{ff,kl} * f_l + f_k^\dagger * \left[b_j \ , \ K^2_{ff,kl} * f_l\right]\right) \\
& + f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} \ , \ f_l\right] * b_j + \left[b_i^\dagger * K^1_{bb,ij} \ , \ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl}\right] * f_l
\end{aligned}$$

R_2 y R_3 se anulan en virtud de la QR.

$$R_2 = R_3 = 0 \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= \left[f_i^\dagger * K^1_{ff,ij} * f_j \ , \ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * f_l\right] \\
&= f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} * \left[f_i^\dagger * K^1_{ff,ij} * f_j \ , \ f_l\right] + \left[f_i^\dagger * K^1_{ff,ij} * f_j \ , \ f_k^\dagger * K^2_{ff,kl}\right] * f_l \\
&= f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} K^1_{ff,ij} * \left[f_i^\dagger f_j \ , \ f_l\right] + \left[f_i^\dagger f_j \ , \ f_k^\dagger\right] * K^2_{ff,kl} K^1_{ff,ij} * f_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} K^1_{ff,ij} * \left(f_i^\dagger \{f_j \ , \ f_l\} - \left\{f_i^\dagger \ , \ f_l\right\} f_j\right) \\
&\quad + \left(f_i^\dagger \left\{f_j \ , \ f_k^\dagger\right\} - \left\{f_i^\dagger \ , \ f_k^\dagger\right\} f_j\right) * K^2_{ff,kl} K^1_{ff,ij} * f_l \\
R_4 &= -f_k^\dagger * K^2_{ff,kl} K^1_{ff,ij} * \left\{f_i^\dagger \ , \ f_l\right\} f_j + f_i^\dagger \left\{f_j \ , \ f_k^\dagger\right\} * K^2_{ff,kl} K^1_{ff,ij} * f_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= -f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{ff,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) \, K^1_{ff,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left(-\delta_{il}\delta^3 (\mathbf{p}-\mathbf{s})\right) f_j (\mathbf{q}) \\
&\quad + f_i^\dagger (\mathbf{p}) \, \delta_{jk}\delta^3 (\mathbf{q}-\mathbf{r}) * K^2_{ff,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) \, K^1_{ff,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_l (\mathbf{s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{ff,ki} (\mathbf{r},\mathbf{p}) \, K^1_{ff,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q}) \\
&\quad + f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^2_{ff,jl} (\mathbf{q},\mathbf{s}) \, K^1_{ff,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_l (\mathbf{s})
\end{aligned} \tag{B.3}$$

B.1.1 Conmutador entre dos operadores fermiónicos

Evaluemos el conmutador de dos operadores fermiónicos

$$\begin{aligned}
F^1 &= f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q}) + b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q}) \\
F^2 &= f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) + b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s})
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\left[F^1, F^2\right] =$$

$$\begin{aligned}
&\left[f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) + b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s})\right] + \\
&\left[b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) + b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s})\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[F^1, F^2\right] &= \left[f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s})\right] \\
&\quad + \left[f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s})\right] \\
&\quad + \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s})\right] \\
&\quad + \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s})\right] \\
&= P_1 + P_2 + P_3 + P_4
\end{aligned}$$

examinemos el segundo término P_2

$$\begin{aligned}
P_2 &= \left[f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\right] \\
&= f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left[b_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\right] \\
&\quad + \left[f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\right] * b_j(\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \Big(b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * [b_j(\mathbf{q}) \ , f_l(\mathbf{s})] \\
&\quad + \left[b_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r})\right] * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\Big) \\
&\quad + \Big(b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left[f_i^\dagger(\mathbf{p}) \ , f_l(\mathbf{s})\right] \\
&\quad + \left[f_i^\dagger(\mathbf{p}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r})\right] * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\Big) * b_j(\mathbf{q}) \\
P_2 &= P_{2,1} + P_{2,2} + P_{2,3} + P_{2,4}
\end{aligned}$$

usando las relaciones de conmutación vemos que tres de estos términos se pueden convertir en formas bilineales, pero no así el término $P_{2,3}$. Esto se debe a que tenemos el conmutador de dos fermiones, el cual no está definido en las QR y no se puede escribir únicamente en términos de factores numéricos, como sí es el caso de los otros conmutadores. En conclusión, no podemos escribir el conmutador $\left[F^1, F^2\right]$ en términos de operadores de simetría.

B.1.2 Anticonmutador de dos operadores fermiónicos

Usando (B.4) y las propiedades (3.3, 3.6) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\{F^1, F^2\right\} &= \left\{f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j(\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s})\right\} \\
&\quad + \left\{f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\right\} \\
&\quad + \left\{b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{bf,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j(\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s})\right\} \\
&\quad + \left\{b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{bf,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{bf,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s})\right\} \\
&= C_1 + C_2 + C_3 + C_4
\end{aligned}$$

calculamos primero C_1

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j(\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s})\right\} \\
&= f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left[b_j(\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s})\right] \\
&\quad + \left\{f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s})\right\} * b_j(\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= f_i^\dagger(\mathbf{p}) * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \Big(f_k^\dagger(\mathbf{r}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * [b_j(\mathbf{q}) \ , b_l(\mathbf{s})] \\
&\quad + \left[b_j(\mathbf{q}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r})\right] * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l(\mathbf{s})\Big) \\
&\quad + \Big(\left\{f_i^\dagger(\mathbf{p}) \ , f_k^\dagger(\mathbf{r})\right\} * b_l(\mathbf{s}) - f_k^\dagger(\mathbf{r}) * \left[f_i^\dagger(\mathbf{p}) \ , b_l(\mathbf{s})\right]\Big) \\
&\quad * K_{fb,ij}^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) * K_{fb,kl}^2(\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_j(\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$C_1 = 0$$

ahora evaluamos C_2

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left\{ f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q}) \ \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) \right\} \\
&= f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left[b_j (\mathbf{q}) \ \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) \right] \\
&\quad + \left\{ f_i^\dagger (\mathbf{p}) \ \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) \right\} * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \Big(b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * [b_j (\mathbf{q}) \ \ , f_l (\mathbf{s})] \\
&\quad + \left[b_j (\mathbf{q}) \ \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) \right] * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) \Big) + \\
&\quad + \Big(b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * \left\{ f_i^\dagger (\mathbf{p}) \ \ , f_l (\mathbf{s}) \right\} \\
&\quad + \left[f_i^\dagger (\mathbf{p}) \ \ , b_k^\dagger (\mathbf{r}) \right] * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) \Big) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left(\delta_{jk} \delta^3 (\mathbf{q}-\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) \right) + \\
&\quad + \Big(-b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * \delta_{il} \delta (\mathbf{p}-\mathbf{s}) \Big) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= f_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * K^2_{bf,jl} (\mathbf{q},\mathbf{s}) * f_l (\mathbf{s}) + \\
&\quad - b_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{bf,ki} (\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{fb,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

ahora C_3

$$\begin{aligned}
C_3 &= \left\{ b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q}) \ \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \right\} \\
C_3 &= b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left\{ f_j (\mathbf{q}) \ \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \right\} \\
&\quad - \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}) \ \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \right] * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \Big(\left\{ f_j (\mathbf{q}) \ \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) \right\} * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \\
&\quad - f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * [f_j (\mathbf{q}) \ \ , b_l (\mathbf{s})] \Big) \\
&\quad - \Big(f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}) \ \ , b_l (\mathbf{s}) \right] \\
&\quad + \left[b_i^\dagger (\mathbf{p}) \ \ , f_k^\dagger (\mathbf{r}) \right] * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \Big) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * \delta_{jk} \delta^3 (\mathbf{q}-\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \\
&\quad - \Big(-f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,kl} (\mathbf{r},\mathbf{s}) * \delta_{il} \delta^3 (\mathbf{p}-\mathbf{s}) \Big) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= b_i^\dagger (\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * K^2_{fb,jl} (\mathbf{q},\mathbf{s}) * b_l (\mathbf{s}) \\
&\quad + f_k^\dagger (\mathbf{r}) * K^2_{fb,ki} (\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij} (\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

C_4 está dado por

$$
\begin{aligned}
C_4 &= \left\{ b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \right\} \\
C_4 &= b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \left\{ f_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \right\} \\
&\quad - \left[b_i^\dagger(\mathbf{p}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \right] * K^1_{bf,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_j(\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_4 &= b_i^\dagger(\mathbf{p}) * K^1_{bf,ij}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * \Big(\left[f_j(\mathbf{q}) \ , b_k^\dagger(\mathbf{r}) \right] * K^2_{bf,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * f_l(\mathbf{s}) \\
&\quad + b_k^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bf,kl}(\mathbf{r},\mathbf{s}) * \{ f_j(\mathbf{q}) \ , f_l(\mathbf{s}) \} \Big) \\
C_4 &= 0
\end{aligned}
$$

sumando todos los términos

$$\left\{ F^1, F^2 \right\} = C_2 + C_3 =$$

$$
\begin{aligned}
& f_i^\dagger(\mathbf{r}) * K^1_{fb,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^2_{bf,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_l(\mathbf{q}) - b_i^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{bf,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{fb,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_l(\mathbf{q}) \\
& + b_i^\dagger(\mathbf{r}) * K^1_{bf,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^2_{fb,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * b_l(\mathbf{q}) + f_i^\dagger(\mathbf{r}) * K^2_{fb,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{bf,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) * f_l(\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{ F^1, F^2 \right\} &= f_i^\dagger(\mathbf{r}) * \left[K^1_{fb,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^2_{bf,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + K^2_{fb,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{bf,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \right] * f_l(\mathbf{q}) \\
&\quad + b_i^\dagger(\mathbf{r}) * \left[K^1_{bf,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^2_{fb,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - K^2_{bf,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{fb,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \right] * b_l(\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

de modo que el anticonmutador de dos operadores de simetría fermiónicos nos da un operador bosónico

$$\left\{ F^1, F^2 \right\} = B^3$$

donde

$$
\begin{aligned}
K^3_{ff,il}(\mathbf{r},\mathbf{q}) &= K^1_{fb,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^2_{bf,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + K^2_{fb,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{bf,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \\
K^3_{bb,il}(\mathbf{r},\mathbf{q}) &= K^1_{bf,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^2_{fb,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - K^2_{bf,ij}(\mathbf{r},\mathbf{p}) * K^1_{fb,jl}(\mathbf{p},\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

hay un desacuerdo con la ecuación del report de Sohnius (Eq. 2.10b en el report), que es el signo menos en el kernel $K^3_{bb,il}(\mathbf{r},\mathbf{q})$.

B.2 Identidades de Jacobi graduadas

Demostraremos las identidades de Jacobi graduadas

$$[[B_i, B_j], B_k] + [[B_k, B_i], B_j] + [[B_j, B_k], B_i] = 0 \quad \text{(B.5)}$$

$$[[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_j, F_\alpha], B_i] + [[B_i, B_j], F_\alpha] = 0 \quad \text{(B.6)}$$

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\} = 0 \quad \text{(B.7)}$$

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, F_i] + [\{F_i, F_\alpha\}, F_\beta] + [\{F_\beta, F_i\}, F_\alpha] = 0 \quad \text{(B.8)}$$

las dos primeras son las identidades de Jacobi normales, demostremos las dos últimas. Para la Ec. (B.7) tenemos

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + \{[B_i, F_\alpha], F_\beta\} - \{[F_\beta, B_i], F_\alpha\}$$

$$\begin{aligned}
&= [(F_\alpha F_\beta + F_\beta F_\alpha), B_i] + \{(B_i F_\alpha - F_\alpha B_i), F_\beta\} - \{(F_\beta B_i - B_i F_\beta), F_\alpha\} \\
&= (F_\alpha F_\beta + F_\beta F_\alpha) B_i - B_i (F_\alpha F_\beta + F_\beta F_\alpha) + (B_i F_\alpha - F_\alpha B_i) F_\beta \\
&\quad + F_\beta (B_i F_\alpha - F_\alpha B_i) - (F_\beta B_i - B_i F_\beta) F_\alpha - F_\alpha (F_\beta B_i - B_i F_\beta) \\
&= F_\alpha F_\beta B_i + F_\beta F_\alpha B_i - B_i F_\alpha F_\beta - B_i F_\beta F_\alpha + B_i F_\alpha F_\beta - F_\alpha B_i F_\beta \\
&\quad + F_\beta B_i F_\alpha - F_\beta F_\alpha B_i - F_\beta B_i F_\alpha + B_i F_\beta F_\alpha - F_\alpha F_\beta B_i + F_\alpha B_i F_\beta \\
&= F_\alpha F_\beta B_i - F_\alpha F_\beta B_i + F_\beta F_\alpha B_i - F_\beta F_\alpha B_i - B_i F_\alpha F_\beta + B_i F_\alpha F_\beta \\
&\quad - B_i F_\beta F_\alpha + B_i F_\beta F_\alpha - F_\alpha B_i F_\beta + F_\alpha B_i F_\beta + F_\beta B_i F_\alpha - F_\beta B_i F_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para la Ec. (B.8) se tiene

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma] + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta] + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha]$$

$$\begin{aligned}
&= [(F_\alpha F_\beta + F_\beta F_\alpha), F_\gamma] + [(F_\gamma F_\alpha + F_\alpha F_\gamma), F_\beta] + [(F_\beta F_\gamma + F_\gamma F_\beta), F_\alpha] \\
&= (F_\alpha F_\beta + F_\beta F_\alpha) F_\gamma - F_\gamma (F_\alpha F_\beta + F_\beta F_\alpha) + (F_\gamma F_\alpha + F_\alpha F_\gamma) F_\beta \\
&\quad - F_\beta (F_\gamma F_\alpha + F_\alpha F_\gamma) + (F_\beta F_\gamma + F_\gamma F_\beta) F_\alpha - F_\alpha (F_\beta F_\gamma + F_\gamma F_\beta) \\
&= F_\alpha F_\beta F_\gamma + F_\beta F_\alpha F_\gamma - F_\gamma F_\alpha F_\beta - F_\gamma F_\beta F_\alpha + F_\gamma F_\alpha F_\beta + F_\alpha F_\gamma F_\beta \\
&\quad - F_\beta F_\gamma F_\alpha - F_\beta F_\alpha F_\gamma + F_\beta F_\gamma F_\alpha + F_\gamma F_\beta F_\alpha - F_\alpha F_\beta F_\gamma - F_\alpha F_\gamma F_\beta \\
&= F_\alpha F_\beta F_\gamma - F_\alpha F_\beta F_\gamma + F_\beta F_\alpha F_\gamma - F_\beta F_\alpha F_\gamma - F_\gamma F_\alpha F_\beta + F_\gamma F_\alpha F_\beta \\
&\quad - F_\gamma F_\beta F_\alpha + F_\gamma F_\beta F_\alpha + F_\alpha F_\gamma F_\beta - F_\alpha F_\gamma F_\beta - F_\beta F_\gamma F_\alpha + F_\beta F_\gamma F_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

Appendix C

Álgebra de supercampos

C.1 Expansión de una función escalar en serie de Taylor

La expansión en serie de Taylor para una función escalar $A\left(x+i\theta\sigma\bar{\theta}\right)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
A\left(y\right) &= A\left(x+i\theta\sigma\bar{\theta}\right)=A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{2}\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_{\beta}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_{\beta}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\theta_{\alpha}\theta_{\beta}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{8}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\theta\theta\right)\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{8}\varepsilon_{\beta\alpha}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{8}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{8}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\left(\bar{\sigma}^{\nu}\right)^{\dot{\beta}\beta}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}A\left(x\right) \\
&= A\left(x\right)+i\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\partial^{\nu}\partial_{\nu}A\left(x\right)
\end{aligned}$$

y se obtiene finalmente

$$A\left(y\right)=A\left(x\right)+i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\left(x\right)-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A\left(x\right) \tag{C.1}$$

Donde hemos utilizado las siguientes identidades:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\theta\theta\right) = \theta^{\alpha}\theta^{\beta} \tag{C.2}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\theta\theta\right) = \theta_{\alpha}\theta_{\beta} \tag{C.3}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \tag{C.4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \tag{C.5}$$

$$\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^{\nu}\right)^{\dot{\beta}\beta} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{C.6}$$

La expansión en serie de Taylor para el término espinorial del supercampo (5.14) resulta ser:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\left[\theta\psi\left(y\right)\right] &= \sqrt{2}\theta_{\beta}\left[\psi^{\beta}\left(x\right)+i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right)\right] \\
&= \sqrt{2}\theta_{\beta}\psi^{\beta}\left(x\right)+i\sqrt{2}\theta_{\beta}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\theta_{\beta}\psi^{\beta}\left(x\right)-i\sqrt{2}\theta_{\beta}\theta_{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\theta_{\beta}\psi^{\beta}\left(x\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\varepsilon_{\beta\alpha}\left(\theta\theta\right)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\theta_{\beta}\psi^{\beta}\left(x\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\theta\theta\right)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\theta_{\beta}\psi^{\beta}\left(x\right)-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\theta\theta\right)\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(x\right)\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
&= \sqrt{2}\theta_{\beta}\psi^{\beta}\left(x\right)-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\theta\theta\right)\left[\partial_{\mu}\psi\left(x\right)\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right] \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

La expansión análoga para el término espinorial del supercampo antiquiral está dada por:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\left[\bar{\theta}\bar{\psi}\left(y\right)\right] &= \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\left[\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right)-i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right)\right] \\
&= \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right)-i\sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right)+i\sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^{\alpha}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right) \\
& \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta_{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\left(x\right) \\
&= \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}\left(x\right)+i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\bar{\theta}\bar{\theta}\left[\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\left(x\right)\right] \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

C.2 Generación del multiplete quiral a partir del supercampo quiral

Por otro lado veamos como se deducen las expresiones (5.27) para las componentes del supercampo Quiral. De acuerdo con las expresiones (5.14), (5.12) y (4.40) para el supercampo quiral y las derivadas covariantes podemos deducir lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\Phi| &= \Phi|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}=A\left(x\right) \\
D^{\alpha}\Phi| &= D^{\alpha}U\Psi\left(x,\theta\right)|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}=\left[UU^{-1}D^{\alpha}U\Psi\left(x,\theta\right)\right]\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\
&= U\left[\partial^{\alpha}+2i\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right]\Psi\left(x,\theta\right)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}
\end{aligned}
$$

ahora teniendo en cuenta las Ecs. (5.12, 5.13), se puede ver que

$$
\Psi\left(x,\theta\right)|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}=\Psi\left(y,\theta\right)|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}
$$

ya que el corrimiento se anula si hacemos $\theta = 0,\ \bar{\theta} = 0$, usando además la expansión (C.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\Phi|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} &= U\left[\partial^{\alpha} + 2i\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right]\left(A\left(x\right) + \sqrt{2}\left[\theta_{\gamma}\psi^{\gamma}\left(x\right)\right] + \left(\theta_{\beta}\theta^{\beta}\right)F\left(x\right)\right)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= U\left\{\sqrt{2}\partial^{\alpha}\left[\theta_{\gamma}\psi^{\gamma}\left(x\right)\right] + \ \mathrm{O}\left(\theta,\bar{\theta}\right)\right\}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = U\left\{\sqrt{2}\psi^{\alpha}\left(x\right)\right\}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= \sqrt{2}\,\psi^{\alpha}\left(y\right)|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \end{aligned}$$

finalmente

$$D^{\alpha}\Phi|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = \sqrt{2}\psi^{\alpha}\left(x\right)$$

veamos las segundas derivadas del supercampo quiral

$$\begin{aligned} D_{\alpha}D^{\alpha}\Phi| &= D_{\alpha}D^{\alpha}U\Psi\left(x,\theta\right)|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = UU^{-1}D_{\alpha}UU^{-1}D^{\alpha}U\Psi\left(x,\theta\right)\big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= U\left[\partial_{\alpha} + 2i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right]\left[\partial^{\alpha} + 2i\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right]\Psi\left(x,\theta\right)\big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= U\left(\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} + \ \mathrm{O}\left(\bar{\theta},\bar{\theta}^{2}\right)\right)\left(A\left(x\right) + \sqrt{2}\left[\theta_{\gamma}\psi^{\gamma}\left(x\right)\right] + \left(\theta_{\beta}\theta^{\beta}\right)F\left(x\right)\right)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= U\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\theta_{\beta}\theta^{\beta}F\left(x\right)\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} = -4F\left(x\right) \end{aligned} \tag{C.9}$$

Donde hemos utilizado las identidades dadas por:

$$U^{-1}D^{\alpha}U = \partial^{\alpha} + 2i\left(\sigma^{\mu}\right)^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \tag{C.10}$$

$$\partial_{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\ ,\ \partial^{\alpha} = -\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_{\beta} \tag{C.11}$$

$$\partial_{\alpha}\theta^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{C.12}$$

C.3 Términos cinéticos para el multiplete quiral

Veamos ahora que las componentes superiores de $\Phi\ \bar{\Phi}$ conforman términos cinéticos ([9] pags 51 y 52): Las componentes superiores para $\bar{\Phi}\Phi$ son las que acompañan al producto $(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)$. De la definición (5.4) para el campo quiral, se obtiene que dado un campo quiral Φ, la expresión $\bar{D}^2\bar{\Phi}$ es quiral, y también lo es $\Phi\bar{D}^2\bar{\Phi}$, por lo tanto $D^2\left[\Phi\left(\bar{D}^2\bar{\Phi}\right)\right]\big|_{\theta=0,\bar{\theta}=0}$ transforma como una divergencia total (el campo F asociado al campo quiral $\Phi\bar{D}^2\bar{\Phi}$). Por tanto la acción construída como

$$\int d^4xD^2\left[\left(\bar{D}^2\bar{\Phi}\right)\Phi\right] = \int d^4xD^2\left[\left(\bar{D}^2\bar{\Phi}\right)\Phi + \bar{\Phi}\underbrace{\bar{D}^2\Phi}_{=0}\right] = \int d^4xD^2\bar{D}^2\left(\bar{\Phi}\Phi\right)$$

eliminando los términos de superficie se encuentra que esta expresión es igual a

$$\int d^4xD^2\left[\left(\bar{D}^2\bar{\Phi}\right)\Phi\right] = \int d^4x\ D^2\bar{D}^2\left(\bar{\Phi}\Phi\right)\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}$$

Por tanto el candidato para formar términos de un Lagrangiano supersimétrico es $D^2\bar{D}^2\left(\bar{\Phi}\Phi\right)\big|_{\theta=\bar{\theta}=0}$. Se puede demostrar que este término conduce directamente a la componente superior de $\bar{\Phi}\Phi$.

Obtendremos ahora la expresión general (5.43) para la componente $(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)$ del producto $\bar{\Phi}\Phi$. Enumerando cada término de las expresiones (5.17) y (5.26) tenemos:

$$\begin{aligned}
C_1 &= A(x)\ ,\ C_2 = i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A(x)\ ,\ C_3 = -\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) && \text{(C.13)}\\
C_4 &= \sqrt{2}\left[\theta\psi(x)\right]\ ,\ C_5 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left[\partial_{\mu}\psi(x)\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right]\ ,\ C_6 = (\theta\theta)F(y) && \text{(C.14)}\\
C_7 &= \bar{A}(x)\ ,\ C_8 = -i\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta}\partial_{\nu}\bar{A}(x),\ C_9 = -\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\bar{A}(x) && \text{(C.15)}\\
C_{10} &= \sqrt{2}\left[\bar{\theta}\bar{\psi}(x)\right]\ ,\ C_{11} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left[\theta\sigma^{\nu}\partial_{\nu}\bar{\psi}(x)\right]\ ,\ C_{12} = \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\bar{F}(x) && \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

De tal manera que escojemos únicamente los términos con potencias $(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)$, estos son:

$$C_1C_9 + C_7C_3\ ,\ C_2C_8\ ,\ C_4C_{11} + C_{10}C_5\ ,\ C_6C_{12} \tag{C.17}$$

Los cuales de manera explícita resultan ser:

$$\begin{aligned}
C_1C_8 + C_7C_3 &= -\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(A\Box\bar{A} + \bar{A}\Box A\right)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\\
&= -\left(\tfrac{1}{4}\right)\left[-2\partial_{\mu}A\partial^{\mu}\bar{A} + \partial_{\mu}\left(A\partial^{\mu}\bar{A} + \bar{A}\partial^{\mu}A\right)\right]\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\\
&= \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}A\partial^{\mu}\bar{A} + \text{ Una divergencia total}\right)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}
\end{aligned}$$

recordando que una divergencia total en el Lagrangiano deja invariante la Física, entonces solo el primer término contribuye de manera no trivial[1].

$$\begin{aligned}
C_2C_8 &= \left[\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\right]\left[\theta_{\beta}\left(\sigma^{\nu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\partial_{\nu}\bar{A}\right] = -\theta^{\alpha}\theta^{\beta}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\partial_{\mu}A\partial_{\nu}\bar{A}\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\partial_{\mu}A\partial_{\nu}\bar{A}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{\nu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}A\partial^{\nu}\bar{A}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\delta^{\mu}{}_{\nu}\partial_{\mu}A\partial^{\nu}\bar{A}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\\
C_2C_8 &= \left(\frac{1}{2}\right)\partial_{\mu}A\partial^{\mu}\bar{A}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) && \text{(C.18)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4C_{11} + C_{10}C_5 &= i\left[\theta\psi\right]\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left[\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}\right] - i\bar{\theta}\bar{\psi}(\theta\theta)\left[\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right]\\
&= i\left[\theta_{\alpha}\psi^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\right)\partial_{\mu}\psi_{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right]\\
&= -i\left[\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_{\alpha}\theta_{\beta}\psi^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\left(\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\right)\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi_{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\right]\\
&= \left(\frac{i}{2}\right)\left[\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\varepsilon_{\alpha\beta}(\theta\theta)\psi^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)(\theta\theta)\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\right]\\
&= \left(-\frac{i}{2}\right)\bar{\theta}\bar{\theta}(\theta\theta)\left[\psi_{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} - \partial_{\mu}\psi^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\right]\\
C_4C_{11} + C_{10}C_5 &= \left(-\frac{i}{2}\right)\bar{\theta}\bar{\theta}(\theta\theta)\left[\psi\left(\sigma^{\mu}\right)\partial_{\mu}\bar{\psi} - \partial_{\mu}\psi\left(\sigma^{\mu}\right)\bar{\psi}\right] && \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

[1] No se debe confundir un término que sea una divergencia total en el Lagrangiano, con un término que bajo la simetría en cuestión, transforme como derivada total. Los primeros son términos que dejan invariante a las ecuaciones de Euler Lagrange (y a la acción) y los segundos son términos que cumplen el principio de mínima acción.

$$C_6C_{12} = (\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right) F(y)\,\bar{F}(x) \tag{C.20}$$

De esta manera la forma final para la componente $(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)$ de $\Phi\bar{\Phi}$ está dada por:

$$\begin{aligned} \Phi\bar{\Phi}\big|_{(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})} &= \partial_\mu A\partial^\mu \bar{A} - \left(\frac{i}{2}\right)\left[\psi\left(\sigma^\mu\right)\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}\right] \\ &\quad + F(y)\,\bar{F}(x) \end{aligned} \tag{C.21}$$

La cual es equivalente a (5.43)

C.3.1 Cálculo del Término cinético para W_α Abeliano

A partir de la identidad:

$$D_\alpha(FG) = (D_\alpha F)\,G \pm F\,(D_\alpha G) \tag{C.22}$$

Se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} D^2(FG) &= D_\alpha D^\alpha (FG) = D_\alpha\left[(D^\alpha F)\,G \pm F\,(D^\alpha G)\right] \\ &= D_\alpha\left[(D^\alpha F)\,G\right] \pm D_\alpha\left[F\,(D^\alpha G)\right] \\ &= \left(D^2F\right)G \mp (D^\alpha F)\,D_\alpha G \pm \left[(D_\alpha F)(D^\alpha G) \pm F\left(D^2G\right)\right] \\ &= \left(D^2F\right)G \pm (D_\alpha F)\,D^\alpha G \pm (D_\alpha F)(D^\alpha G) + F\left(D^2G\right) \\ &= \left(D^2F\right)G + F\left(D^2G\right) \pm 2\left(D_\alpha F D^\alpha G\right) \end{aligned} \tag{C.23}$$

De tal manera que para el caso especial del término cinético de W_a tenemos:

$$D^2W_\alpha W^\alpha = \left(D^2W_\alpha\right)W^\alpha + W_\alpha\left(D^2W^\alpha\right) - 2\left(D_\beta W_\alpha D^\beta W^\alpha\right) \tag{C.24}$$

$$D^2W_\alpha W^\alpha = 2\left(D^2W_\alpha\right)W^\alpha - 2\left(D_\beta W_\alpha D^\beta W^\alpha\right) \tag{C.25}$$

El proceso algebráico para obtener (5.68), reemplazando (5.65), (5.64) y (5.69) en (C.24) es el siguiente:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\,D^2W_\alpha W^\alpha\big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} &= -\frac{1}{4}\left[2\left(D^2W_\alpha\right)W^\alpha - 2\left(D_\beta W_\alpha D^\beta W^\alpha\right)\right]\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= \left[\left(-\frac{1}{4}\right)\left(D^2W_\alpha\right)2W^\alpha\right]\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} - \frac{1}{2}\left[\left(D_\beta W^\alpha D^\beta W_\alpha\right)\right]\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} \\ &= 32i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\lambda^\alpha \\ &\quad -\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\epsilon}\left(-4\delta_\epsilon^{\ \gamma}D + 2i\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)_\epsilon^{\ \gamma}F_{\mu\nu}\right)\left(-4\delta_\alpha^{\ \beta}D + 2i\left(\sigma^\rho\bar{\sigma}^\tau\right)_\alpha^{\ \beta}F_{\rho\tau}\right) \\ &= 32i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\lambda^\alpha + \frac{32}{2}D^2 + \frac{4}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\epsilon}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)_\epsilon^{\ \gamma}\left(\sigma^\rho\bar{\sigma}^\tau\right)_\alpha^{\ \beta}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} \\ &= 32i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\lambda^\alpha + \frac{32}{2}D^2 - \frac{4}{2}Tr\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\tau\bar{\sigma}^\rho\right)F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} \\ &= 32i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\lambda^\alpha + \frac{32}{2}D^2 - \frac{8}{2}\left(i\varepsilon^{\nu\tau\rho\mu}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} + 2F^{\rho\tau}F_{\rho\tau}\right) \\ &= 32i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\lambda^\alpha + \frac{32}{2}D^2 - \frac{16}{2}\left(\frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\tau\mu\nu}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} + F^{\rho\tau}F_{\rho\tau}\right) \\ -\frac{1}{4}\,D^2W_\alpha W^\alpha\big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0} &= 32\left[-i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \frac{D^2}{2} - \frac{1}{4}\left({}^*F^{\rho\tau}F_{\rho\tau} + F^{\rho\tau}F_{\rho\tau}\right)\right] \end{aligned} \tag{C.26}$$

Donde hemos utilizado las identidades (A6) y además: ([5] pag 60, [9] cap 1 pag 8, [1] Cap 11 pag 459)

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{\nu}\,\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}\,+\bar{\sigma}^{\rho}\,\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\nu} &= 2\left(\eta_{\tau\rho}\sigma_{\nu}+\eta_{\tau\nu}\sigma_{\rho}-\eta_{\nu\rho}\sigma_{\tau}\right) && \text{(C.27)}\\
\bar{\sigma}^{\nu}\,\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}\,-\bar{\sigma}^{\rho}\,\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\nu} &= 2i\varepsilon^{\nu\tau\rho\alpha}\sigma_{\alpha} && \text{(C.28)}\\
\bar{\sigma}^{\nu}\,\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho} &= \left(\eta_{\tau\rho}\sigma_{\nu}+\eta_{\tau\nu}\sigma_{\rho}-\eta_{\nu\rho}\sigma_{\tau}+i\varepsilon^{\nu\tau\rho\alpha}\sigma_{\alpha}\right) && \text{(C.29)}\\
Tr\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\,\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}\,\right) &= 2\left(-\eta^{\nu\rho}\eta^{\tau\mu}+\eta^{\rho\tau}\eta^{\nu\mu}+\eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\mu}+i\varepsilon^{\nu\tau\rho\mu}\right) && \text{(C.30)}\\
{}^{*}F^{\mu\nu} &= \left(\frac{i}{2}\right)\varepsilon^{\mu\nu rs}F_{rs} && \text{(C.31)}
\end{aligned}$$

C.3.2 Término Cinético Invariante Gauge Abeliano en el Gauge SUSY de Wess-Zumino

$$\begin{aligned}
V^{2} &= \left[-\theta^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_{\mu}+i\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}-i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_{\alpha}\lambda^{\alpha}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}D\right]\times\\
&\quad\left[-\theta^{\beta}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}A_{\nu}+i\theta_{\beta}\theta^{\beta}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}-i\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\theta_{\beta}\lambda^{\beta}+\frac{1}{2}\theta_{\beta}\theta^{\beta}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}D\right]\\
&= \theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^{\beta}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}A_{\mu}A_{\nu}=\frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}A_{\mu}A_{\nu}\\
&= \frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left(\sigma^{\mu}\right)^{\beta\dot{\beta}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\beta}}A_{\mu}A_{\nu}=\frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\left(2\eta^{\mu\nu}\right)A_{\mu}A_{\nu}\\
V^{2} &= \frac{1}{2}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}A^{\mu}A_{\mu} && \text{(C.32)}\\
V^{3} &= \left(\frac{1}{2}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}A^{\mu}A_{\mu}\right)\left[-\theta^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_{\mu}+i\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}-i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_{\alpha}\lambda^{\alpha}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}D\right]\\
V^{3} &= 0 && \text{(C.33)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{j}e^{q_{j}gV}\Phi_{j}\big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}} &= \bar{\Phi}_{j}\left[1+q_{j}gV+\left(\frac{1}{2}\right)q_{j}^{2}g^{2}V^{2}\right]\Phi_{j}\Big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}\\
&= \bar{\Phi}_{j}\Phi_{j}\big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}+q_{j}g\;\bar{\Phi}_{j}V\Phi_{j}\big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)q_{j}^{2}g^{2}\bar{\Phi}_{j}V^{2}\Phi_{j}\Big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}\Rightarrow\\
C_{1} &= \bar{\Phi}_{j}\Phi_{j}\big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}\;,\;C_{2}=q_{j}g\bar{\Phi}_{j}V\Phi_{j}\big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}\;,\;C_{3}=\left(\frac{1}{2}\right)q_{j}^{2}g^{2}\bar{\Phi}_{j}V^{2}\Phi_{j}\big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}\\
C_{1} &= \partial_{\mu}A\partial^{\mu}\bar{A}-\left(\frac{i}{2}\right)\left[\psi\left(\sigma^{\mu}\right)\partial_{\mu}\bar{\psi}-\partial_{\mu}\psi\left(\sigma^{\mu}\right)\bar{\psi}\right]+F\bar{F} && \text{(C.34)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= q_j g\ \bar{\Phi}_j V \Phi_j\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
&= q_j g \left[\begin{array}{c} \bar{A}(x) - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu\bar{A}(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box\bar{A}(x) + \sqrt{2}\left[\bar{\theta}\bar{\psi}(x)\right] \\ +\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta\theta}\right)\left[\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^\beta(x)\right] + \left(\overline{\theta\theta}\right)\bar{F}(x) \end{array}\right] \times \\
&\quad \left[-\theta^\alpha\left(\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_\nu + i\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_\alpha\lambda^\alpha + \frac{1}{2}\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}D\right] \times \\
&\quad \left.\left[\begin{array}{c} A(x) + i\theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^\tau\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\tau A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A(x) + \sqrt{2}\left[\theta\psi(x)\right] \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_\tau\psi^\beta(x)\sigma^\tau\overline{\theta}\right] + \left(\theta\theta\right)F(x) \end{array}\right]\right|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
&= -iq_j g\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma^\tau\right)_{\beta\dot{\beta}}A_\mu\bar{A}\partial_\tau A + iq_j g\sqrt{2}\bar{A}\bar{\theta}^2\theta_\alpha\theta_\beta\lambda^\alpha\psi^\beta \\
&\quad + q_j g\bar{A}A\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D + iq_j g\theta^\beta\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\beta}}\left(\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}A_\nu A\partial_\mu\bar{A} \\
&\quad + 2q_j g\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\alpha\theta^\beta\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\psi_\beta\left(\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}A_\nu - iq_j g\sqrt{2}\left[\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\right]A \\
&= -\frac{iq_j g}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\bar{A}A^\tau\partial_\tau A + \frac{iq_j g}{\sqrt{2}}\bar{A}\left(\lambda\psi\right)\bar{\theta}^2\theta^2 + q_j g\bar{A}A\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D + \frac{q_j gi}{2}\theta^2\overline{\theta}^2 AA^\mu\partial_\mu\bar{A} \\
&\quad - \frac{q_j g}{2}\bar{\theta}^2\theta^2\psi^\alpha\left(\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}A_\nu - \frac{\sqrt{2}q_j gi}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\left(\bar{\psi}\bar{\lambda}\right)A \\
C_2 &= \frac{q_j gi}{2}\left[AA^\mu\partial_\mu\bar{A} - \bar{A}A^\tau\partial_\tau A\right] + \frac{iq_j g}{\sqrt{2}}\left[\bar{A}\left(\lambda\psi\right) - \left(\bar{\psi}\bar{\lambda}\right)A\right] + \frac{q_j g\bar{A}AD}{2} - \frac{q_j g}{2}\left[\psi\sigma^\nu\bar{\psi}\right]A_\nu
\end{aligned}
\tag{C.35}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)q_j^2 g^2\bar{\Phi}_J V^2\Phi_j\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \\
&\quad \left[\begin{array}{c} \bar{A}(x) - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu\bar{A}(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box\bar{A}(x) + \sqrt{2}\left[\bar{\theta}\bar{\psi}(x)\right] \\ +\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta\theta}\right)\left[\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^\beta(x)\right] + \left(\overline{\theta\theta}\right)\bar{F}(x) \end{array}\right]\frac{q_j^2 g^2}{4}\theta^2\bar{\theta}^2 A^\mu A_\mu \times \\
&\quad \left.\left[\begin{array}{c} A(x) + i\theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\sigma^\tau\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\tau A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A(x) + \sqrt{2}\left[\theta\psi(x)\right] \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\left[\partial_\tau\psi^\beta(x)\sigma^\tau\overline{\theta}\right] + \left(\theta\theta\right)F(y) \end{array}\right]\right|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
C_3 &= \frac{q_j^2 g^2}{4}\bar{A}A^\mu A_\mu A
\end{aligned}
\tag{C.36}
$$

Por lo tanto reuniendo $C_1,\ C_2$ y C_3 tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \partial_\mu A\partial^\mu\bar{A} + \frac{q_j g i}{2}\left[AA^\mu\partial_\mu\bar{A} - \bar{A}A^\tau\partial_\tau A\right] + \frac{q_j^2 g^2}{4}\bar{A}A^\mu A_\mu A \\
&\quad -\left(\frac{i}{2}\right)\left[\psi\left(\sigma^\mu\right)\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}\right] - \frac{q_j g}{2}\left[\psi\sigma^\nu\bar{\psi}\right]A_\nu \\
&\quad +\frac{iq_j g}{\sqrt{2}}\left[\bar{A}\left(\lambda\psi\right) - \left(\bar{\psi}\bar{\lambda}\right)A\right] + \frac{q_j g\bar{A}AD}{2} + F\bar{F} \\
&= \bar{D}_\mu\bar{A}D^\mu A - \left(\frac{i}{2}\right)\left[\partial_\mu\left[\psi\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}\right] - 2\partial_\mu\psi\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}\right] - \frac{q_j g}{2}\left[\psi\sigma^\nu\bar{\psi}\right]A_\nu \\
&\quad +\frac{iq_j g}{\sqrt{2}}\left[\bar{A}\left(\lambda\psi\right) - \left(\bar{\psi}\bar{\lambda}\right)A\right] + \frac{q_j g\bar{A}AD}{2} + F\bar{F}
\end{aligned}$$

$$\bar{\Phi}_j e^{q_j g V}\Phi_j\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \left(\bar{D}_\mu\bar{A}\right)\left(D^\mu A\right) + i\left(D_\mu\psi\right)\sigma^\mu\bar{\psi} + \frac{iq_j g}{\sqrt{2}}\left[\bar{A}\left(\lambda\psi\right) - \left(\bar{\psi}\bar{\lambda}\right)A\right] + \frac{q_j g\bar{A}AD}{2} + F\bar{F} \tag{C.37}$$

$$D_\mu = \left(\partial_\mu + i\frac{q_j g A_\mu}{2}\right) \tag{C.38}$$

Donde no hemos tenido en cuenta el término $\partial_\mu\left[\psi\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}\right]$, en la expresión final ya que es una divergencia total.

C.3.3 Término cinético invariante gauge no Abeliano de los supercampos Quirales

Expandiendo en el gauge de Wess-Zumino tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_k\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{km}\Phi_m\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \bar{\Phi}_k\left[1 + qg\left(T\cdot V\right) + \left(\frac{1}{2}\right)q^2g^2\left(T\cdot V\right)^2\right]_{km}\Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
&= \bar{\Phi}_m\Phi_m\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + qg\bar{\Phi}_k\left(T\cdot V\right)_{km}\Phi_m\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
&\quad + \left(\frac{q^2g^2}{2}\right)\bar{\Phi}_k\left[\left(T\cdot V\right)^2\right]_{km}\Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2}
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Definiendo por separado cada término:

$$K_1 = \bar{\Phi}_m\Phi_m\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2}\ ,\ K_2 = qg\bar{\Phi}_k\left(T\cdot V\right)_{km}\Phi_m\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2}\ ,\ K_3 = \left(\frac{q^2g^2}{2}\right)\bar{\Phi}_k\left[\left(T\cdot V\right)^2\right]_{km}\Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$$

De tal manera que para K_1 tenemos:

$$K_1 = \bar{\Phi}_m\Phi_m\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \partial_\mu A_m\partial^\mu\bar{A}_m - \left(\frac{i}{2}\right)\left[\psi_m\left(\sigma^\mu\right)\partial_\mu\bar{\psi}_m - \partial_\mu\psi_m\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}_m\right] + F_m\left(x\right)\bar{F}_m\left(x\right) \tag{C.40}$$

Donde hemos utilizado la expresión (5.43). Por otro lado para K_2 y K_3 tenemos:

$$\begin{aligned}
K_2 &= qg\bar{\Phi}_k \left(T^a V^a\right)_{km} \Phi_m\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
&= qg\bar{\Phi}_k \left(-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}T^a A^a_\mu + i\theta^2\bar{\theta}T^a\bar{\lambda}^a - i\bar{\theta}^2\theta T^a\lambda^a + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 T^a D^a\right)_{km} \Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
K_2 &= \frac{iqg}{2}\left[\partial_\mu \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} A_m \left(A^\mu\right)^a - \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} \partial_\tau A_m \left(A^\tau\right)^a\right] \\
&\quad +\frac{iqg}{\sqrt{2}}\left[\lambda^a \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km}\psi_m - \bar{\psi}_k \left(T^a\right)_{km} A_m\bar{\lambda}^a\right] \\
&\quad +\frac{qg\bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} A_m D^a}{2} - \frac{qg}{2}\left[\psi_m \left(T^a\right)_{km}\sigma^\nu\bar{\psi}_k\right] A^a_\nu
\end{aligned} \tag{C.41}$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= \left(\frac{q^2g^2}{2}\right)\bar{\Phi}_k\left[\left(T\cdot V\right)^2\right]_{km}\Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\
K_3 &= \frac{q^2g^2}{4}\bar{A}_k \left(T^a\right)_{kl}\left(T^b\right)_{lm}\left(A_\mu\right)^b\left(A^\mu\right)^a A_m
\end{aligned} \tag{C.42}$$

Donde hemos utilizado las identidades (5.78), (5.79), (C.35) y (C.36). De tal manera que obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_k\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{km}\Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \partial_\mu A_m \partial^\mu \bar{A}_m + \frac{igq}{2}\left[\partial_\mu \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km} A_m \left(A^\mu\right)^a - \bar{A}_k \left(T^a\right)_{km}\partial_\tau A_m \left(A^\tau\right)^a\right] \\
&\quad +\frac{q^2g^2}{4}\bar{A}_k\left(T^a\right)_{kl}\left(T^b\right)_{lm}\left(A_\mu\right)^b\left(A^\mu\right)^a A_m \\
&\quad -\left(\frac{i}{2}\right)\left[\psi_m\left(\sigma^\mu\right)\partial_\mu\bar{\psi}_m - \partial_\mu\psi_m\left(\sigma^\mu\right)\bar{\psi}_m\right] - \frac{qg}{2}\left[\psi_m\left(T^a\right)_{km}\sigma^\nu\bar{\psi}_k\right]A^a_\nu \qquad \text{(C.43)} \\
&\quad +\frac{iqg}{\sqrt{2}}\left[\lambda^a\bar{A}_k\left(T^a\right)_{km}\psi_m - \bar{\psi}_k\left(T^a\right)_{km}A_m\bar{\lambda}^a\right] \\
&\quad +F_m\bar{F}_m + \frac{qg}{2}\bar{A}_k\left(T^a\right)_{km}A_m D^a \\
\bar{\Phi}_k\left[e^{qg(T\cdot V)}\right]_{km}\Phi_m\Bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= D_\mu A_m D^\mu\bar{A}_m - i\psi_m\left(\sigma^\mu\right)\bar{D}_\mu\bar{\psi}_m + \frac{iqg}{\sqrt{2}}\left[\lambda^a\bar{A}_k\left(T^a\right)_{km}\psi_m - \bar{\psi}_k\left(T^a\right)_{km}A_m\bar{\lambda}^a\right] \\
&\quad +F_m\bar{F}_m + \frac{qg}{2}\bar{A}_k\left(T^a\right)_{km}A_m D^a \qquad \text{(C.44)} \\
D_\mu &= \partial_\mu + \frac{iqg}{2}T^a A^a_\mu
\end{aligned}$$

Donde de nuevo hemos eliminado una divergencia total en el término cinético de Dirac para los campos ψ_m.

C.3.4 Propiedades de la derivadas covariantes gauge-supersimétricas

Primero es importante demostrar que

$$\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, e^{iqT\cdot\Lambda}\right] = 0$$

siendo $T\cdot\Lambda$ un campo quiral, para lo cual basta demostrar que $\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}},\Phi\right]=0$, para cualquier campo quiral Φ

$$\begin{aligned}
\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}},\Phi\right](\ldots) &= \left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi-\Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}\right](\ldots)=\bar{D}_{\dot{\alpha}}\left[\Phi(\ldots)\right]-\Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\ldots)\\
&= \Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\ldots)+\underbrace{\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi\right](\ldots)}_{=0}-\Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\ldots)\Rightarrow\\
\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}},\Phi\right](\ldots) &= 0
\end{aligned}$$

y como el producto de campos quirales es quiral, entonces $\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}},\Phi^n\right]=0,\ n\geq 0$, y por tanto $\left[\bar{D}_{\dot{\alpha}},e^{iq\Phi}\right]=0$.

La regla de transformacion gauge para el anticonmutador de las derivadas ∇_α y $\nabla_{\dot{\alpha}}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left\{\nabla_a,\nabla_{\dot{\alpha}}\right\}' &= \acute{\nabla}_a\acute{\nabla}_{\dot{\alpha}}-\acute{\nabla}_{\dot{\alpha}}\acute{\nabla}_a=e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\nabla_a e^{iq(T\cdot\Lambda)}e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\nabla_{\dot{\alpha}}e^{iq(T\cdot\Lambda)}\\
&\quad -e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\nabla_{\dot{\alpha}}e^{iq(T\cdot\Lambda)}e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\nabla_a e^{iq(T\cdot\Lambda)}\\
&= e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\nabla_a\nabla_{\dot{\alpha}}e^{iq(T\cdot\Lambda)}-e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\nabla_{\dot{\alpha}}\nabla_a e^{iq(T\cdot\Lambda)}\\
\left\{\nabla_a,\nabla_{\dot{\alpha}}\right\}' &= e^{-iqT\cdot\Lambda}\left\{\nabla_a,\nabla_{\dot{\alpha}}\right\}e^{iqT\cdot\Lambda} \qquad (C.45)
\end{aligned}$$

El cálculo de las conecciones gauge-SUSY es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla_A F &= \left(D_A-i\Gamma_A\right)F\\
\nabla_{\dot{\alpha}}F &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}F\Rightarrow\Gamma_{\dot{\alpha}}=0 \qquad (C.46)\\
\nabla_a F &= \left[e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right]F=e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha\left[e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}F\right]\\
&= e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\left(D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right)F+D_\alpha F\Rightarrow\\
\nabla_a F-D_\alpha F &= -i\Gamma_a F=e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\left(D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right)F\Rightarrow\\
\Gamma_a &= ie^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\left(D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right) \qquad (C.47)\\
\left\{\nabla_a,\nabla_{\dot{\alpha}}\right\}F &= \left\{e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)},\bar{D}_{\dot{\alpha}}\right\}F\\
&= e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha\left[e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\left(D_{\dot{\alpha}}F\right)\right]+\bar{D}_{\dot{\alpha}}\left[e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\left[D_\alpha\left(e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}F\right)\right]\right]\\
&= e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha\left[e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right]\left(D_{\dot{\alpha}}F\right)+\bar{D}_{\dot{\alpha}}\left[e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha\left(e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right)F\right]\\
&\quad +\left\{D_\alpha,D_{\dot{\alpha}}\right\}F\\
&= \bar{D}_{\dot{\alpha}}\left[e^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}D_\alpha\left(e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}\right)}\right)\right]F+\left\{D_\alpha,D_{\dot{\alpha}}\right\}F\\
\left\{\nabla_a,\nabla_{\dot{\alpha}}\right\}F &= -i\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Gamma_a\right)F+\left\{D_\alpha,D_{\dot{\alpha}}\right\}F\Rightarrow\\
-2i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\nabla_\mu F &= -2i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu F-i\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Gamma_a\right)F\Rightarrow\nabla_\mu F=\partial_\mu F+\frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}_\nu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Gamma_a\right)F\Rightarrow\\
\Gamma_\mu &= \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}_\nu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Gamma_a\right) \qquad (C.48)
\end{aligned}$$

La regla de transformación gauge para Γ_α está dada por:

$$\begin{aligned}
\Gamma'_\alpha &= ie^{-gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}'\right)}\left(D_\alpha e^{gq\left(\bar{T}\cdot\bar{V}'\right)}\right)\\
&= ie^{-iq(T\cdot\Lambda)}e^{-qg(T\cdot V)}e^{iq\left(\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}\right)}D_\alpha\left(e^{-iq\left(\bar{T}\cdot\bar{\Lambda}\right)}e^{qg(T\cdot V)}e^{iq(T\cdot\Lambda)}\right)\\
&= ie^{-iq(T\cdot\Lambda)}e^{-qg(T\cdot V)}\left[\left(D_\alpha e^{qg(T\cdot V)}\right)e^{iq(T\cdot\Lambda)}+e^{qg(T\cdot V)}D_\alpha\left(e^{iq(T\cdot\Lambda)}\right)\right]\\
\Gamma'_\alpha &= e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\Gamma_\alpha e^{iq(T\cdot\Lambda)}+ie^{-iq(T\cdot\Lambda)}D_\alpha\left(e^{iqT\cdot\Lambda}\right) \qquad (C.49)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las reglas de transformación (5.84).

C.3.5 Regla de transformación para W_α en el caso no abeliano

A partir de (C.49) podemos hallar la regla de transformación para W_α en el caso no abeliano

$$\begin{aligned}
W'_\alpha &= -\frac{i}{qg}\bar{D}^2\left(\Gamma'_a\right) = -\frac{i}{qg}\bar{D}^2\left[ie^{-gqT\cdot V'}\left(D_\alpha e^{gqT\cdot V'}\right)\right] \\
&= -\frac{i}{qg}e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\bar{D}^2\left[ie^{-qg(T\cdot V)}D_\alpha\left(e^{qg(T\cdot V)}e^{iq(T\cdot\Lambda)}\right)\right] \\
&= -\frac{i}{qg}e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\left[\bar{D}^2\left(ie^{-qg(T\cdot V)}D_\alpha e^{qg(T\cdot V)}\right)e^{iq(T\cdot\Lambda)} + \bar{D}^2\left(ie^{-qg(T\cdot V)}e^{qg(T\cdot V)}D_\alpha e^{iq(T\cdot\Lambda)}\right)\right] \\
&= -\frac{i}{qg}e^{-iq(T\cdot\Lambda)}\bar{D}^2\Gamma_\alpha e^{iq(T\cdot\Lambda)} + 0 \\
W'_\alpha &= e^{-iq(T\cdot\Lambda)}W_\alpha e^{iq(T\cdot\Lambda)}
\end{aligned} \tag{C.50}$$

Hallemos ahora las componentes del término No-Abeliano de W_α en el gauge de Wess-Zumino. Para ello recurrimos a la expresión (5.103), con el fin de saber qué términos deben calcularse, calculando estos términos se obtiene

$$\begin{aligned}
D_\beta V^b &= D_\beta\left[-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A^b_\mu + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}^b - i\bar{\theta}^2\theta\lambda^b + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2D^b\right] \\
&= \left[i\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial^\nu - \partial_\beta\right]\times \\
&\quad \left[-\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}A^b_\mu + i\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda}^b - i\bar{\theta}^2\theta_\alpha\left(\lambda^b\right)^\alpha + \frac{1}{2}\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}^2D^b\right] \\
D_\beta V^b &= \frac{i}{2}\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\bar{\theta}^2\partial^\nu A^b_\mu + \frac{1}{2}\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\bar{\lambda}^b\right)^{\dot{\alpha}}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^\nu \\
&\quad + \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}A^b_\mu - i\bar{\theta}^2\left(\lambda^b\right)_\beta + 2i\theta_\beta\bar{\theta}\bar{\lambda}^b + \theta_\beta\bar{\theta}^2D^b \\
V^bD_\beta V^a &= \left[-\theta\sigma^\nu\bar{\theta}A^b_\nu + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}^b\right]\times \\
&\quad \left[\begin{array}{c} \frac{i}{2}\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\bar{\theta}^2\partial^\nu A^a_\mu + \frac{1}{2}\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\alpha}}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^\nu \\ + \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}A^a_\mu - i\bar{\theta}^2\left(\lambda^a\right)_\beta + 2i\theta_\beta\bar{\theta}\bar{\lambda}^a + \theta_\beta\bar{\theta}^2D^a \end{array}\right] \\
&= i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}^b\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}A^a_\mu - \theta\sigma^\nu\bar{\theta}A^b_\nu\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}A^a_\mu \\
&\quad -\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\right)_\beta^{\ \dot{\delta}}A^b_\nu\bar{\lambda}^a_{\dot{\delta}}\theta^2\bar{\theta}^2 \\
V^bD_\beta V^a &= \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left[A^b_\mu\left(\bar{\lambda}^a\right)^{\dot{\alpha}} - \left(\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right)^bA^a_\mu\right]\theta^2\bar{\theta}^2 - \frac{1}{2}\theta^\alpha\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot{\gamma}}A^b_\nu\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\bar{\theta}^2A^a_\mu
\end{aligned} \tag{C.51}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_{\dot\alpha}\left(V^b\left(D_\beta V^a\right)\right) &= \\
& -\left[i\theta^\gamma\left(\sigma_\tau\right)_{\gamma\dot\alpha}\partial^\tau+\bar\partial_{\dot\alpha}\right]\times \\
& \left[\begin{array}{c} \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\bar\theta^2 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)\theta^\alpha\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\bar\theta^2A^b_\nu A^a_\mu \end{array}\right] \\
&= \left(\frac{i}{4}\right)\left(\bar\sigma^\tau\right)_{\dot\alpha\gamma}\left(\sigma^\nu\right)^{\gamma\dot\gamma}\left(\bar\sigma^\mu\right)_{\dot\gamma\beta}\partial_\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\theta^2\bar\theta^2 \\
& +i\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\bar\theta_{\dot\alpha}\right] \\
& -\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}A^b_\nu A^a_\mu \\
&= \left(\frac{i}{4}\right)\left(\eta^{\nu\mu}\left(\sigma^\tau\right)_{\beta\dot\alpha}+\eta^{\nu\tau}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\alpha}-\eta^{\tau\mu}\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot\alpha}+i\varepsilon^{\tau\nu\mu\alpha}\left(\sigma_\alpha\right)_{\beta\dot\alpha}\right)\partial_\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\theta^2\bar\theta^2 \\
& +i\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\bar\theta_{\dot\alpha}\right] \\
& -\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}A^b_\nu A^a_\mu \\
\bar{D}_{\dot\alpha}\left(V^b\left(D_\beta V^a\right)\right) &= \left(\frac{i}{4}\right)\left(\begin{array}{c}\left(\sigma^\tau\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^{\mu b}A^a_\mu\right)+\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\alpha}\partial^\tau\left(A^a_\mu A^b_\tau-A^b_\mu A^a_\tau\right) \\ +i\varepsilon^{\tau\nu\mu\alpha}\left(\sigma_\alpha\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\end{array}\right)\theta^2\bar\theta^2 \\
& +i\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\bar\theta_{\dot\alpha}\right] \\
& -\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}A^b_\nu A^a_\mu \\
\bar{D}^{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\alpha}\left(V^b\left(D_\beta V^a\right)\right) &= \left(i\theta_\gamma\left(\sigma_\tau\right)^{\gamma\dot\alpha}\partial^\tau+\bar\partial^{\dot\alpha}\right)\times \\
& \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{i}{4}\right)\left(\begin{array}{c}\left(\sigma^\tau\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^{\mu b}A^a_\mu\right)+\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^{\tau b}A^a_\mu-A^b_\mu A^{\tau a}\right) \\ +i\varepsilon^{\tau\nu\mu\alpha}\left(\sigma_\alpha\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\end{array}\right)\theta^2\bar\theta^2 \\ +i\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\bar\theta_{\dot\alpha}\right] \\ -\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}A^b_\nu A^a_\mu \end{array}\right\} \\
&= -\frac{i}{2}\left(\sigma_\tau\right)_{\gamma\dot\alpha}\left(\sigma^\nu\right)^{\ \gamma\dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^2\bar\theta^{\dot\alpha}\partial^\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right) \\
& -2i\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\right] \\
& +2\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^\alpha A^b_\nu A^a_\mu \\
& -\left(\frac{i}{2}\right)\left(\begin{array}{c}\left(\sigma^\tau\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^{\mu b}A^a_\mu\right)+\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\alpha}\partial^\tau\left(A^a_\mu A^b_\tau-A^b_\mu A^a_\tau\right) \\ +i\varepsilon^{\tau\nu\mu\alpha}\left(\sigma_\alpha\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\end{array}\right)\theta^2\bar\theta^{\dot\alpha} \\
\bar{D}^{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\alpha}\left(V^b\left(D_\beta V^a\right)\right) &= -i\left[\partial_\alpha\left(A^{\mu b}A^a_\mu\right)+\partial^\tau\left(A^a_\alpha A^b_\tau-A^b_\alpha A^a_\tau\right)+i\varepsilon^{\tau\nu\mu}{}_\alpha\partial_\tau\left(A^b_\nu A^a_\mu\right)\right]\theta^2\left(\sigma^\alpha\right)_{\beta\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} \\
& -2i\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\left[A^b_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}-\left(\bar\lambda^b\right)^{\dot\gamma}A^a_\mu\right]\theta^2\right]+2\left(\sigma^\nu\right)_\alpha^{\ \dot\gamma}\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}\theta^\alpha A^b_\nu A^a_\mu \qquad \text{(C.52)}
\end{aligned}
$$

Reemplazando estos términos en (5.103), se obtiene $W^c_{\beta\ (\text{No-Abeliano})}$, Ec. (5.105). Finalmente, dado $W^c_{\beta\ (\text{No-Abeliano})}$ en (5.105) podemos hallar el producto escalar $W^c_\beta W^{c\beta}$ reemplazando en (5.67):

$$
W^c_{\beta\ (\text{No-Abeliano})}=-4i\lambda^c_\beta+\left[2i\left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\right)_\beta^{\ \gamma}F^c_{\mu\nu}-4\delta_\beta^{\ \gamma}D^c\right]\theta_\gamma-\left(4\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\gamma}D^{ca}_\mu\left(\bar\lambda^a\right)^{\dot\gamma}\theta^2
$$

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha} &= -i\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^{\mu}+\partial^{\alpha} \\
\varepsilon_{\gamma\alpha}D^{\alpha} &= -i\varepsilon_{\gamma\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^{\mu}+\varepsilon_{\gamma\alpha}\partial^{\alpha} \\
D_{\gamma} &= i\left(\sigma_{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial^{\mu}-\partial_{\gamma} \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\left[i\theta^{\alpha}\left(\sigma_{\mu}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial^{\mu}+\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right]
\end{aligned} \tag{C.53}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\gamma}\left(W_{\alpha}\right)^{c}\big| &= -\left[2i\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)_{\alpha}^{\ \beta}F_{\mu\nu}^{c}-4\delta_{\alpha}^{\ \beta}D^{c}\right]\varepsilon_{\beta\delta}\partial_{\gamma}\theta^{\delta} \\
D_{\gamma}\left(W_{\alpha}\right)^{c}\big| &= 2i\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)_{\alpha\gamma}F_{\mu\nu}^{c}-4\varepsilon_{\alpha\gamma}D^{c} \\
D^{\gamma}\left(W^{\alpha}\right)^{c}\big| &= 2i\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)^{\alpha\gamma}F_{\mu\nu}^{c}-4\varepsilon^{\alpha\gamma}D^{c}
\end{aligned} \tag{C.54}
$$

$$
\pounds_{W_{\alpha(\text{No-Abeliano})}}=-\frac{1}{4}\left(D^{2}\left(W_{\alpha}\right)^{c}\left(W^{\alpha}\right)^{c}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}+\bar{D}^{2}\left(\bar{W}^{\dot{\alpha}}\right)^{c}\left(\bar{W}_{\dot{\alpha}}\right)^{c}\Big|_{\theta=0,\,\bar{\theta}=0}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
D^{2}\left(W_{\alpha}\right)^{c}\left(W^{\alpha}\right)^{c} &= 2\left[D^{2}\left(W_{\alpha}\right)^{c}\right]\left(W^{\alpha}\right)^{c}-2D_{\gamma}\left(W_{\alpha}\right)^{c}D^{\gamma}\left(W^{\alpha}\right)^{c}\Rightarrow \\
-\frac{1}{4}D^{2}\left[\left(W_{\alpha}\right)^{c}\left(W^{\alpha}\right)^{c}\right]\big| &= -\left(\frac{1}{2}\right)\left[D^{2}\left(W_{\alpha}\right)^{c}\right]\left(W^{\alpha}\right)^{c}\big|+\left(\frac{1}{2}\right)D_{\gamma}\left(W_{\alpha}\right)^{c}D^{\gamma}\left(W^{\alpha}\right)^{c}\big| \\
&= 32i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}D_{\mu}^{ca}\left(\bar{\lambda}^{a}\right)^{\dot{\gamma}}\left(\lambda^{c}\right)^{\alpha}+ \qquad \text{(C.55)} \\
&\quad \left(\frac{1}{2}\right)\left(\left[2i\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)_{\alpha\gamma}F_{\mu\nu}^{c}-4\varepsilon_{\alpha\gamma}D^{c}\right]\left[2i\left(\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}\right)^{\alpha\gamma}F_{\tau\rho}^{c}-4\varepsilon^{\alpha\gamma}D^{c}\right]\right)\Big| \\
&= 32i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}D_{\mu}^{ca}\left(\bar{\lambda}^{a}\right)^{\dot{\gamma}}\left(\lambda^{c}\right)^{\alpha}+ \\
&\quad -2\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)_{\alpha\gamma}\left(\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}\right)^{\alpha\gamma}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}-4iD^{c}\left(\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}\right)_{\alpha}^{\ \alpha}F_{\tau\rho}^{c}+-4i\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)_{\alpha}^{\ \alpha}F_{\mu\nu}^{c}D^{c}+16D^{c}D^{c} \\
&= 32i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}D_{\mu}^{ca}\left(\bar{\lambda}^{a}\right)^{\dot{\gamma}}\left(\lambda^{c}\right)^{\alpha} \\
&\quad -4\left(-\eta^{\nu\rho}\eta^{\tau\mu}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}+\eta^{\rho\tau}\eta^{\nu\mu}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}+\eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\mu}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}+i\varepsilon^{\nu\tau\rho\mu}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}\right)+16D^{c}D^{c} \\
&= 32i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}D_{\mu}^{ca}\left(\bar{\lambda}^{a}\right)^{\dot{\gamma}}\left(\lambda^{c}\right)^{\alpha}+8\left(F^{\tau\rho}\right)^{c}F_{\tau\rho}^{c}-4i\varepsilon^{\nu\tau\rho\mu}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}+16D^{c}D^{c} \\
-\frac{1}{4}D^{2}\left[\left(W_{\alpha}\right)^{c}\left(W^{\alpha}\right)^{c}\right]\big| &= 32\left\{-i\lambda^{c\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}D_{\mu}^{ca}\left(\bar{\lambda}^{a}\right)^{\dot{\gamma}}+\left[\frac{1}{4}\left(F^{\tau\rho}\right)^{c}F_{\tau\rho}^{c}+\frac{1}{2}D^{c}D^{c}\right]\right\} \qquad \text{(C.56)}
\end{aligned}
$$

Donde hemos utilizado las identidades (5.69) a (5.73) y el caracter antisimétrico de $F_{\mu\nu}$. además no hemos tenido en cuenta la integral de Area asociada a $4i\varepsilon^{\nu\tau\rho\mu}F_{\mu\nu}^{c}F_{\tau\rho}^{c}$.

Appendix D

Análisis dimensional de las variables supersimétricas

En términos de unidades de energía (1=unidad de energía). Las diferentes variables supersimétricas tienen las siguientes unidades

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu] &= [p_\mu] = 1, \quad [M_{\mu\nu}] = 0, \quad [x_\mu] = -1 \\
[\theta_\alpha] &= [\theta^\alpha] = \left[\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right] = \left[\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right] = -\frac{1}{2} \\
[Q_\alpha] &= [Q^\alpha] = \left[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = \frac{1}{2} \\
[D_\alpha] &= [D^\alpha] = \left[\bar{D}^{\dot{\alpha}}\right] = \left[\bar{D}_{\dot{\alpha}}\right] = \frac{1}{2} \\
[\partial_\alpha] &= [\partial^\alpha] = \left[\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\right] = \left[\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

a partir de la dimensión canónica $[A_\mu] = 1$, se puede deducir que el supercampo vectorial es adimensional con lo cual

$$[C] = 0, \quad [\chi] = [\bar{\chi}] = \frac{1}{2}, \quad [\lambda] = \left[\bar{\lambda}\right] = \frac{1}{2}, \quad [M] = [N] = 1, \quad [D] = 2$$

Appendix E

Notación de espinores de cuatro componentes??

Para la expansión de Lagrangianos supersimétricos usaremos las siguientes convenciones

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= diag\,(1,-1,-1,-1) \quad ; \quad p^{\mu} = (E;\mathbf{p}) \\ \sigma^{\mu} &= (1,\vec{\sigma}) \quad ; \quad \bar{\sigma}^{\mu} = (1,-\vec{\sigma}) \end{aligned} \tag{E.1}$$

el espinor de dos componentes ξ_α transforma bajo la matriz M de $SL\,(2,C)$. Análogamente los espinores $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \xi^{\alpha}, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ transforman bajo M^*, M^{-1}, y $\left(M^{-1}\right)^*$ respectivamente. Recuérdese que se puede definir $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \xi^*_{\alpha}$, etc. La ecuación de Dirac en notación de dos componentes se escribe

$$(\bar{\sigma}_\mu p^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\,\xi_\beta = m\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \quad ; \quad (\sigma_\mu p^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,\bar{\eta}^{\dot{\beta}} = m\xi_\alpha$$

esto nos permite introducir notación espinorial de cuatro componentes. Para ello usualmente se coloca un espinor que satisfaga la ecuación

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\psi = 0 \tag{E.2}$$

se sigue que tomando la ecuación (E.2), y las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right] = 2i \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}_{\ \ \ \ \dot{\beta}} \end{pmatrix} \\ \sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta} &\equiv \frac{1}{4}\left(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta} - \sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\right) \quad ; \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}_{\ \ \ \ \dot{\beta}} = \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\right) \end{aligned}$$

esto define la representación quiral de las matrices gama. Definimos los proyectores left y right

$$P_L \equiv \frac{1}{2}\,(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_R \equiv \frac{1}{2}\,(1+\gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y usando la notación $\psi_{L,R} = P_{L,R}\psi$

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{E.3}$$

es necesario tener en cuenta que muchos textos definen $\sigma_\mu = (1,\vec{\sigma}) \quad ; \quad \bar{\sigma}_\mu = (1,-\vec{\sigma})$ en forma opuesta a la Ec. (E.1), lo cual conduce a un intercambio entre $\psi_L \leftrightarrow \psi_R$ en la ecuación (E.3). Como es usual se define $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ con lo cual

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \eta^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

el espinor conjugado se define con

$$\psi^c = C\psi^T$$

donde el operador de conjugación de carga en la representación quiral es $C = -i\gamma^2\gamma^0$. Usando los tensores métricos espinoriales (en notación de dos componentes)

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} &= -\varepsilon^{\beta\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta} = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xi^\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta \;\; ; \;\; \xi_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha \end{aligned}$$

(en algunos textos se usa $\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}$ con lo cual se modifica la forma del tensor métrico espinorial) se tiene que en representación quiral

$$C = -i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\beta\alpha} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha} \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar\psi^T = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar\xi_{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \eta_\beta \\ \bar\xi^{\dot\beta} \end{pmatrix}$$

finalmente, un espinor de Majorana tiene la propiedad de que $\eta = \xi$ lo cual implica que $\psi^c = \psi$. De modo que

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar\xi^{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix}$$

los términos fermiónicos bilineales pueden tener estructura escalar, pseudoescalar, vectorial o axial. Veamos cual es la expansión de cada una de estas estructuras usando notación de cuatro componentes

$$\begin{aligned} \bar\psi_1\psi_2 &= \eta_1\xi_2 + \bar\eta_2\bar\xi_1 \equiv \bar\psi_1 P_L\psi_2 + \bar\psi_1 P_R\psi_2 \\ \bar\psi_1\gamma_5\psi_2 &= -\eta_1\xi_2 + \bar\eta_2\bar\xi_1 \\ \bar\psi_1\gamma^\mu\psi_2 &= \bar\xi_1\bar\sigma^\mu\xi_2 - \bar\eta_2\bar\sigma^\mu\eta_1 \\ \bar\psi_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2 &= -\bar\xi_1\bar\sigma^\mu\xi_2 - \bar\eta_2\bar\sigma^\mu\eta_1 \qquad \text{(E.4)} \\ -\frac{1}{2}i\bar\psi_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 &= \eta_1\sigma^{\mu\nu}\xi_2 - \bar\eta_2\bar\sigma^{\mu\nu}\bar\xi_1 \qquad \text{(E.5)} \\ \bar\psi_1\psi_2^C &= \eta_1\eta_2 + \bar\xi_1\bar\xi_2 \equiv \bar\psi_1 P_L\psi_2^C + \bar\psi_1 P_R\psi_2^C \qquad \text{(E.6)} \end{aligned}$$

los rótulos 1,2 denotan dos espinores diferentes de cuatro componentes y sus espinores de dos componentes asociados.

Bibliography

[1] Ryder, Lewis. Quantum Field Theory. Cambridge University Press (1996). Capítulos 2, 3, 8 y 11.

[2] Stancu, FL. Group Theory in Subnuclear Physics. Clarendon Press. Oxford (1996) Secc 5.6 pag 163, Cap 3 pag 32, Cap 7 Pag 246 y SS.

[3] Bailin. D y Love. A. Introduction to Gauge Field Theory. Adam Hilger

[4] Misner, Wheeler, Thorne. Gravitation Cap 41, sección 41.2.

[5] Martinez, R. Supersimetría. Notas de Clase. Universidad Nacional. (2000.)

[5] Martinez, R. Teoría Cuantica de Campos. Universidad Nacional.

[6] Lopuzanski. Introduction to Symmetry and Supersymmetry. Cap 7 pag 198.

[7] Collins, Particle Physics and Cosmology Cap 10 pag 223 secc 10-2.

[8] Fayet. Pierre. About Superpartners and the Origins of the Supersymmetric Standard Model. hep-ph/0104302.

[9] Srivastava, Prem. Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introduction. (Adam Hilger 1986).

[10] Martin, Stephen. A supersymmetry Primer. hep-ph/9709356.

[11] Martinez, R. Teorias Gauge. (Universidad Nacional)

[12] Dreiner, Herbi. An introduction to explicit R-parity violation. hep-ph/9707435.

[13] Haber, Howard. Introductory Low Energy SUSY.

[14] Gonzalez, M.C. et al. Spontaneous R-Parity Breaking at hadron Colliders. Nuclear Physics B391 (1993) 100-126.

[15] Smirnov, A.Y. hep-ph/9304205 See-Saw Enhancement of Lepton Mixing

[16] Bilenky, Giunti. See-Saw Type mixing and $\nu_\mu \to \nu_\mu$ Oscillations, hep-ph/9211269).

[17] Yang, C. Lee, T. Question of Parity Conservation in Weak interactions. Physical Review, Vol 104, No 1. (Oct 1 de 1956). 254-259.

[18] Csaki, C. Csikor, F. Mirror Fermions and LEP precision data. hep-ph/9303219.

[19] Gross, D. Effect of Anomalies on Quasi-Renormalizable Theories. Physical Review D.Vol 6, No 2. (16 de Julio de 1972.) Pags 477 - 493.

[20] Triantaphylou, G. New Physics With Mirror Particles, hep-ph/9811250, Strategy Towards Mirror Fermion Signatures, hep-ph/9906283.

[21] C.A. Heusch y P. Minkowski, Lepton Flavour Violation. Nucl. Phys B416 (1994) 3

[22] Schiff. Quantum Mechanics. Capítulo 7 página 214 y ss.

[23] Murayama, Hitoshi. Supersymmetry Phenomenology hep-ph/0002232.

Afterword

The back matter often includes one or more of an index, an afterword, acknowledgements, a bibliography, a colophon, or any other similar item. In the back matter, chapters do not produce a chapter number, but they are entered in the table of contents. If you are not using anything in the back matter, you can delete the back matter TeX field and everything that follows it.