Espacios L_p

René Erlín Castillo

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá - Colombia

A la memoria de Julieta mi mamá-abuela
A mi esposa Hilcia del Carmen
A mis hijos: René José
Manuel Alejandro
Irene Gabriela y
Renzo Rafael

Índice general

Introducción **1**

1. Funciones Convexas y Desigualdades **5**
- 1.1. Funciones Convexas 5
- 1.2. Desigualdad de Young 17

2. Los espacios L_p **23**
- 2.1. Funciones en L_p y sus normas 23
- 2.2. Supremo esencial 24
- 2.3. $\mathscr{L}_p$ no es un espacio normado 29
- 2.4. Los espacios l_p 40
  - 2.4.1. Desigualdad de Hölder y Minkowski versión discreta . . 40
  - 2.4.2. El espacio l_p y su norma 42
  - 2.4.3. Desigualdad de Hardy en l_p 47
  - 2.4.4. Desigualdad de Hilbert en l_p 49
  - 2.4.5. El espacio l_∞ 52
- 2.5. Aproximaciones en $L_p(\mu)$ 59
- 2.6. Funcionales Lineales y Acotados sobre el Espacio $L_p(\mu)$ 69
- 2.7. Espacios duales 88
- 2.8. Convergencia débil en L_p 91
- 2.9. Continuidad de la traslación en $L_p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. 105

3. Operadores Integrales **109**
- 3.1. Desigualdades básicas y algunos operadores importantes . . . 109
- 3.2. L_p es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$ 117
- 3.3. El espacio L_2 120
  - 3.3.1. Teorema de Radon-Nikodym 123
- 3.4. Espectro de un Operador 129

4. Operador Maximal **139**
- 4.1. Funciones localmente integrables 139

4.2. El teorema de cubrimiento de Vitali 140
4.3. Función Maximal de Hardy-Littlewood 140

5. Convolución 159
5.1. Resultados básicos 159
5.2. El soporte y la convolución 170
5.3. Convolución con funciones suaves 172
5.4. Aproximaciones de la identidad 174

6. Potenciales 181
6.1. Potencial de Riesz 181
6.2. Potenciales en L_p 188

7. Espacios $L_p(\mu)$ con $0 < p < 1$ 199
7.1. Nociones básicas 199

8. L_p es un espacio uniformemente convexo 211
8.1. Convexidad Uniforme 211

9. Isometría en L_p 219

A. El teorema del residuo 227

B. σ-homomorfismo 231

C. Alfabeto griego 233

Bibliografía 234

Índice alfabético 236

Introducción

El presente texto no pretende ser un tratado en espacios L_p $(0 < p \leq \infty)$, lo cual sería una utopía, el objetivo del mismo es estudiar (en la medida de lo posible) de manera exhaustiva los espacios L_p, dado que de alguna manera podemos ver el espacio L_p como el padre de todos los espacios de funciones integrables, por ejemplo, los espacios de Sobolev se definen vía los espacios L_p.

A propósito de esto, en la literatura podemos encontrar tratados, manuales y textos dedicados al estudio de los espacios de Sobolev, en los cuales se destina un capítulo para estudiar aspectos generales de los espacios L_p. En mi opinión, esto es estudiar el fruto sin importar la tierra de donde proviene. Basado en esta opinión, decidí preparar un texto dedicado sólo al estudio de los espacios L_p, el cual luce, sino único, como uno de los pocos en su género, tanto en lengua castellana como inglesa. Esta afirmación surge después de una exhaustiva búsqueda en todas las fuentes disponibles para el autor.

En matemáticas los espacios L_p son espacios de funciones que se definen usualmente usando una generalización natural de la norma p para espacios vectoriales de dimensión finita, éstos suelen llamarse de Lebesgue en honor a Henri Lebesgue (Dunford Schwartz 1958 III.3), sin embargo según Bourbaki (1987) los espacios L_p fueron introducidos por Riesz (1910). Los espacios L_p forman una clase importante de espacios de Banach, los cuales se estudian en análisis funcional y en espacios vectoriales topológicos. Además, estos espacios tienen aplicaciones en física, probabilidad y estadística, finanzas e ingeniería, así como en otras disciplinas. Otra manera de ver la importancia de los espacios L_p es mirarlos como una generalización parcial de los espacios L_2, este último tiene un origen independiente basado en hechos básicos de análisis de Fourier.

Cronológicamente, los espacios L_1 representan el espacio de todas las funciones Lebesgue integrables, además L_1 está conectado vía dualidad al espacio de las funciones esencialmente acotadas L_∞. Quiero destacar que la multiplicación de dos funciones Lebesgue integrables no necesariamente es Lebesgue integrable; sin embargo, si tomamos dos funciones una p-integrable y otra q-integrable, la desigualdad de Hölder nos garantiza que el producto de estas funciones resulta Lebesgue integrable.

En el primer semestre de 2012, el departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia me dió la oportunidad de dictar el curso tópicos avanzados en análisis, oportunidad propicia e ideal para desarrollar el presente texto. Es oportuno aclarar que el contenido de este texto no es original del autor, éste está basado en diversos tratados, textos y artículos diseminados en la literatura. Sin embargo, en el texto se incluyen demostraciones de resultados clásicos de manera novedosa, así como resultados no populares tal como el espectro del operador de Hardy, amén de un número de ejercicios (125) que aportarán una luz en el fascinante mundo de la investigación en el campo de las desigualdades matemáticas.

En la bibliografía se citan algunos de los textos en los cuales el autor se basó para organizar el presente trabajo. Este texto está dirigido a estudiantes que hayan cursado teoría de la medida e integración de Lebesgue, análisis funcional y análisis complejo, así como a los profesionales que requieren de estas herramientas para el desarrollo de sus trabajos de investigación.

El lector pudiera extrañar una sección donde se incluyan resultados como el principio de acotación uniforme (Banach-Steinhauss), Teorema de Hanh-Banach (versión norma), Teorema de Egoroff, Teorema de Fubini, etc. A juicio del autor, incluir estos resultados como una sección o apéndice sería engrosar de manera innecesaria el presente texto, en tal sentido es suficiente consultar los textos clásicos en el tema tales como Real Analysis por H.L. Royden [11] y Real Analysis, Modern Tecniques and Their Applications por Gerald Folland [5] para comprender todo el material expuesto en el presente texto. Sin embargo, incluimos al final del texto un apéndice dividido en secciones A, B y C donde se incluyen algunos resultados no populares pero relevantes, los cuales se utilizan en algunas demostraciones.

Este texto está dividido en capítulos y a su vez cada capítulo está subdividido en secciones. La mayoría de los capítulos finaliza con una sección de ejercicios. El objetivo de esta sección es que el lector, a través de la resolución de los mismos, pueda comprobar el grado de dominio alcanzado de las ideas y técnicas presentadas en cada capítulo. Por supuesto, cada sección de ejercicios contiene problemas de diferentes grados de complejidad, existen algunos de rutina y otros que pueden verse como un reto. Todas las críticas constructivas que redunden en beneficio de este trabajo, serán bienvenidas. Cualquier error de transcripción o de cálculo es absoluta responsabilidad del autor.

Quiero expresar mi más sincera gratitud a Oscar Peña, Oscar Guzmán, Dionisio Dallos, Fabio Vallejo y Camilo Chaparro, quienes mostraron durante el desarrollo del curso tópicos avanzados en análisis su entusiasmo en aprender las ideas expuestas por el autor. Para mí fué placentero tenerlos como estudiantes, en virtud de la disimilitud en la formación matemática de cada uno, aunado a la particularidad de sus intereses en la matemática. Finalmente quiero reconocer y agradecer a Oscar Peña quien inició la transcripción de la primera versión de este texto, Fabio Vallejo y Camilo Chaparro quienes continuaron la labor de Peña. A todos ellos un millón de gracias. A Humberto Rafeiro, mi colega y colaborador quien hizo posible esta versión final que ahora usted amigo lector tiene en sus manos.

René Erlín Castillo
Bogotá, Colombia

Algunas veces hay que decir cosas difíciles,
pero se deben decir de la forma más simple posible.
G.H. Hardy

$$x = \frac{x-a}{b-a} b + \frac{b-x}{b-a} a,$$

ahora bien de la convexidad de f resulta

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)$$

$$(b-a) f(x) \leq (x-a) f(b) + (b-x) f(a)$$

$$(b-a) f(x) \leq (x-a) f(b) + a f(a) - a f(a) + (b-x) f(a)$$

$$\leq (x-a) f(b) - (x-a) f(a) + (b-a) f(a)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Recíprocamente, sea $a < x < y < b$ y $0 < t < 1$, luego $0 < 1-t$, entonces es claro que $tx < ty$ y $(1-t) x < (1-t) y$ así

$$x = tx + (1-t) x \leq tx + (1-t) y < ty + (1-t) y = y$$

es decir,

$$x < tx + (1-t) y < y,$$

entonces por hipótesis

$$\frac{f(tx + (1-t) y) - f(x)}{tx + (1-t) y - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$

$$(y-x) [f(tx + (1-t) y) - f(x)] \leq (tx + (1-t) y - x) (f(y) - f(x))$$

$$= (y-x) (1-t) (f(y) - f(x))$$

$$f(tx + (1-t) y) - f(x) \leq -f(x) + t f(x) + (1-t) f(y)$$

$$f(tx + (1-t) y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

□

Corolario 1.3. *Sea f convexa en (a, b) y $a < x < y < z < b$, entonces*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z-y}.$$

Demostración. Sean x, y, z tales que $x < y < z$, entonces por el Teorema 1.2

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x}$$

ahora bien, por otra parte $x < y < z$ implica que $-z < -y < -x$ de aquí obtenemos $0 < z - y < z - x$, luego

$$0 < \frac{z-y}{z-x} < 1$$

hacemos

$$t = \frac{z-y}{z-x}$$

así

$$1 - t = \frac{y-x}{z-x}.$$

Nótese que

$$y = y\frac{z-x}{z-x} = \frac{yz-yx}{z-x} = \frac{y-x}{z-x}z + \frac{z-y}{z-x}x$$

luego

$$f(y) = f\left(\frac{y-x}{z-x}z + \frac{z-y}{z-x}x\right)$$

de la convexidad de f tenemos que

$$f(y) \leq \frac{y-x}{z-x}f(z) + \frac{z-y}{z-x}f(x)$$

$$(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)f(z)$$

$$(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + zf(z) - zf(z) + (y-x)f(z)$$

$$(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) - (z-y)f(z) + (z-x)f(z)$$

$$(z-y)(f(z) - f(x)) \leq (z-x)(f(z) - f(y))$$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

por lo tanto

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

□

Teorema 1.4. *Sea $f : (a,b) \to R$ continua tal que*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y),$$

entonces f es convexa en (a,b).

Demostración. Procedamos por inducción, sea $n \in \mathbb{N}$, para $n = 1$, tendremos que

$$f\left(\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)y\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)f(y).$$

Supongamos que para $0 < k < 2^n$ se cumple

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

ahora consideremos

$$x_0 = \frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y$$

$$y_0 = \frac{k+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{k+1}{2^n}\right)y$$

$$x_0 + y_0 = \frac{2k+1}{2^n}x + \left(2 - \frac{2k+1}{2^n}\right)y$$

$$\frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{2k+1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)y$$

y escojamos $h = 2k + 1 \leq 2^{n+1}$, entonces

$$f\left(\frac{h}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{h}{2^{n+1}}\right)y\right) = f\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(y_0)$$

$$\leq \frac{h}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{h}{2^{n+1}}\right)f(y).$$

Sea $\lambda \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ entonces existe $k_n \in Z^+$ tal que

$$\frac{k_n}{2^n} \leq \lambda \leq \frac{k_n + 1}{2^n}$$

de aquí obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n} = \lambda$$

de la continuidad de f tenemos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n}x + \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n}\right)y\right)$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{k_n}{2^n}x + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right)y\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n} f(x) + \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right) f(y)$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

□

Teorema 1.5. *Sea f una función convexa definida de (a, b) en $\mathbb{R}$, entonces f es continua sobre (a, b).*

Demostración. Sea x_0 un punto cualquiera de (a, b) y δ un número real positivo tal que la bola cerrada de centro x_0 y radio δ está contenida en (a, b), es decir

$$B_\delta(x_0) = \{x \in R : |x - x_0| < \delta\} \subset (a, b).$$

Sea $M = \max\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}$, ahora bien cualquier $x \in B_\delta(x_0) = (y_1, y_2)$ donde $y_1 = x_0 - \delta$ y $y_2 = x_0 + \delta$ se puede escribir en la manera siguiente

$$x = \frac{y_2 - x}{y_2 - y_1} y_1 + \frac{x - y_1}{y_2 - y_1} y_2$$

de donde

$$f(x) \leq \frac{y_2 - x}{y_2 - y_1} f(y_1) + \frac{x - y_1}{y_2 - y_1} f(y_2)$$

lo que implica que

$$f(x) \leq M$$

esto significa que f es acotada sobre $B_\delta(x_0)$.

Para $x \neq x_0$, definamos

$$u = \delta (\operatorname{sign}(x - x_0))^{-1},$$

entonces x tiene dos posibilidades :

(a) x está en $(x_0, x_0 + u)$, ó

(b) x está en $(x_0 - u, x_0)$.

Consideremos la posibilidad (a); es decir $x_0 < x < x_0 + u$. De aquí se obtiene que

$$0 < \frac{x - x_0}{u} < 1$$

escribiendo

$$t = \frac{x - x_0}{u} = \frac{|x - x_0|}{\delta}$$

se tiene que

$$x - x_0 = tu \tag{1.1}$$

operando adecuadamente en (1.1) se obtiene

$$x = t\,(x_0 + u) + (1 - t)\,x_0$$

$$x_0 = \frac{x}{1+t} + \frac{t}{1+t}\,(x_0 - u)$$

puesto que f es convexa

$$f\,(x) \leq tf\,(x_0 + u) + (1 - t)\,f\,(x_0) \tag{1.2}$$

$$f(x_0) \leq \frac{1}{1+t} f\,(x) + \frac{t}{1+t} f\,(x_0 - u) \tag{1.3}$$

teniendo en cuenta que f es acotada sobre $B_\delta\,(x_0)$ y operando adecuadamente en (1.2) y (1.3) se tiene que

$$-t\,[M - f\,(x_0)] \leq f\,(x) - f\,(x_0) \leq t\,[M - f\,(x_0)]$$

$$|f\,(x) - f\,(x_0)| \leq t\,[M - f\,(x_0)]$$

puesto que $t = \frac{|x - x_0|}{\delta}$ resulta

$$|f\,(x) - f\,(x_0)| \leq \frac{[M - f\,(x_0)]}{\delta}\,|x - x_0|\,. \tag{1.4}$$

Al considerar la posibilidad (b) también se obtiene (1.4), concluyéndose que f es continua en (a, b). $\square$

Observación 1.6. *El teorema 1.5 no es cierto para un intervalo cerrado. En efecto, la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & si\ x = 1 \end{cases}$$

es convexa en $[0, 1]$ *pero no es continua en* $[0, 1]$.

Teorema 1.7 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en un conjunto Ω, tal que $\mu\,(\Omega) = 1$. Sea f una función integrable sobre Ω, es decir,*

$$\int_\Omega f d\mu < \infty$$

si $a < f\,(x) < b$ para todo $x \in \Omega$ y φ es una función convexa en (a, b), entonces

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f d\mu.$$

La igualdad se dá si $f(x) = c$ para todo $x \in \Omega$ donde c es un número real.

Nota: Los casos $a=-\infty$ y $b=\infty$ no están excluidos.

Demostración. Si $f(x)=c$ para todo $x\in\Omega$ con $c\in\mathbb{R}$, entonces

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)=\varphi(c)=\int_\Omega \varphi(c)\,d\mu=\int_\Omega \varphi(f)\,d\mu.$$

Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel y $A\in\mathcal{B}$, entonces $\varphi^{-1}(A)\in\mathcal{B}$ ya que φ es continua en (a,b). Dado que f es $\mathcal{A}$-medible se tiene que

$$(\varphi\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(\varphi^{-1}(A))\in\mathcal{A},$$

de esta manera hemos demostrado que $\varphi\circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.

Sea $t_0=\int_\Omega f d\mu$, entonces en virtud de que $a<f(x)<b$ para todo $x\in\Omega$ y $\mu(\Omega)=1$, tendremos que

$$a<t_0<b$$

por el corolario 1.3 tenemos

$$\frac{\varphi(t_0)-\varphi(s)}{t_0-s}\leq\frac{\varphi(u)-\varphi(t_0)}{u-t_0} \tag{1.5}$$

para todo $a<s<t_0<u<b$.

Sea

$$\beta=\sup_{a<s<t_0}\left\{\frac{\varphi(t_0)-\varphi(s)}{t_0-s}\right\} \tag{1.6}$$

afirmamos que

$$\varphi(y)\geq\varphi(t_0)+\beta(y-t_0)$$

para todo $y\in(a,b)$. En efecto

(I) Si $y=t_0$, no hay nada que probar.

(II) Si $a<y<t_0$, por (1.6) resulta

$$\beta\geq\frac{\varphi(t_0)-\varphi(y)}{t_0-y},$$

luego $\varphi(y)\geq\varphi(t_0)+\beta(y-t_0)$.

(III) Si $t_o<y<b$, entonces por (1.5) y (1.6) se tiene que

$$\beta\geq\frac{\varphi(y)-\varphi(t_0)}{y-t_0}$$

de donde $\varphi(y)\geq\varphi(t_0)+\beta(y-t_0)$.

De (I), (II) y (III) se concluye que

$$\varphi(y) \geq \varphi(t_0) + \beta(y - t_0)$$

para todo y de (a, b). Ahora tenemos $y = f(x)$ entonces

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t_0) + \beta(f(x) - t_0)$$

integrando sobre Ω resulta

$$\int_\Omega \varphi(f(x))\, d\mu \geq \varphi(t_0) + \beta\left(\int_\Omega f(x)\, d\mu - t_0\right).$$

De aquí se deduce que

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f d\mu. \qquad \square$$

Observación 1.8. *Note que en el teorema 1.7 no se exigió la integrabilidad de la función $\varphi \circ f$ dado que si la integral de $\varphi \circ f$ es infinita la desigualdad de Jensen se satisface trivialmente.*

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que f sea integrable en un conjunto Ω con $\mu(\Omega) = 1$ es suficiente para que la desigualdad de Jensen sea válida.

Ejemplo 1.9. *Sea $f(x) = x^{-3/4}$ definida en $(0, 1)$ y sea $\varphi(x) = x^2$ definida en $\mathbb{R}$, nótese que f es integrable en $\Omega = [0, 1]$ y*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) = \left(\int_0^1 x^{-3/4}\, dx\right)^2 = 16.$$

Por otra parte note que

$$\int_0^1 (\varphi \circ f)\, dx = \int_0^1 \left(x^{-3/4}\right)^2\, dx = \infty$$

Observación 1.10. *El siguiente ejemplo nos dice que la condición $\mu(\Omega) = 1$ en el teorema 1.7 es necesaria.*

Ejemplo 1.11. *Sea $\Omega = [1, 16]$ y $f(x) = x^{-3/4}$ definida en $[1, 16]$, asi como $\varphi(x) = x^2$ definida en Ω. Nótese que φ es convexa en Ω, además $\int_1^{16} x^{-3/4}\, dx = 4$, luego*

$$\varphi\left(\int_1^{16} x^{-3/4}\, dx\right) = \left(\int_1^{16} x^{-3/4}\, dx\right)^2 = 16.$$

Por otra parte

$$\int_1^{16} \varphi \circ f \, dx = \int_1^{16} \left(x^{-3/4}\right)^2 \, dx = \frac{3}{2}.$$

Así resulta

$$\varphi\left(\int_1^{16} x^{-3/4} \, dx\right) > \int_1^{16} \varphi\left(x^{-3/4}\right) \, dx.$$

Corolario 1.12. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.7 se cumple que*

$$\varphi\left(\frac{\int_\Omega f g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}\right) \leq \frac{\int_\Omega \varphi(f) \, g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}$$

donde g es una función positiva e integrable sobre Ω.

Demostración. En la demostración del Teorema 1.7 se demostró que si φ es convexa, existe β tal que

$$\varphi(y) \geq \varphi(t_0) + \beta(y - t_0) \tag{1.7}$$

para todo y de (a, b). Ahora bien escribiendo $y = f(x)$ y multiplicando (1.7) por una función g positiva e integrando obtenemos

$$\int_\Omega \varphi(f) \, g d\mu \geq \int_\Omega \varphi(t_0) \, g d\mu + \int_\Omega \varphi(f) \, g d\mu + \beta \int_\Omega f g d\mu - \beta t_0 \int_\Omega g d\mu. \tag{1.8}$$

Definamos

$$t_0 = \frac{\int_\Omega f g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}$$

sustituyendo en (1.8) resulta

$$\int_\Omega \varphi(f) \, g d\mu \geq \varphi\left(\frac{\int_\Omega f g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}\right) \int_\Omega g d\mu + \beta \int_\Omega f g d\mu - \beta \left(\frac{\int_\Omega f g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}\right) \int_\Omega g d\mu$$

de donde

$$\varphi\left(\frac{\int_\Omega f g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}\right) \leq \frac{\int_\Omega \varphi(f) \, g d\mu}{\int_\Omega g d\mu}.$$

□

Observación 1.13. *El corolario 1.12 generaliza la desigualdad de Jensen.*

Ejercicios

1. Demuestre que la función dada en la observación 1.6 es convexa.

2. Sea $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función tal que

   I. φ es convexa.

   II. $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   Demostrar que:

   a) φ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

   b) Si $0 < x < y$, entonces $\frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(y)}{y}$.

   c) Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $\varphi(x) \leq x\varphi(1)$.

3. Una función creciente f se dice *superaditiva* si $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$. Si f es una función convexa tal que $f(0) = 0$ entonces f es superaditiva.

4. Demostrar que el supremo de cualquier colección de funciones convexas en (a, b) es convexo y que los límites puntuales de sucesiones de funciones convexas también lo son. ¿Qué se puede afirmar de los límites superior e inferior de sucesiones de funciones convexas?

5. Supongamos que φ es convexa en (a, b) y que ψ es convexa no decreciente en el recorrido de φ. Demostrar que $\psi \circ \varphi$ es convexa en (a, b). Para $\varphi > 0$, demostrar que la convexidad de $\log \varphi$ implica la de φ, pero no a la inversa.

6. Demostrar que la composición de funciones convexas puede no ser convexa.

7. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable por la derecha en todo punto. Si dicha derivada es creciente, demostrar que f es convexa.

8. Si f es convexa en (a, b). Demostrar que

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

   para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots n$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

9. Supóngase que $\mu(\Omega) = 1$ y $h : \Omega \to [0, +\infty)$ medible. Si $A = \int_\Omega h\, d\mu$. Demuéstrese que
$$\sqrt{1 + A^2} \leq \int_\Omega \sqrt{1 + h^2}\, d\mu \leq 1 + A.$$

10. Supóngase que φ es una función real tal que
$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))\, dx$$
para toda f acotada y medible. Demuestre que φ es entonces convexa.

11. Suponiendo que φ es estrictamente convexa y $\mu(\Omega) = 1$. Demostrar que la desigualdad de Jensen
$$\varphi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f\, d\mu$$
es una igualdad si y sólo si f es constante c.t.p.

12. Supongamos que $\mu(\Omega) = 1$ y que f, g son medibles no negativas en Ω con $fg \geq 1$. Demostrar que
$$\int_\Omega f\, d\mu \int_\Omega g\, d\mu \geq 1.$$

13. Sea g una función no negativa y medible en $[0, 1]$. Demuestre que
$$\log \int_0^1 g(t)\, dt \geq \int_0^1 \log g(t)\, dt.$$

14. Sea μ una medida positiva en X y supongamos que $f : X \to (0, +\infty)$ satisface $\int_X f\, d\mu = 1$. Demostrar que las desigualdades

    a)
    $$\int_E \log(f)\, d\mu \leq \mu(E) \log \frac{1}{\mu(E)}$$

    b)
    $$\int_E f^p\, d\mu \leq (\mu(E))^{1-p} \qquad (0 < p < 1)$$

    son válidas para todo conjunto medible E con $0 < \mu(E) < \infty$.

15. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números no negativos tal que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1$ y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos. Demuestre que
$$\prod_{k=1}^{n}\xi_k^{\alpha_k} \le \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k.$$

16. Use el ejercicio anterior para demostrar que la *media geométrica* siempre es menor o igual que la *media aritmética*, es decir
$$\sqrt[n]{\xi_1\cdot\xi_2\cdot\cdots\cdot\xi_n} \le \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}.$$

17. Demuestre que la *media armónica* es siempre menor o igual que la media geométrica, es decir
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots\cdot x_n}.$$

18. Sea $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(\Omega)=1$ y $f\in L_1(\Omega)$ con $a<f(x)<b$ para todo $x\in\Omega$. Demuestre que si ψ es cóncava en (a,b) entonces
$$\psi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \ge \int_\Omega \psi\circ f\,d\mu.$$

19. Sea f una función medible positiva en $[0,1]$. ¿Cuál de las dos cantidades
$$\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx; \qquad \int_0^1 f(s)\,ds\int_0^1 \log f(t)\,dt$$
es mayor?

1.2. Desigualdad de Young

En esta sección damos una demostración analítica de la desigualdad de Young. Usualmente ésta, es motivada vía geométrica. Sin menos cabo del uso de la intuición geométrica, consideramos que esta demostración por su sencillez, resulta muy sugestiva y formativa al mismo tiempo, debo aclarar que la demostración referida no es original del autor.

Teorema 1.14 (Desigualdad de Young)**.** *Sea $y = f(x)$ una función creciente en $[0,\infty)$ con $f(0) = 0$. Supongamos que f es de clase C^1 en $[a,b]$ con a y b números reales no negativos, entonces*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy,$$

donde $f^{-1}(y)$ es la función inversa de f. La igualdad se cumple si $b = f(a)$.

Demostración. Si f es de clase C^1 en $[a,b]$, integrando por partes obtenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)\,dx. \tag{1.9}$$

Sea $y = f(x)$, entonces $dy = f'(x)dx$, además $x = f^{-1}(y)$. Reemplazando en (1.9) resulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy. \tag{1.10}$$

Ahora, si $r \leq x \leq a$, entonces $f(r) \leq f(x)$, así

$$\begin{aligned} (a-r)f(r) &\leq \int_r^a f(x)\,dx \\ af(r) - rf(r) &\leq \int_r^a f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \int_r^a f(x)\,dx &= \int_r^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\ \int_r^a f(x)\,dx &= -\int_0^r f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \end{aligned}$$

En virtud de (1.11), tenemos

$$af(r) - rf(r) \leq -\int_0^r f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \tag{1.12}$$

Por (1.10),

$$\int_0^r f(x)\,dx = rf(r) - \int_0^{f(r)} f^{-1}(y)\,dy, \tag{1.13}$$

reemplazando (1.13) en (1.12) resulta

$$\begin{aligned} af(r) - rf(r) \leq -rf(r) + \int_0^{f(r)} f^{-1}(y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx \\ af(r) \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(r)} f^{-1}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Si $0 < b < f(a)$, podemos escoger $r = f^{-1}(b)$. Así,

$$\begin{aligned} af(f^{-1}(b)) &\leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(f^{-1}(b))} f^{-1}(y)\,dy \\ ab &\leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Finalmente, en virtud de (1.10) para $b = f(a)$ se tiene que

$$\int_0^a f(x)\,dx = af(a) - \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy$$

luego,

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)\,dx &= ab - \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \\ ab &= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.15 (Young)**.** *Sea $1 < p < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ para a y b reales positivos. La igualdad se cumple si $a^p = b^q$.*

Demostración. En primer lugar si $a^p = b^q$, entonces

$$a = b^{q/p}$$

luego,

$$a = b^{q-1},$$

por lo tanto,

$$ab = b^q.$$

Así,

$$ab = b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right),$$

es decir,

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ahora, consideremos $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha > 0$ y $f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$, nótese que f satisface las hipótesis del Teorema 1.14, entonces

$$\begin{aligned} ab &\leq \int_0^a x^\alpha \, dx + \int_0^b y^{1/\alpha} \, dy \\ &= \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{b^{1/\alpha+1}}{1/\alpha+1}. \end{aligned}$$

Si $p = \alpha + 1$ y $q = \frac{\alpha+1}{\alpha}$. Note que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Observación 1.16. *Es importante señalar que esta última desigualdad es susceptible de ser demostrada de varias maneras conceptualmente diferentes.*

Corolario 1.17 (Young)**.** *Para $a > 0$, $b > 0$, se tiene que*

$$ab \leq a \log^+ a + e^{b-1},$$

donde

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & si \;\; x > 1; \\ 0 & si \;\; 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demostración. Sean φ y ψ funciones definidas por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \log x + 1 & \text{si } \ x > 1; \\ 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

y

$$\psi(y) = \begin{cases} e^{y-1} & \text{si } \ y > 1; \\ 0 & \text{si } \ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Ahora, definamos

$$\varphi^*(x) = \varphi(x+1) - 1 \quad \text{y} \quad \psi^*(y) = \psi(y+1) - 1.$$

Nótese que φ^* es de clase C^1 en $[0, \infty)$ y $\varphi^*(0) = 0$, además, note que ψ^* es la función inversa de φ^*, entonces por el Teorema 1.14 para $a > 1$ y $b > 1$ tenemos

$$\begin{aligned} (a-1)(b-1) &\leq \int_0^{a-1} \varphi^*(x)\, dx + \int_0^{b-1} \psi^*(y)\, dy \\ &= \int_0^{a-1} \varphi(x+1)\, dx - (a-1) + \int_0^{b-1} \psi(y+1)\, dy - (b-1) \\ &= \int_1^a \varphi(u)\, du + \int_1^b \psi(t)\, dt - (a+b) + 2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} ab - (a+b) + 1 &\leq \int_1^a \varphi(u)\, du + \int_1^b \psi(t)\, dt - (a+b) + 2 \\ ab &\leq \int_1^a \varphi(u)\, du + \int_1^b \psi(t)\, dt + 1 \\ ab &\leq \int_1^a (\log u + 1)\, du + \int_1^b e^{t-1}\, dt + 1 \\ &= a \log^+ a + e^{-1}[e^b - e] + 1 \\ &= a \log^+ a + e^{b-1} - 1 + 1, \end{aligned}$$

finalmente,

$$ab \leq a \log^+ a + e^{b-1}. \qquad \square$$

Ejercicios

1. Sean p y q dos números reales con $0 < p < 1$ y $-\infty < q < 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demostrar que

$$ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

para a y b reales positivos.

2. Use las funciones

$$u(x) = \begin{cases} p \log a & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{p} \\ q \log b & \text{si } \dfrac{1}{p} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$(a, b > 0)$ y $f(x) = e^x$ para demostrar que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{con} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. Dados $a, b > 0$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q$$

donde $c(\varepsilon) = \dfrac{(\varepsilon p)^{-q/p}}{q}$.

Observación 2.3. *El ejemplo 2.2 nos dice que en general los espacios $\mathscr{L}_p$ no son comparables.*

Ejemplo 2.4. *Sea $X = [0, 1/2]$ y $f : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \left[x \log^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1},$$

entonces $f \in \mathscr{L}_1(m)$

Ejemplo 2.5. *Sea $X = (0, \infty)$ y $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^{-1/2}$, entonces $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$ para $2 < p < \infty$.*

Observación 2.6. *No es difícil verificar que $\mathscr{L}_p$ con $1 \leq p < \infty$ es un espacio vectorial, en efecto, observe que si $f, g \in \mathscr{L}_p(\mu)$, entonces en virtud que*

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\
&\leq (2 \max(|f|, |g|))^p \\
&= 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \\
&\leq 2^p(|f|^p + |g|^p),
\end{aligned}$$

se tiene que $f + g \in \mathscr{L}_p(\mu)$.

Además, si $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \in \mathscr{L}_p(\mu)$.

Por otra parte, las desigualdades

$$0 \leq f^+ \leq |f|$$

$$0 \leq f^- \leq |f|$$

implican que f^+, f^- y $|f|$ están en $\mathscr{L}_p(\mu)$.

2.2. Supremo esencial

Definición 2.7. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función $\mathcal{A}$-medible. Para cada $M > 0$ definamos $E_M = \{x \in X : |f(x)| > M\}$. Nótese que $E_M \in \mathcal{A}$ en virtud de que f es $\mathcal{A}$-medible. Sea*

$$\begin{aligned}
A &= \{M > 0 : \mu(E_M) = 0\} \\
&= \{M > 0 : |f(x)| \leq M \ c.t.p\}.
\end{aligned}$$

El supremo esencial de f *denotado por* $\operatorname{ess\,sup} f$ *o* $\|f\|_\infty$ *es definido por*

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f = \begin{cases} \infty & si \;\; A = \emptyset; \\ \inf A & si \;\; A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Observación 2.8. *Note que si* $A \neq \emptyset$, *entonces* 0 *es una cota inferior de* A, *luego* $\inf A \in \mathbb{R}$. *Sea* $\alpha = \|f\|_\infty < \infty$, *afirmamos que* $\alpha \in A$, *en efecto, note que*

$$E_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| > \alpha + 1/n\},$$

además, para cada n $\{x \in X : |f(x)| > \alpha + 1/n\} \in \mathcal{A}$. *Como* $\alpha = \inf A$, *entonces para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $\alpha_n \in A$ *tal que* $\alpha \leq \alpha_n < \alpha + 1/n$, *de aquí se tiene que*

$$\{x \in X : |f(x)| > \alpha + 1/n\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha_n\}$$

luego,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha + 1/n\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_n\}) = 0,$$

así, $\mu(E_\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$, *lo que demuestra que* $\alpha \in A$, *luego si* $\alpha = \|f\|_\infty < \infty$, *entonces*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad c.t.p.$$

Ahora bien, definamos

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \notin E_\alpha; \\ 0 & si \;\; x \in E_\alpha, \end{cases}$$

como $f^*(x) = f(x)$ *c.t.p, entonces*

$$\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty = \sup_{x \in X} |f^*(x)| = \sup_{x \in X \setminus E_\alpha} |f(x)|.$$

Definición 2.9.

$$\mathscr{L}_\infty(\mu) = \{f : f : X \to \mathbb{R} \text{ medible y } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Los miembros de $\mathscr{L}_\infty(\mu)$ *se llaman funciones esencialmente acotadas.*

Ejemplo 2.10. *Toda función acotada en* X *está en* $\mathscr{L}_\infty(\mu)$.

Ejemplo 2.11. *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \mathbb{I} \cap [0,1]; \\ \infty & si \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Note que,

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\} = 1,$$

por lo tanto $f \in \mathscr{L}_\infty(\mu)$.

Ejemplo 2.12. *Sean* $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathscr{L}$ *y* $\mu = m$. *Sea* $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ *una enumeración de números racionales en* $\mathbb{R}$, *definamos*

$$f(x) = \begin{cases} n & si \;\; x = r_n \in \mathbb{Q}; \\ 1 & si \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Queremos demostrar que

$$A = \{M > 0 : m(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\} = [1, \infty).$$

En efecto, sea $M \in [1, \infty)$, *entonces*

$$\{x \in X : |f(x)| > M\} \subset \mathbb{Q},$$

luego,

$$m(\{x \in X : |f(x)| > M\}) \leq m(\mathbb{Q}) = 0,$$

así, $M \in A$, *es decir*

$$[1, \infty) \subseteq A. \tag{2.1}$$

Por otra parte, supongamos que $y \notin [1, \infty)$, *entonces* $y < 1$, *luego*

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \{x \in X : |f(x)| > y\},$$

por lo cual,

$$m(\{x \in X : |f(x)| > y\}) \neq 0$$

lo que significa que $y \notin A$, *entonces*

$$A \subset [1, \infty), \tag{2.2}$$

de (2.1) y (2.2) tenemos

$$A = \{M > 0 : m(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\} = [1, \infty).$$

Ahora, observe que

$$\text{ínf}\{M > 0 : m(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\} = 1,$$

por lo tanto $f \in \mathscr{L}_\infty(\mu)$.

Ejemplo 2.13. *Sean* $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(N)$ *y* μ *la medida de contar, sea* $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{N})$. *Afirmamos que*

$$A = \{M > 0 : m(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\} = \emptyset.$$

En efecto, sea $M > 0$ *arbitrario, escojamos* $k > M$, $k \in \mathbb{N}$, *luego*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) \geq \mu(\{k\}) = 1,$$

lo que implica que $M \notin A$ *y como* M *es arbitrario, podemos concluir que* $A = \emptyset$, *por lo tanto* $\|f\|_\infty = \infty$.

Ejemplo 2.14. *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida tal que* $\mu(X) < \infty$. *Entonces* $\mathscr{L}_\infty(\mu) \subseteq \mathscr{L}_p(\mu)$ *para cualquier* $1 \leq p < \infty$.

En efecto, sea $f \in \mathscr{L}_\infty(\mu)$, *entonces* $|f| \leq \|f\|_\infty$ *c.t.p, luego*

$$\int_X |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \mu(X)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Así $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$.

Ejemplo 2.15. *Sean* $1 \leq p < q < \infty$, *entonces* $\mathscr{L}_q(\mu) \subseteq \mathscr{L}_p(\mu)$ *con* $\mu(X) < \infty$.

En efecto, sea $f \in \mathscr{L}_q(\mu)$, si $A = \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$, entonces

$$\chi_X = \chi_A + \chi_{X \setminus A}$$

y

$$|f(x)|^p < |f(x)|^q \quad \text{para} \quad x \in X \setminus A \quad \text{y} \quad |f(x)| \leq 1,$$

para $x \in A$, luego

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu \\
&= \int_X \chi_A |f|^p \, d\mu + \int_X \chi_{X \setminus A} |f|^p \, d\mu \\
&\leq \int_X \chi_A d\mu + \int_X \chi_{X \setminus A} |f|^p \, d\mu \\
&\leq \mu(A) + \int_X \chi_{X \setminus A} |f|^q \, d\mu \\
&\leq \mu(X) + \|f\|_q^q < \infty,
\end{aligned}$$

así, $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$.

Observación 2.16. *Los ejemplos 2.14 y 2.15 nos dicen bajo que condiciones se pueden comparar los espacios $\mathscr{L}_p$.*

Observación 2.17. *a) Las inclusiones en los ejemplos precedentes 2.14 y 2.15 son estrictas. Para ver esto, consideremos el siguiente ejemplo.*

Sea $X = [0, 1]$ y $1 \leq p < \alpha < q \leq \infty$, donde $\alpha = \frac{p+q}{2}$, luego si $p < \alpha < q$ tendremos que $p/\alpha < 1$ y $q/\alpha > 1$. Escojamos $\beta = 1/\alpha$ y definamos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\beta} & si \;\; x \neq 0; \\ 0 & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

Luego consideremos

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{p\beta}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{p/\alpha}} < \infty, \end{aligned}$$

puesto que $p/\alpha < 1$, entonces $f \in \mathscr{L}_p(m)$, por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^q \, dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{q\beta}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{q/\alpha}} \to \infty, \end{aligned}$$

ya que $q/\alpha > 1$, así $f \notin \mathscr{L}_q(m)$. Por lo tanto,

$$\mathscr{L}_q(m) \subsetneq \mathscr{L}_p(m).$$

b) Los ejemplos precedentes 2.14 y 2.15 no son ciertos si $\mu(X) = \infty$.

En efecto, consideremos la función constante $f(x) = c$ con $c \neq 0$ en $(0, \infty)$, es fácil ver que $f \in \mathscr{L}_\infty(\mu)$, pero $f \notin \mathscr{L}_p(\mu)$ para $0 < p < \infty$. Por otra parte, sea $X = [1, \infty)$ y definamos $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1,$$

así, $f \in \mathscr{L}_2(m)$, pero

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} = \ln x|_1^\infty \to \infty,$$

así, $f \notin \mathscr{L}_1(m)$.

2.3. $\mathscr{L}_p$ no es un espacio normado

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, definamos

$$\| \cdot \|_p : \mathscr{L}_p(\mu) \to \mathbb{R}^+$$

por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

con $1 \leq p < \infty$.

Ejemplo 2.18. *Sea $X = [0, 1]$, consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0 & si \;\; x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Entonces, para $p = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{[0,1]} f(x) \, dm \\ &= \int_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} 1 \, dm + \int_{\mathbb{I} \cap [0,1]} 0 \, dm \\ &= m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $p = \infty$, entonces

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : m(\{x \in [0, 1] : |f(x)| > M\}) = 0\} = 0,$$

sin embargo, note que f no es idénticamente la función nula. Esto nos dice que tanto $\| \cdot \|_1$ como $\| \cdot \|_\infty$ no definen una norma en $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_\infty$ respectivamente.

Ahora bien, para corregir esta debilidad del espacio $\mathscr{L}_p$, tomemos dos funciones f y g en $\mathscr{L}_p$ de modo que f esté relacionada con g si y sólo si $f = g$ c.t.p, en símbolos $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ c.t.p. Es sólo un asunto de rutina verificar que $\sim$ define una relación de equivalencia.

Una vez verificado esto, denotemos la clase generada por f como

$$[f] = \{g \in \mathscr{L}_p(\mu) : g \sim f\} \quad \text{y} \quad \|[f]\|_p = \|g\|_p$$

para $g \in [f]$. Ahora bien, sean g_1 y g_2 en $[f]$, entonces

$$g_1 \sim f \text{ si y sólo si } g_1 = f \text{ c.t.p}$$

y

$$g_2 \sim f \text{ si y sólo si } g_2 = f \text{ c.t.p},$$

por lo tanto $g_1 = g_2$ c.t.p, entonces

$$\|g_1\|_p = \|g_2\|_p.$$

Esto nos dice que $\|[f]\|_p = \|g\|_p$ esta bien definida por ser independiente del representante de la clase $[f]$.

Ahora, definamos $L_p(\mu) = L_p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathscr{L}_p / \sim$, en lo sucesivo, si no hay confusión usaremos f en lugar de $[f]$. Con algo de paciencia, podemos ver que L_p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Por otra parte, note que $\|\cdot\| : L_p \to \mathbb{R}^+$ ahora satisface $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$ c.t.p.

El siguiente resultado nos provee de la desigualdad triangular para la función $\|\cdot\|_p$.

Teorema 2.19 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L_p(\mu)$, entonces $f + g \in L_p(\mu)$ y*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

La igualdad se cumple si $A|f| = B|g|$ c.t.p para A y B del mismo signo y no simultáneamente nulos.

Demostración. Verifiquemos la igualdad. Sean A y B números del mismo signo y no simultáneamente nulos tales que $A|f| = B|g|$ c.t.p, entonces $A\|f\|_p = B\|g\|_p$, luego $\|f\|_p = \frac{B}{A}\|g\|_p$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p &= \left\| \frac{B}{A} g + g \right\|_p \\
&= \frac{B + A}{A} \|g\|_p \\
&= \frac{B}{A} \|g\|_p + \|g\|_p \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p.
\end{aligned}$$

Los casos $p = \infty$ y $p = 1$ son inmediatos, al igual que $\|f\|_p = \|g\|_p = 0$. Supongamos que $1 < p < \infty$ y $\|f\|_p = \alpha \neq 0$ y $\|g\|_p = \beta \neq 0$, entonces existen funciones f_0 y g_0 tales que $|f| = \alpha f_0$ y $|g| = \beta g_0$ con $\|f_0\|_p = \|g_0\|_p = 1$.

Ahora, consideremos $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ y $1 - \lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, note que $0 < \lambda < 1$, luego

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \\ &= (\alpha f_0(x) + \beta g_0(x))^p \\ &= [(\alpha+\beta)\lambda f_0(x) + (\alpha+\beta)(1-\lambda)g_0(x)]^p \\ &= (\alpha+\beta)^p(\lambda f_0(x) + (1-\lambda)g_0(x))^p \\ &\leq (\alpha+\beta)^p[\lambda(f_0(x))^p + (1-\lambda)(g_0(x))^p]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dado que $\varphi(t) = t^p$ es convexa en $[0, \infty)$, integrando en (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} \int_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu &\leq (\alpha+\beta)^p[\lambda\|f_0\|_p^p + (1-\lambda)\|g_0\|_p^p] \\ &= (\alpha+\beta)^p < \infty, \end{aligned}$$

es decir, $f + g \in L_p(\mu)$. Finalmente,

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p$$

así,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Observación 2.20. *Consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & si \ \ |x| < 1; \\ 0 & si \ \ |x| \geq 1. \end{cases}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = \int_{[-1,1]} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4,$$

así, $f \in L_1(m)$, pero

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x) \, dx = \int_{[-1,1]} \frac{dx}{|x|} \to \infty,$$

así, $f^2 \notin L_1(m)$.

Ahora, queremos estudiar bajo que condiciones el producto de dos funciones de $L_1(\mu)$ se queda en $L_1(\mu)$. El siguiente resultado nos dice que si $f \in L_p(\mu)$ y $g \in L_q(\mu)$ para p y q números conjugados es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tendrá que $fg \in L_1(\mu)$. Previo a la demostración de este poderoso resultado, necesitaremos el siguiente Lema.

Lema 2.21. *Sea $1 \le p < \infty$. Entonces, para números a, b y t no negativos se tiene que*

$$(a+tb)^p \ge a^p + ptba^{p-1}.$$

Demostración. Definamos

$$\varphi(t) = (a+tb)^p - a^p - ptba^{p-1}.$$

Note que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(t) = pb[(a+tb)^{p-1} - a^{p-1}] \ge 0$ para $p \ge 1$ y a, b, t positivos, luego φ es creciente en $[0, \infty)$ y así no negativa para $t \ge 0$. Así,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\ge \varphi(0) \\ (a+tb)^p &\ge a^p + ptba^{p-1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.22 (Desigualdad de Hölder)**.** *Si p y q son números extendidos no negativos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y si $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$, entonces $fg \in L_1(\mu)$ y*

$$\int_X |fg|\, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

La igualdad se cumple si existen constantes A y B no simultáneamente nulos tales que $A|f|^p = B|g|^q$ c.t.p.

Demostración. En primer lugar consideremos $p = 1$ y $q = \infty$, entonces es claro que

$$|g| \le \|g\|_\infty \quad \text{c.t.p.}$$

Como $|f| \ge 0$, se tiene que $|fg| \le |f|\|g\|_\infty$ c.t.p. Por lo cual,

$$\int_X |fg|\, d\mu \le \left(\int_X |f|\, d\mu \right) \|g\|_\infty,$$

así,

$$\int_X |fg|\, d\mu \le \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Ahora, supongamos que $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ y $f \ge 0$, $g \ge 0$. Definamos $h(x) = [g(x)]^{q/p}$, entonces

$$g(x) = [h(x)]^{p/q} = [h(x)]^{p-1}.$$

Luego, en virtud del Lema 2.21 se tiene

$$\begin{aligned} ptf(x)g(x) &= ptf(x)[h(x)]^{p-1} \\ &\leq (h(x)+tf(x))^p - [h(x)]^p. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} pt\int_X f(x)g(x)\,d\mu &\leq \int_X (h(x)+tf(x))^p\,d\mu - \int_X [h(x)]^p\,d\mu \\ &= \|h+tf\|_p^p - \|h\|_p^p. \end{aligned}$$

En vista de la desigualdad de Minkowski se tiene

$$\begin{aligned} pt\int_X f(x)g(x)\,d\mu &\leq (\|h\|_p + t\|f\|_p)^p - \|h\|_p^p \\ p\int_X f(x)g(x)\,d\mu &\leq \frac{(\|h\|_p + t\|f\|_p)^p - \|h\|_p^p}{t}. \end{aligned}$$

Sea $F(t) = (\|h\|_p + t\|f\|_p)^p$, luego $F(0) = \|h\|_p^p$. Entonces,

$$\begin{aligned} p\int_X fg\,d\mu &\leq \lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t} = F'(0) \\ &= p(\|h\|_p)^{p-1}\|f\|_p. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \left(\int_X [h(x)]^p\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} &= \left(\int_X [g(x)]^q\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_X [g(x)]^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

así, $\|h\|_p^{p-1} = \|g\|_q$. Por lo tanto,

$$\int_X fg\,d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Finalmente, escogiendo $A = \|g\|_q^q$ y $B = \|f\|_p^p$ tal que $A|f|^p = B|g|^q$, entonces

$$|f| = \|f\|_p\frac{|g|^{q/p}}{\|g\|_q^{q/p}},$$

integrando, resulta

$$\int_X |fg|\,d\mu = \|f\|_p\|g\|_q.$$

□

Observación 2.23. *Tradicionalmente, la desigualdad de Minkowski, se obtiene de la desigualdad de Hölder, acá obtenemos la desigualdad de Hölder a partir de la desigualdad de Minkowski, esto nos hace pensar que ambas desigualdades dependen una de la otra. Sin embargo, si analizamos con detenimiento la situación planteada, podemos observar que la desigualdad Young (Corolario 1.15) nos provee de una herramienta la cual nos permite demostrar la desigualdad de Hölder sin utilizar la desigualdad de Minkowski. También, a través de la desigualdad generalizada de Jensen (Corolario 1.12) podemos obtener la desigualdad de Hölder (ver problema 34 sección 2.3).*

Los dos resultados a continuación nos dan la generalización de la desigualdad de Hölder.

Corolario 2.24. *Sean p, q y r números reales tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Sean $f\in L_p(\mu)$, $g\in L_q(\mu)$ y $h\in L_r(\mu)$. Entonces,*

$$\int_X |fgh|\, d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

Demostración. Sea $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{s}$, entonces $\frac{s}{p}+\frac{s}{q}=1$, luego $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$. Queremos demostrar que $fg\in L_s(\mu)$. En efecto, por el Teorema 2.22

$$\int_X |fg|^s\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{sp/s}\, d\mu\right)^{s/p}\left(\int_X |g|^{sq/s}\, d\mu\right)^{s/q}$$

$$\left(\int_X |fg|^s\, d\mu\right)^{1/s} \leq \|f\|_p\|g\|_q,$$

así, $fg\in L_s(\mu)$. Finalmente, invocamos una vez más el Teorema 2.22, es decir

$$\begin{aligned}\int_X |fgh|\, d\mu &\leq \left(\int_X |fg|^s\, d\mu\right)^{1/s}\left(\int_X |h|^r\, d\mu\right)^{1/r}\\ &\leq \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.25. *Sea $p_k>1$, $k=1,2,3,...,n$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}=1$, para $f_k\in L_{p_k}(\mu)$ tenemos que $f_1,f_2,\ldots,f_n\in L_1(\mu)$ y*

$$\int_X \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\right|\, d\mu \leq \prod_{k=1}^{n}\|f\|_{p_k}.$$

El siguiente resultado nos provee de otra caracterización de la norma $\|\cdot\|_p$.

Teorema 2.26. *Sea $f \in L_p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces,*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L_q(\mu)} \left\{ \|fg\|_1 \|g\|_q^{-1} : g \neq 0,\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\}.$$

Demostración. En virtud de la desigualdad de Hölder se tiene

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

entonces,

$$\|fg\|_1 \|g\|_q^{-1} \leq \|f\|_p$$

para $g \neq 0$, luego

$$\sup_{g \in L_q(\mu)} \left\{ \|fg\|_1 \|g\|_q^{-1} : g \neq 0,\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\} \leq \|f\|_p. \tag{2.4}$$

Por otra parte, supongamos $f \neq 0$ y $g = c|f|^{p-1}$ (c constante), entonces

$$|fg| = c|f|^p,$$

así,

$$\|fg\|_1 = c\|f\|_p^p.$$

Si escogemos $c = \|f\|_p^{1-p}$, obtenemos

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p^{1-p} \|f\|_p^p = \|f\|_p. \tag{2.5}$$

Ahora bien,

$$|g|^q = c^q |f|^{q(p-1)}$$

e integrando ambos lados tenemos que

$$\begin{aligned} \|g\|_q &= c\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p^{1-p} \|f\|_p^{p/q} \\ &= \|f\|_p^{1-p} \|f\|_p^{p-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $f \neq 0$, entonces $\|g\|_q^{-1} = 1$.

Así, podemos escribir (2.5) como

$$\|f\|_p = \|fg\|_1 \|g\|_q^{-1} \leq \sup_{g \in L_q(\mu)} \left\{ \|fg\|_1 \|g\|_q^{-1} : g \neq 0,\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\}. \tag{2.6}$$

Combinando (2.4) y (2.6) obtenemos el resultado. $\square$

Teorema 2.27. *Sea $f \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, entonces*

a) $f \in L_p(\mu)$ *para* $1 < p < \infty$.

b) $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Demostración. a) Sea $f \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, entonces $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p, entonces $|f|^{p-1} \leq \|f\|_\infty^{p-1}$, así, $|f|^p \leq \|f\|_\infty^{p-1}|f|$, luego $\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-1}\|f\|_1$, de donde

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{p}}. \tag{2.7}$$

De esta manera hemos demostrado que $f \in L_p(\mu)$.

b) En virtud de (2.7) tenemos

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \tag{2.8}$$

Por otra parte, sea $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ y

$$A = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \epsilon\},$$

note que $\mu(A) > 0$, entonces

$$\int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_A |f|^p \, d\mu \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)^p \mu(A),$$

luego

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \epsilon) \liminf_{p\to\infty} [\mu(A)]^{\frac{1}{p}},$$

de la arbitrariedad de ϵ resulta

$$\liminf_{p\to\infty} \geq \|f\|_\infty, \tag{2.9}$$

combinando (2.8) y (2.9) resulta

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Así que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

$\square$

Lema 2.28 (Desigualdad de Markov). *Sea $f \in L_p(\mu)$ y g una función creciente en $[0, \infty)$. Entonces,*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{\int_X g \circ |f| \, d\mu}{g(\lambda)},$$

donde $g(x) \neq 0$ para todo $x \in [0, \infty)$.

Demostración. Sea $A_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ donde $\lambda > 0$, luego $\lambda < |f(x)|$ para todo $x \in A_\lambda$, entonces

$$g(\lambda)\chi_{A_\lambda}(x) \leq g(|f(x)|)\chi_{A_\lambda}(x)$$

, integrando ambos lados resulta

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{\int_X g \circ |f| \, d\mu}{g(\lambda)}.$$

□

Teorema 2.29. *Si $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $(L_p(\mu), \| \cdot \|_p)$ es un espacio completo.*

Demostración. **Caso 1.** $1 \leq p < \infty$. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(\mu)$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p^p < \epsilon^p$$

siempre que $n, m \geq n_0$. En virtud de la desigualdad de Markov con $g(\lambda) = \lambda^p$, obtenemos

$$\epsilon^p \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \leq \|f_n - f_m\|_p^p$$

siempre que $n, m \geq n_0$. Esto último nos dice que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida, por lo tanto existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge c.t.p a una función f medible. Por el Lema de Fatou se tiene

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int |f_{n_k}|^p \, d\mu < \infty.$$

Así $f \in L_p(\mu)$. Invocando una vez más el Lema de Fatou podemos ver que

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int |f_n - f_{n_k}|^p \, d\mu < \epsilon^p$$

siempre que $n \geq n_0$. Es decir f_n converge a f en $L_p(\mu)$.

Caso 2. $p = \infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L_\infty(\mu)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$A_k = \{x : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$$

y para cada $n, m \in \mathbb{N}$, sea

$$B_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Note que cada A_k y cada $B_{n,m}$ tienen medida cero. Sea

$$E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{n,m} B_{n,m}\right),$$

entonces $\mu(E) = 0$. Note que cada $f_n(x)$ es una función real y además

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad \forall x \in X \setminus E.$$

Esto último nos dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión uniforme de Cauchy en $X \setminus E$. Ahora, definamos

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{si } x \in X \setminus E; \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Entonces f es medible, dado que $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \chi_{E^c}$, es decir, $f_n \to f$ uniformemente en E^c. Finalmente, queremos demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/4$ $\forall x \in X \setminus E$ siempre que $n \geq n_1$. Así,

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon/2\} \subset E \text{ para } n \geq n_1.$$

Como $\mu(E) = 0$ concluimos que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon/2 < \epsilon \text{ siempre que } n \geq n_1,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, en particular $\|f_{n_1} - f\|_\infty < \epsilon$, así $f_{n_1} - f \in L_\infty(\mu)$. Ahora, como $f_{n_1} \in L_\infty(\mu)$ y $L_\infty(\mu)$ es un espacio vectorial, entonces $f = f_{n_1} - (f_{n_1} - f) \in L_\infty(\mu)$.

$\square$

Observación 2.30. *Como una consecuencia del Teorema 2.29 podemos ver que para $1 \leq p \leq \infty$, $L_p(\mu)$ es un espacio de Banach, es decir, un espacio normado el cual es completo con respecto a la métrica inducida por la norma.*

Teorema 2.31. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L_p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$, la cual converge c.t.p a una función $f \in L_p(\mu)$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \text{ si y sólo si } \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Demostración. Dado que $\varphi(t) = t^p$ (con $1 \leq p < \infty$) es convexa en $[0,\infty)$. Entonces,

$$\left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p),$$

así,

$$|a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p). \tag{2.10}$$

Como $f_n \to f$ c.t.p, entonces $|f_n - f|^p \to 0$ c.t.p. En vista de (2.10), obtenemos

$$0 \leq 2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p,$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left[2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p\right] = 2^p|f|.$$

Por el Lema de Fatou se tiene que

$$\begin{aligned} 2^p \int_X |f|^p \, d\mu &= \int_X \liminf \left[2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p\right] \, d\mu \\ &\leq \liminf \int_X \left[2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p\right] \, d\mu \\ &= 2^p \int_X |f|^p \, d\mu + \liminf \left\{ - \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \right\}, \end{aligned}$$

es decir,

$$2^p \int_X |f|^p \, d\mu \leq 2^p \int_X |f|^p - \limsup \int_X |f_n - f|^p \, d\mu,$$

por lo tanto

$$\limsup \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \leq 0.$$

Como

$$0 \leq \liminf \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \leq \limsup \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \leq 0,$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

Ahora, si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, entonces de la desigualdad

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p.$$

se sigue el resultado. □

Observación 2.32. *Para $p = \infty$, el Teorema 2.31 es falso. En efecto, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_\infty([0,1])$ definida por $f_n = \chi_{(1/n,1]}$, note que $f_n \to 1$ c.t.p en $[0,1]$. Además,*

$$\|f_n\|_\infty = \text{ínf}\left\{M : \mu\left(\left\{x \in [0,1] : \left|\chi_{(1/n,1]}(x)\right| > M\right\}\right) = 0\right\} = 1$$

y $\|1\|_\infty = 1$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|1\|_\infty$. Pero

$$\|f_n - 1\|_\infty = \sup_{x\in(0,1]} \left|\chi_{(1/n,1]}(x) - 1\right| = 1.$$

2.4. Los espacios l_p

2.4.1. Desigualdad de Hölder y Minkowski versión discreta

En esta sección estudiamos la desigualdad de Hölder y Minkowski para sumas finitas

Lema 2.33 (Desigualdad de Hölder). *Sean p y q números reales con $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$, de modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

para todo x, $y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $\alpha = \dfrac{|x_k|^p}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}}$ y $\beta = \dfrac{|y_k|^q}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}}$.

En virtud del corolario 1.15, resulta

$$\frac{|x_k||y_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q}.$$

Sumando miembro a miembro se tiene que

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k||y_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

y de aquí

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q},$$

que era lo que se quería demostrar. □

Lema 2.34 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea $p \geq 1$, entonces*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

para todo x, $y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p &= \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k+y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{p-1}\end{aligned}$$

En virtud del lema 2.33 se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q},$$

Como $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, entonces $p=(p-1)q$, de donde

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p}\right)^{1/q},$$

así

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Finalmente

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p},$$

que era lo que se quería demostrar. □

2.4.2. El espacio l_p y su norma

l_p con $1 \leq p < \infty$ representará al conjunto de todas las sucesiones de números reales

$$x = (\epsilon_1, \epsilon_2, ...)$$

tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\epsilon_k|^p < \infty.$$

l_p será de utilidad a la hora de introducir los espacios de Sobolev y las series de Fourier en el toro (torus).

Mostremos que l_p es un subespacio del espacio $\mathbb{R}^\infty$. Sea x e y elementos de l_p y α, β números reales, entonces en virtud del lema 2.34 se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha\epsilon_k+\beta\widetilde{\epsilon}_k|^p\right)^{1/p} \leq |\alpha|\left(\sum_{k=1}^{n}|\epsilon_k|^p\right)^{1/p} + |\beta|\left(\sum_{k=1}^{n}|\widetilde{\epsilon}_k|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha\epsilon_k+\beta\widetilde{\epsilon}_k|^p\right)^{1/p} \leq |\alpha|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\epsilon_k|^p\right)^{1/p} + |\beta|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{\epsilon}_k|^p\right)^{1/p}.$$

Por lo tanto

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha\epsilon_k+\beta\widetilde{\epsilon}_k|^p\right)^{1/p} \leq |\alpha|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\epsilon_k|^p\right)^{1/p} + |\beta|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{\epsilon}_k|^p\right)^{1/p}, \quad (2.11)$$

esto último muestra que $\alpha x + \beta y$ es un elemento de l_p y por ende l_p es un subespacio de $\mathbb{R}^\infty$.

Observación 2.35. *El resultado* (2.11) *generaliza la desigualdad de Minkowski.*

Sea $x \in l_p$, tomemos como norma de x la función

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\epsilon_k|^p \right)^{1/p},$$

dejamos como ejercicio demostrar que en efecto esta función define una norma sobre l_p. En consecuencia l_p resulta un espacio normado.

El siguiente resultado nos permite obtener l_p por medio de $L_p(X, \mu)$

Teorema 2.36. *Sea X un conjunto contable y μ la medida de contar sobre X, entonces*

$$L_p(X, \mu) = l_p.$$

Demostración. Sea μ la medida de contar sobre X es decir

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{número de elementos de } E & ,\text{si } E \text{ es un conjunto finito} \\ \\ \infty & ,\text{si } E \text{ es un conjunto infinito} \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $X = \mathbb{Z}^+$, ya que X, dotado de la medida de contar, es isomorfo a $\mathbb{Z}^+$, entonces podemos escribir $\mathbb{Z}^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{k\}$, sea $f \in L_p(\mathbb{Z}^+, \mu)$ y

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} |f(k)|^p \chi_{\{k\}}$$

una sucesión de funciones simples tal que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(k) = |f(k)|^p \quad \text{para cada} \quad k,$$

ahora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}^+} \varphi_n \, d\mu &= \sum_{k=1}^{n} |f(k)|^p \mu\big(\mathbb{Z}^+ \cap \{k\}\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |f(k)|^p \mu\big(\{k\}\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |f(k)|^p, \end{aligned}$$

ya que $\mu\big(\{k\}\big) = 1$.

Claramente $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \ldots$, en virtud del teorema de la convergencia monótona tenemos

$$\int\limits_{\mathbb{Z}^+} |f(k)|^p \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{Z}^+} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(k) \, d\mu$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|^p,$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|^p = \int\limits_{\mathbb{Z}^+} |f(k)|^p \, d\mu.$$

Esto último muestra que $|f|^p$ es integrable si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|^p < \infty.$$

En otras palabras, decir que f pertenece a $L_p(X, \mu)$ dotado de la medida de contar es equivalente a decir que la sucesión $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un miembro de l_p, por lo tanto

$$L_p(X, \mu) = l_p.$$

□

Teorema 2.37. *l_p es un espacio de Banach,* $(1 \leq p < \infty)$.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_p, donde $x_n = (\epsilon_1^{(n)}, \epsilon_2^{(n)}, \ldots)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n,\, m \geq n_0$, entonces $\|x_n - x_m\|_p < \epsilon$, es decir

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\epsilon_j^{(n)} - \epsilon_j^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \epsilon, \quad \text{siempre que} \quad n,\, m \geq n_0, \tag{2.12}$$

de aquí, obtenemos que para todo $j = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\epsilon_j^{(n)} - \epsilon_j^{(m)}| < \epsilon, \quad \text{siempre que} \quad n,\, m \geq n_0, \tag{2.13}$$

escojamos j fijo de (2.13) se ve que $(\epsilon_j^{(1)}, \epsilon_j^{(2)}, \ldots)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo cual existe $\epsilon_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \epsilon_j^{(m)} = \epsilon_j.$$

Definamos $x = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ y mostremos que x está en l_p y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

De (2.12) tenemos que para todo n, $m \geq n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j^{(m)} - \epsilon_j^{(n)}|^p < \epsilon^p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

de aquí

$$\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j - \epsilon_j^{(n)}|^p = \sum_{j=1}^{k} |\lim_{m\to\infty} \epsilon_j^{(m)} - \epsilon_j^{(n)}|^p < \epsilon^p.$$

Siempre que $n \geq n_0$, esto muestra que

$$x - x_n = (\epsilon_j - \epsilon_j^{(n)}) \quad \text{está en} \quad l_p,$$

deduciéndose además que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$, finalmente, en virtud de la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + x - x_n|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x - x_n|^p\right)^{1/p},$$

lo que muestra que x está en l_p y con esto finaliza la demostración □

Observación 2.38. *Recordemos que un espacio métrico y por ende uno normado es separable si contiene un subconjunto denso numerable.*

Teorema 2.39. *l_p es separable* $(1 \leq p < \infty)$.

Demostración. Sea M el conjunto de todas las sucesiones de la forma $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y los $\eta_k \in \mathbb{Q}$, observe que M es contable. A demostrar que M es denso en l_p. Sea $x = (\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en l_p arbitrario, entonces para $\epsilon > 0$ existe n que depende de ϵ de modo que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\epsilon_k|^p < \epsilon^p/2.$$

Ahora, como $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, tenemos que para cada ϵ_k existe un racional η_k tal que

$$|\epsilon_k - \eta_k| < \frac{\epsilon}{\sqrt[p]{2n}},$$

luego

$$|\epsilon_k - n_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2n},$$

así

$$\sum_{k=1}^{n} |\epsilon_k - n_k|^p < \epsilon^p/2.$$

entonces

$$\|x-y\|^p = \sum_{k=1}^{n} |\epsilon_k - n_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\epsilon_k|^p < \epsilon^p,$$

por lo cual

$$\|x-y\| < \epsilon.$$

Mostrándose así que M es denso en l_p, luego resulta l_p separable. $\square$

El siguiente resultado nos muestra una profunda diferencia entre L_p y l_p. El ejemplo 2.15 demuestra que $\mathscr{L}_q(\mu) \subsetneq \mathscr{L}_p(\mu)$ con $1 \leq p \leq q < \infty$ y $\mu(X) < \infty$, sin embargo tenemos que $l_p \subset l_q$ con $0 < p < q < \infty$. Es importante aclarar que este último resultado no contradice el ejemplo 2.15 dado que $\mathbb{Z}^+$ con la medida de contar no tiene medida finita.

Teorema 2.40. *Si* $0 < p < q < \infty$, *entonces* $l_p \subset l_q$.

Demostración. Sea $x \in l_p$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n|^p < \infty$, en virtud de esto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|\epsilon_n| < 1$.

Ahora, como $0 < p < q$, entonces $0 < q - p$, así $|\epsilon_n|^{q-p} < 1$ si $n > n_0$, por lo cual

$$|\epsilon_n|^q < |\epsilon_n|^p \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

Sea $M = \text{máx}\{|\epsilon_1|^{q-p}, |\epsilon_2|^{q-p}, \ldots, |\epsilon_{n_0}|^{q-p}, 1\}$, luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n|^q &= \sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n|^p |\epsilon_n|^{q-p} \\ &< M \sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n|^p < +\infty,\end{aligned}$$

por lo tanto $x \in l_q$. $\square$

Observación 2.41. *La inclusión $l_p \subset l_q$ es propia, en efecto, sea $x_n = n^{-1/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq p < q \leq \infty$, luego puesto que $p < q$, entonces $\frac{q}{p} > 1$, ahora consideremos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}} < \infty.$$

La última serie es convergente en virtud del criterio de las series p, así $x_n \in l_q$, por otra parte

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty, \quad \text{(Serie armónica)}$$

por lo tanto $x_n \notin l_p$.

2.4.3. Desigualdad de Hardy en l_p

Teorema 2.42 (Desigualdad de Hardy)**.** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

Demostración. Sea $\alpha_n = \frac{A_n}{n}$ donde $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, luego

$$A_n = n\alpha_n,$$

así

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\alpha_n, \tag{2.14}$$

de donde

$$a_n = n\alpha_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

por (2.14)

$$a_n = n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}.$$

Consideremos ahora

$$\begin{aligned} \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1} a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \left[n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1} \right] \alpha_n^{p-1} \\ &= \alpha_n^p - \frac{pn}{p-1}\alpha_n \alpha_n^{p-1} + \frac{p(n-1)}{p-1}\alpha_{n-1}\alpha_n^{p-1}. \end{aligned}$$

En virtud del corolario 1.15 resulta

$$\begin{aligned}\frac{p(n-1)}{p-1}\alpha_{n-1}\alpha_n^{p-1} &\le \frac{p(n-1)}{p-1}\frac{\alpha_{n-1}^p}{p} + \frac{p(n-1)}{p-1}\frac{\alpha_n^{q(p-1)}}{q}\\ &= \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p + \frac{p(n-1)}{p-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)\alpha_n^p\\ &= \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p + (n-1)\alpha_n^p,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n &\le \alpha_n^p - \frac{pn}{p-1}\alpha_n^p + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p + (n-1)\alpha_n^p\\ &= \frac{p\alpha_n^p - \alpha_n^p - pn\alpha_n^p}{p-1} + \frac{(n-1)\alpha_{n-1}^p + (p-1)(n-1)\alpha_n^p}{p-1}\\ &= \frac{p\alpha_n^p - \alpha_n^p - pn\alpha_n^p + (n-1)\alpha_{n-1}^p + (pn-p-n+1)\alpha_n^p}{p-1}\\ &= \frac{1}{p-1}\left[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right],\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N \alpha_n^{p-1}a_n &\le \frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^N \left[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right]\\ &= \frac{1}{p-1}\left[-\alpha_1^p + \alpha_1^p - 2\alpha_2^p + \cdots - N\alpha_N^p\right]\\ &= -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \le 0.\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^p \le \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N \alpha_n^{p-1}a_n.$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^p &\le \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^p\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

luego

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p.$$

$\square$

2.4.4. Desigualdad de Hilbert en l_p

Recordemos algunos resultados básicos de análisis complejo.

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right). \tag{2.15}$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[p]{z}(z+1)} \qquad (p>1)$$

definida en la región $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Queremos obtener su desarrollo en términos de la serie de Laurent. En efecto, si $|z|<1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\end{aligned}$$

luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-\frac{1}{p}}. \tag{2.16}$$

En este mismo orden de ideas, consideremos

$$g(z) = \frac{1}{z^{1+\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{z}\right)}$$

definida en la región $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, dado que $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1-\frac{1}{p}}. \tag{2.17}$$

Proposición 2.43. *Para cada número positivo m y para cada número real $p > 1$ se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}(m+n)} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}(m+n)} &\leq \int_0^{\infty}\frac{m^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}(m+x)}\,dx \\ &= \int_0^{\infty}\frac{dz}{z^{\frac{1}{p}}(1+z)} \\ &= \int_0^{1}\frac{dz}{z^{\frac{1}{p}}(1+z)} + \int_1^{\infty}\frac{dz}{z^{1+\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{z}\right)}.\end{aligned}$$

En virtud de (2.16) y (2.17) se deduce que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}(m+n)} &\leq \int_0^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-\frac{1}{p}}\right)dz + \int_1^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1-\frac{1}{p}}\right)dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 z^{n-\frac{1}{p}}\,dz + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_1^{\infty} z^{-n-1-\frac{1}{p}}\,dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{p}+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}+n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}-n} + p + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}+n} \\ &= p + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\frac{1}{p}-n} + \frac{1}{\frac{1}{p}+n}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Esto último se obtuvo de (2.15) con $z = \frac{1}{p}$. □

Teorema 2.44 (Desigualdad de Hilbert). *Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números no negativos tales que $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q$ son convergentes. Entonces*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración. En virtud de la desigualdad de Hölder y de la proposición anterior resulta

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{pq}}}{n^{\frac{1}{pq}}} \frac{a_m}{(m+n)^{\frac{1}{p}}} \frac{n^{\frac{1}{pq}}}{m^{\frac{1}{pq}}} \frac{b_n}{(m+n)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{m^{\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{q}}(m+n)}\right) a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{1}{p}}(m+n)}\right) b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{q}}(m+n)}\right) a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{1}{p}}(m+n)}\right) b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{q}} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Así hemos demostrado que

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

2.4.5. El espacio l_∞

l_∞ representará al conjunto de todas las sucesiones reales $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotadas, es claro que l_∞ es un espacio vectorial. Como norma de $x \in l_\infty$, $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ tomaremos

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|,$$

resultando así l_∞ un espacio normado.

Teorema 2.45. *l_∞ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_∞, donde $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que si

$$m, n \geq n_0, \quad \text{entonces} \quad \|x_m - x_n\|_\infty < \varepsilon,$$

luego para j fijo tenemos que si $m, n \geq n_0$, entonces

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \tag{2.18}$$

así, resulta que para todo j fijo la sucesión $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo cual existe $\xi_j \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{m\to\infty} \xi_j^{(m)} = \xi_j$.

Definamos $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, ahora queremos demostrar que $x \in l_\infty$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

De (2.18) tenemos que si $n \geq n_0$, entonces

$$\left|\xi_j - \xi_j^{(n)}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon, \tag{2.19}$$

puesto que $x_n = \left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, existe un número real M_n tal que $\left|\xi_j^{(n)}\right| \leq M_n$ para todo j.

Por la desigualdad triangular tenemos

$$|\xi_j| \leq \left|\xi_j - \xi_j^{(n)}\right| + \left|\xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon + M_n$$

siempre que $n \geq n_0$, esta desigualdad se mantiene para cualquier j, además, observe que el lado derecho no depende de j, por lo tanto $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales acotada, esto implica que $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_\infty$.

De (2.19) también obtenemos

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right| < \varepsilon.$$

siempre que $n \geq n_0$. De esto último concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

y así l_∞ es completo. $\square$

El siguiente resultado nos muestra una manera "natural"de introducir la norma en el espacio l_∞.

Teorema 2.46. $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, *donde*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Observe que $|x_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, así

$$|x_k| \leq \|x\|_p$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, de donde

$$\sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \|x\|_p,$$

luego

$$\|x\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|x\|_p. \tag{2.20}$$

Por otra parte, note que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{1\leq k\leq n} |x_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty,$$

luego

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty,$$

así

$$\limsup_{p\to\infty} |x\|_p \leq \left(\limsup_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}}\right) \|x\|_\infty = \|x\|_\infty,$$

es decir

$$\limsup_{p\to\infty} |x\|_p \leq \|x\|_\infty. \tag{2.21}$$

Combinando (2.20) y (2.21) resulta

$$\|x\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \limsup_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \|x\|_\infty,$$

de esto último se concluye que

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

□

Ejercicios

1. Si $f \in L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\mu(X) < \infty$. Demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2. Demuestre que las siguientes funciones:

   a) $f(x) = e^x$ para todo $x \in [0, 1]$.
   b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para todo $x \in [1, +\infty)$.
   c) $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ $(\lambda > 0)$.
   d) $f(x) = x^n$ para todo $x \in [0, a]$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^+$.
   e) $f(x) = 1 - e^{-x}$ para todo $x \in [0, 1]$.

   Son esencialmente acotadas. Hallar su norma esencial.

3. En todos los casos anteriores demuestre que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

4. Dada $f(x) = -\ln(1 - x)$ para todo $x \in [0, 1)$. Demuestre que $f \notin L_\infty([0, 1), \mathcal{L}, m)$ pero $f \in L_p([0, 1], \mathcal{L}, m)$ con $1 \leq p < \infty$.

5. Demuestre que el resultado del problema 1 es falso si $\mu(X) = +\infty$.

6. Sea $f \in L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $\|f\|_\infty > 0$. Si $0 < \mu(X) < \infty$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty$$

   donde

$$\alpha_n = \int_X |f|^n \, d\mu, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

7. Sea $I=[0,1]$, sea $f\in L_1(I,\mathcal{L},m)$ y $S=\{x\in I: f(x)\in\mathbb{Z}\}$. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty}\int_I |\cos\pi f(x)|^n\,dm = m(S).$$

8. Sea $f\in L_p(X,\mathcal{A},\mu)$ con $\mu(X)=1$ y $p>0$. Demostrar que
$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p = e^{\int_X \ln(f)\,d\mu}.$$

9. Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida y $f\in L_p(\mu)$ $(1\le p<\infty)$. Supongamos que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles tal que $\mu(E_n)=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{p-1}{p}}\int_{E_n}|f|\,d\mu = 0.$$

10. Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X)<\infty$ y f una función positiva $\mathcal{A}$-medible. Si $\lim_{n\to\infty}\int_X f^n\,d\mu<\infty$, demostrar que
$$\lim_{n\to\infty}\int_X f^n\,d\mu = \mu\left(\{x\in X: f(x)=1\}\right).$$

11. Sea $f\in L_{p_0}(X,\mathcal{A},\mu)$ para algún $0<p_0<\infty$. Demostrar que
$$\lim_{p\to 0}\int_X |f|^p\,d\mu = \mu\left(\{x\in X: f(x)\neq 0\}\right).$$

12. Sea $u,v\in L_4(X,\mathcal{A},\mu)$ y $w\in L_2(X,\mathcal{A},\mu)$. Demostrar que
$$\left|\int_X uvw\,d\mu\right| \le \left(\int_X |u|^4\,d\mu\right)^{1/4}\left(\int_X |v|^4\,d\mu\right)^{1/4}\left(\int_X |w|^2\,d\mu\right)^{1/2}.$$

13. Sea $p>1$ y $f\in L_p\left([1,+\infty),\mathcal{L},m\right)$. Defina $g(x)=\int_1^\infty f(t)e^{-tx}\,dt$. Demostrar

    a) $g\in L_1\left([1,+\infty),\mathcal{L},m\right)$.

    b) $\|g\|_1 \le \left(1-\frac{1}{p}\right)^{1/q}\|f\|_p$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

14. Para $1\le p<\infty$ y $0<\mu(X)<\infty$ se define
$$N_p(f)=\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

    Demostrar que

a) Si $p_1 < p_2$ entonces $N_{p_1}(f) \leq N_{p_2}(f)$.

b) $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

c) $\frac{1}{\mu(X)} \int_X |fg| \, d\mu \leq N_p(f) N_q(g)$ con $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

d) $\lim_{p\to\infty} N_p(f) = \|f\|_\infty$.

15. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sean f y g funciones $\mathcal{A}$-medibles y positivas sobre X. Sean $0 < t < r < m < \infty$. Si $\int_X fg^t \, d\mu < \infty$ y $\int_X fg^m \, d\mu < \infty$, demostrar que

$$\left(\int_X fg^r \, d\mu\right)^{m-t} \leq \left(\int_X fg^t \, d\mu\right)^{m-r} \left(\int_X fg^m \, d\mu\right)^{r-t}.$$

Nota. Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Rogers.

16. Si $\int_X f \, d\mu < \infty$ y $\int_X fg^m \, d\mu < \infty$ para $m > 1$. Demostrar que

$$\left(\int_X fg \, d\mu\right)^{m} \leq \left(\int_X f \, d\mu\right)^{m-1} \left(\int_X fg^m \, d\mu\right).$$

17. Usar el problema 13 para dar una demostración alternativa del corolario 2.24.

18. Demostrar el corolario 2.25.

19. Sea h una función creciente en $(0, +\infty)$. Si $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta \geq 0$, demostrar que

$$\left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t) \, dt\right)^\alpha \leq \alpha\beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha p-1} [h(t)]^\alpha \, dt.$$

20. Si f es una función no negativa y decreciente en $(0, +\infty)$ para $p \geq 1$. Demostrar que

$$\int_0^\infty (f(x))^p \; dx^p \leq \left(\int_0^\infty f(x) \, dx\right)^p.$$

21. Sea $f \in L_1(\mu)$. Demostrar que

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) \leq 2e^{-\lambda^2/2}\lambda \int_X \cosh\left(\frac{\lambda}{2} f\right) \, d\mu.$$

22. Sean $0 < \alpha < 1$, $b > 1$ y $m > 1$. Demuestre que

a) $|a^{-m} - b^{-m}| \leq m|b-a|^{\alpha} \max\{a^{-\alpha-m}, b^{-\alpha-m}\}$.
b) $|x-y|^p \leq |x^p - y^p|$ para $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $1 \leq p < \infty$.
c) $|\ln b - \ln a| \leq \frac{1}{\alpha}|b-a|^{\alpha} \max\{a^{-\alpha}, b^{-\alpha}\}$.
d) $||b|^p - |a|^p| \leq p|b-a| \max\{|b|^{p-1}, |a|^{p-1}\}$ $(1 \leq p < \infty)$.

23. Para $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

a) $\|f\|_p = \inf\left\{\lambda \geq 0 : \int_X \left|\frac{|f|}{\lambda}\right|^p dm \leq 1\right\}$.
b) $a)$ define una norma en L_p.

24. Sea $E = \{p \in (0,\infty) : \|f\|_p < \infty\}$. Demuestre que E es un intervalo.

25. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales en $L_{4/3}\left((0,1), \mathcal{L}, m\right)$ tal que $f_n \to 0$ en medida $(n \to \infty)$ y $\int_{(0,1)} |f_n(x)|^{4/3}\, dx \leq 1$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} |f_n(x)|\, dx = 0.$$

26. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. Demostrar que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

27. Demostrar que si $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, entonces

$$\frac{f}{\|f\|_p} = \frac{g}{\|g\|_p} \qquad \text{c.t.p.}$$

28. Sea $f_n \to f$ en L_p $1 \leq p < \infty$ y sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $|g_n| \leq M$ $\forall\ n$ y $g_n \to g$ c.t.p. Demostrar que

$$g_n f_n \to gf \quad \text{en } L_p.$$

29. Utilizar el corolario 1.15 para deducir la desigualdad de Hölder.

30. Utilizar el problema 29 para deducir la desigualdad de Minkowski.

31. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Hallar todas las funciones ϕ en $(0, +\infty)$ tal que

$$\phi\left(\lim_{p\to 0} \|f\|_p\right) = \int_X \phi(f)\, d\mu.$$

32. Sean $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $f \in L_p(\mu)$ y $g \in L_q(\mu)$, demostrar que $fg \in L_r(\mu)$ y
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

33. Si $0 < p < q$ y $\mu(X) = 1$, demostrar que
$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

34. Use el Corolario 1.12 para demostrar el Teorema 2.22 (Desigualdad de Hölder).

35. La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que tiene p-variación acotada si
$$V_p(f, [a, b]) = \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|^{p-1}} < +\infty,$$
con $1 < p < \infty$, donde el supremo se toma sobre todas las particiones de $[a, b]$. El conjunto de todas las funciones con p-variación se denota por $BV_p([a, b])$. Si $f \in BV_p([a, b])$ demostrar que $f' \in L_p([a, b], \mathcal{L}, m)$ y además
$$V_p(f, [a, b]) = \|f'\|_p.$$

36. (a) Sea $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L_p(\Omega)$ y supongamos que hay una constante C tal que $\|f\|_p \leq C$, $\forall\ 1 \leqslant p < \infty$. Demuestre que $f \in L_\infty(\Omega)$.
(b) Dé un ejemplo de una función f tal que $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L_p(\Omega)$ pero $f \notin L_\infty(\Omega)$.

37. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesiones de números reales tales que $k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_m|^p < \infty$ $(p > 1)$. Sea $C_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m} b_m$. Demostrar que

    a) $|C_n| \leq k^{1/q} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_{n-m}||b_m|^p\right)^{1/p}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

    b) $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^p\right)^{1/p} \leq k \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^p\right)^{1/p}$.

38. Si $a_n > 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

39. Si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ y $\alpha \geq \beta > 0$. Demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta}\right)^{1/\beta}.$$

40. Demostrar que l_∞ no es separable.

2.5. Aproximaciones en $L_p(\mu)$

Sea (X, d) un espacio métrico, recordemos que un subconjunto D de X, $D \subset X$ es denso en X si $\overline{D} = X$, es decir dado $x \in X$, para todo $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $d(x, d) < \epsilon$.

En otro orden de ideas, sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Que una función simple s se anule fuera de un conjunto de medida finita significa que

$$\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Ahora, supongamos que $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$ donde $\alpha_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$ y $E_k \in \mathcal{A}$. Si s se anula fuera de un conjunto de medida finita, entonces $\mu(E_k) < \infty$ para $1 \leq k \leq n$, luego

$$\|s\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p \mu(E_k).$$

Así, $s \in L_p(\mu)$ si y sólo si s se anula fuera de un conjunto de medida finita.

Lema 2.47. *Para $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones simples $\mathcal{A}$-medibles las cuales se anulan fuera de un conjunto de medida finita es denso en $L_p(\mu)$.*

Demostración. Sea $1 \leq p < \infty$ y $f \in L_p(\mu)$, queremos demostrar que dado $\epsilon > 0$ existe una función s simple, $\mathcal{A}$-medible la cual se anula fuera de un conjunto de medida finita tal que $\|f - s\|_p < \epsilon$. Para ello consideremos dos casos:

Caso 1 $f \geq 0$. Sabemos que existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples no negativas y $\mathcal{A}$-medibles tal que $s_n \to f$ puntualmente en X, dado que $0 \leq s_n \leq f$ para todo n y $f \in L_p(\mu)$ se tiene que $s_n \in L_p(\mu)$, esto significa que cada s_n se anula fuera de un conjunto de medida finita, ahora, observe que

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - f|^p = 0 \text{ en } X$$

y

$$|s_n - f|^p \leq (|s_n| + |f|)^p \leq (2|f|)^p = 2^p|f|^p,$$

dado que $f \in L_p(\mu)$, entonces $2^p f^p \in L_1(\mu)$. En virtud del Teorema de la convergencia dominada tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |s_n - f|^p \, d\mu = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p^p = 0,$$

luego, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|s_n - f\|_p^p < \epsilon^p, \quad \text{si } n \geq n_0$$

ahora escogemos $s = s_{n_0}$, entonces

$$\|s - f\| < \epsilon.$$

Caso 2 f $\mathcal{A}$-medible, entonces $f = f^+ - f^-$ donde f^+ y f^- son funciones no negativas $\mathcal{A}$-medibles. Por el caso 1 existen funciones simples s_1 y s_2 no negativas $\mathcal{A}$-medibles las cuales se anulan fuera de un conjunto de medida finita tal que

$$\|f^+ - s_1\|_p < \epsilon/2 \quad \text{y} \quad \|f^- - s_2\| < \epsilon/2.$$

Sea $s = s_1 - s_2$, note que s es una función simple, $\mathcal{A}$-medible, la cual se anula fuera de un conjunto de medida finita. Finalmente, por la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned} \|f - s\|_p &= \|(f^+ - s_1) - (f^- - s_2)\|_p \\ &\leq \|f^+ - s_1\|_p + \|f^- - s_2\|_p \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 2.48. *El conjunto de las funciones simples es denso en $L_\infty(\mu)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $f \in L_\infty(\mu)$, entonces $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p en X, así existe $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = 0$ y $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \in X \setminus E$. Definamos

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \setminus E; \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Entonces, $|\overline{f}(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \in X$, luego existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $t_n \to \overline{f}$ uniformemente en X, así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_n(x) - \overline{f}(x)| < \epsilon/2 \ \forall x \in X, \quad \text{si } n \geq n_0$$

luego,

$$|t_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon/2 \ \forall x \in X \setminus E,$$

esto significa que con $s = t_{n_0}$

$$\|s - f\|_\infty \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

□

Sea (X, d) un espacio métrico y $E \subset X$, definamos

$$d(x, E) = \text{ínf}\{d(x, e) : e \in E\}.$$

De cursos anteriores sabemos que:

I) $d(x, E) = 0$ si sólo si $x \in E$.

II) $d(\cdot, E) : X \to \mathbb{R}^+$ es continua en X.

Lema 2.49 (Lema de Urysohn)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea F un conjunto cerrado en X y V un conjunto abierto en X tal que $F \subset V$. Entonces, existe $g : X \to [0, 1]$ tal que g es continua en X, $g(x) = 1$ para todo $x \in F$ y $g(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus V$.*

Demostración. Para $x \in X$, definamos

$$g(x) = \frac{d(x, X \setminus V)}{d(x, F) + d(x, X \setminus V)}.$$

En virtud de II) es claro que g es continua en X.
Si $x \in F$, entonces $g(x) = \frac{d(x,X\setminus V)}{0+d(x,X\setminus V)} = 1$.
Si $x \in X \setminus V$, entonces $d(x, X \setminus V) = 0$, así $g(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus V$.

Ahora, dado que $d(x, X \setminus V) \geq 0$ y $d(x, F) \geq 0$ podemos ver que

$$0 \leq g(x) \leq 1.$$

Con esto finaliza la demostración. □

Observación 2.50. *El lema de Urysohn también es válido para espacios topológicos.*

Teorema 2.51. *Sea $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ con $1 \leq p < \infty$, para todo $\epsilon > 0$, existe una función continua $g \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$.*

Demostración. **Caso 1** Sea $f = \chi_E$, entonces $E \in \mathcal{L}$ y $m(E) < \infty$, por lo tanto podemos hallar un conjunto F cerrado y un conjunto V abierto tal que $F \subset E \subset V$ y $m(V \setminus F) < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$. Consideremos ahora g definida como en el Lema anterior, entonces g es continua en $\mathbb{R}$, $g = 1$ en F y $g = 0$ en $X \setminus V$. Por otra parte,

$$\{x : g(x) \neq f(x)\} \subset V \setminus F,$$

en efecto, si $x_0 \notin V \setminus F$, entonces $x_0 \in (V \setminus F)^c$, así $x_0 \in V^c \cup F$, luego si $x \in V^c$, entonces $f(x_0) = g(x_0) = 0$, lo que significa que $x_0 \notin \{x : g(x) \neq f(x)\}$, de esta manera hemos exhibido que

$$\{x : g(x) \neq f(x)\} \subset V \setminus F.$$

Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g|^p \, dm \leq \int_{V \setminus F} |f - g|^p \, dm.$$

Pero $|f - g| \leq 2$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f - g|^p \, dm &\leq 2^p \int_{V \setminus F} dm \\ &= 2^p m(V \setminus F) \\ &< 2^p \frac{\epsilon^p}{2^p}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Demostrándose así el caso 1.

Caso 2 Sea f una función simple $\mathcal{A}$-medible, la cual se anula fuera de un conjunto de medida finita, sea

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}, \text{ donde } \alpha_k \neq 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n$$

y $m_(E_k) < \infty$, $E_k \in \mathcal{A}$.
Por el caso 1, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe una función continua g_k tal que

$$\|\chi_{E_k} - g_k\|_p < \frac{\epsilon}{n|\alpha_k|}.$$

Note que $g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y además en virtud de la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|g - f\|_p &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (g_k - \chi_{E_k}) \right\|_p \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \|g_k - \chi_{E_k}\|_p \\
&< \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \frac{\epsilon}{n|\alpha_k|} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Demostrándose así el caso 2.

Caso 3 Sea f una función arbitraria. En virtud del Lema 1 existe una función s simple la cual se anula fuera de un conjunto de medida finita tal que

$$\|f - s\|_p < \epsilon/2,$$

por el caso 2 existe una función continua g tal que

$$\|s - g\|_p < \epsilon/2.$$

Entonces,

$$\|f - g\|_p \leq \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < \epsilon.$$

Esto último significa que $(f - g) \in L_p$.

Con esto finaliza la demostración.

□

Observación 2.52. *El Teorema 2.51 no es cierto para* $p = \infty$*. Para ver esto, consideremos el siguiente ejemplo. Sea* $0 < \epsilon < 1/2$ *y* $f = \chi_{(a,b)}$ *con* $a < b$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*. Supongamos que existe una función continua* g *tal que* $\|f - g\|_\infty < \epsilon$*, de aquí obtenemos que* $|\chi_{(a,b)}(x) - g(x)| < \epsilon$ *c.t.p. Ahora, para cada* $\delta > 0$ *podemos hallar* $x_0 \in (a, a + \delta)$ *y* $x_1 \in (a - \delta, a)$ *tal que*

$$|\chi_{(a,b)}(x_0) - g(x_0)| < \epsilon$$

y

$$|\chi_{(a,b)}(x_1) - g(x_1)| < \epsilon,$$

es decir,

$$|1 - g(x_0)| < \epsilon \quad y \quad |g(x_1)| < \epsilon. \tag{2.22}$$

Como g es continua en a, entonces

$$g(a+) = g(a) = g(a-). \tag{2.23}$$

De la definición de $g(a+)$ y $g(a-)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &|g(x) - g(a+)| < \epsilon \quad si\ a < x < a + \delta \quad y \\ &|g(x) - g(a-)| < \epsilon/2 \quad si\ a - \delta < x < a. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Para este $\delta > 0$, en virtud de (2.22) tenemos

$$1 - \epsilon < g(x_0) < 1 + \epsilon/2$$

y

$$-\epsilon/2 < g(x_1) < \epsilon/2. \tag{2.25}$$

Por (2.24),

$$|g(x_0) - g(a+)| < \epsilon/2$$

y

$$|g(x_1) - g(a-)| < \epsilon/2.$$

Por (2.25),

$$\begin{aligned} g(a+) &> g(x_0) - \epsilon/2 \\ &> 1 - \epsilon/2 - \epsilon/2 \\ &= 1 - \epsilon \\ &> 1/2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(a-) &< g(x_1) + \epsilon/2 \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \\ &< 1/2, \end{aligned}$$

esto significa que $g(a+) \neq g(a-)$, lo cual contradice (2.23), por lo cual tal g no existe.

Definición 2.53. *Una función escalonada es una función de la forma*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$$

donde $\alpha_k \neq 0$, $1 \leq k \leq n$ *y cada* I_k *es un intervalo acotado.*

Observación 2.54. *Observe que cada función escalonada se anula fuera de un conjunto de medida finita. Así, cada función escalonada es un miembro de* $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$*. Además, el conjunto de todas las funciones escalonadas forman un subespacio vectorial de* $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m)$*.*

Teorema 2.55. *El conjunto de todas las funciones escalonadas es denso en* $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ *para* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración. Sea $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ y $\epsilon > 0$.

Caso 1 $f = \chi_E$, entonces $E \in \mathcal{L}$, como $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, se tiene $m(E) < \infty$, de esto último, podemos concluir que existe una unión finita de intervalos abiertos y disjuntos, digamos I tal que $m(E \triangle I) < \epsilon^p$, sea $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, escojamos $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k} = \chi_I$, luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi|^p \, dm &= \int_{\mathbb{R}} |\chi_E - \chi_I|^p \, dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\chi_{E \triangle I}|^p \, dm \\ &= m(E \triangle I) \\ &< \epsilon,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\|f - \varphi\|_p < \epsilon.$$

De esta manera queda demostrado el caso 1.

Caso 2 $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$ donde $\alpha_k \neq 0$ para todo k y $m(E_k) < \infty$. Por el caso 1 existe una función escalonada φ_k tal que

$$\|\chi_{E_k} - \varphi_k\|_p < \frac{\epsilon}{n|\alpha_k|}.$$

Note que

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

es una función escalonada y

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_p &= \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\chi_{E_k} - \varphi_k) \|_p \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \|\chi_{E_k} - \varphi_k\|_p < \epsilon, \end{aligned}$$

demostrándose así el caso 2.

Caso 3 Sea f una función arbitraria, en virtud del Lema 2.48 existe una función simple s que se anula fuera de un conjunto de medida finita tal que

$$\|f - s\|_p < \epsilon/2,$$

por el caso 2 podemos hallar una función escalonada φ tal que

$$\|s - \varphi\|_p < \epsilon/2.$$

Finalmente,

$$\|f - \varphi\|_p < \epsilon.$$

□

Teorema 2.56. *$L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Definamos

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{J_k} : n \in \mathbb{N}, b_k \in \mathbb{Q} \right\},$$

donde J_k es un intervalo finito con puntos extremos racionales $1 \leq k \leq n$. Sea $\epsilon > 0$ y $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, entonces existe una función escalonada

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k}$$

tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k} - f \right\|_p < \epsilon/2.$$

Ahora, sea $\delta > 0$, para todo $1 \leq k \leq n$, escojamos $b_k \in \mathbb{Q}$ tal que $|b_k - a_k| < \delta/2$ y J_k un intervalo con extremos racionales de modo que $I_k \subset J_k$ con $m(J_k \setminus I_k) < \delta/n$.
Entonces, en virtud de la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k} - \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{J_k} \right\|_p \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} (a_k \chi_{I_k} - b_k \chi_{I_k} + b_k \chi_{I_k} - b_k \chi_{J_k}) \right\|_p \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \chi_{I_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\chi_{I_k} - \chi_{J_k}\right) \right\|_p \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \chi_{I_k} \right\|_p + \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\chi_{I_k} - \chi_{J_k}\right) \right\|_p \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \, \|\chi_{I_k}\|_p + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \, \|\chi_{I_k} - \chi_{J_k}\|_p \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \left(m(I_k)\right)^{1/p} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \left(m(J_k \setminus I_k)\right)^{1/p} \\
&< \frac{\delta}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(m(I_k)\right)^{1/p} + \left(\frac{\delta}{2} + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|\right) \delta^{1/p} \\
&= \delta_0,
\end{aligned}$$

dado que $|b_k| \leq |a_k - b_k| + |a_k| \leq \frac{\delta}{2} + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$. Ahora, note que $\delta_0 \to 0$ si $\delta \to 0$, así, podemos escoger δ tal que $\delta_0 < \epsilon/2$. Entonces, invocando una vez más la desigualdad de Minkowski tendremos que

$$\begin{aligned}
&\left\| f - \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{J_k} \right\|_p \\
&\leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k} \right\|_p + \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k} - \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{J_k} \right\|_p \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Finalmente, note que S es un conjunto contable en virtud que

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{q\}$$

es contable. De esta manera hemos demostrado que $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ con $1 \leq p < \infty$ es denso. $\square$

Ejercicios

1. Sea $\Delta = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ una partición finita del intervalo $[a, b]$ y sea $f \in L_p([a, b], \mathcal{L}, m)$ $(p \geq 1)$. La función T_Δ definida por
$$T_\Delta f(\xi_k) = \frac{1}{\xi_k - \xi_{k-1}} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(t)\, dt$$
se llama la Δ-aproximación de f en media. Demostrar que
$$\|T_\Delta f\|_p \leq \|f\|_p.$$

2. Sea $f \in L_p([a, b], \mathcal{L}, m)$ demostrar que $\|T_\Delta f - f\|_p \to 0$ cuando la longitud δ del más grande subintervalo de Δ tiende a cero.

3. Demostrar que $T_\Delta f \xrightarrow{\mu} f$ cuando $\delta \to 0$.

4. Dada $f \in L_p([a, b], \mathcal{L}, m)$ $1 \leq p < \infty$. Demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe una función medible f_M tal que $|f_M| \leq M$ y $\|f - f_M\|_p < \varepsilon$.

5. Sea μ una medida positiva y supongamos que $f, g \in L_p(\mu)$. Demostrar:

   a) Si $0 < p < 1$, entonces
   $$\int_X (|f|^p - |g|^p)\, d\mu \leq \int_X |f - g|^p\, d\mu$$

   b) Si $1 \leq p < \infty$ y $\|f\|_p \leq M$, $\|g\|_p \leq M$, entonces
   $$\int_X ||f|^p - |g|^p|\, d\mu \leq 2pM^{p-1}\|f - g\|_p.$$

6. Si $0 < p < q < r \leq \infty$, demostrar que
$$L_p(X, \mathcal{A}, \mu) \cap L_r(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L_q(X, \mathcal{A}, \mu)$$
donde $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ $(\lambda > 0)$ y además
$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

7. Si $0 < p < q < r \leq \infty$. Demostrar que
$$L_q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L_p(X, \mathcal{A}, \mu) + L_r(X, \mathcal{A}, \mu)$$
es decir cada $f \in L_q(X, \mathcal{A}, \mu)$ es la suma de una función en $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ y de una función en $L_r(X, \mathcal{A}, \mu)$.

8. Sea $1 \leq p < \infty$. Si $g \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ c.t.p. $\forall\ n$. Si $f_n \to f$ c.t.p. demostrar que $f_n \to f$ en $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2.6. Funcionales Lineales y Acotados sobre el Espacio $L_p(\mu)$

Sea X un espacio normado , una función $F : X \to \mathbb{R}$ se llamará un funcional lineal si satisface

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$$

y diremos que F es acotado si existe un número real $M > 0$ tal que

$$\|F(f)\| \leq M\|f\|$$

para toda f de X. La constante M más pequeña para la cual la desigualdad anterior es verdad la llamaremos la norma de f. Esto es,

$$\|F\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|}.$$

Sea g una función fija en $L_q(\mu)$, mostraremos que F dado por

$$F(f) = \int_X fg\,d\mu$$

define un funcional lineal en $L_p(\mu)$. En efecto, sean α y β números reales, f y h elementos de X, entonces

$$\begin{aligned} F(\alpha f + \beta h) &= \int_X (\alpha f + \beta h)g\,d\mu \\ &= \alpha \int_X fg\,d\mu + \beta \int_X hg\,d\mu \\ &= \alpha F(f) + \beta F(h), \end{aligned}$$

además, f es acotada, en efecto

$$|F(f)| = \left|\int_X fg\,d\mu\right| \leq \int_X |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

de aquí se deduce que

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q$$

lo que significa que

$$\|F\| \leq \|g\|_q,$$

esto último muestra que F es acotado. Por otra parte, para $1 < p < \infty$, definamos

$$f = |g^{q-1}| \operatorname{sign}(g),$$

entonces

$$fg = |g|^{q-1} \operatorname{sign}(g) g = |g|^q.$$

Por otra parte,

$$|f| = |g|^{q-1} |\operatorname{sign}(g)|,$$

de donde $|f| = |g|^{q-1}$, entonces $|f|^p = |g|^{p(q-1)}$, así $|f|^p = |g|^q$, ahora bien

$$F(f) = \int_X fg\, d\mu = \int_X |g|^q\, d\mu = \|g\|_q^q,$$

luego

$$\int_X |g|^q\, d\mu = \|g\|_q^q = \|g\|_q^{p(q-1)} = \frac{\|g\|_q^{pq}}{\|g\|_q^p},$$

de donde

$$\|g\|_q^p \int_X |g|^q\, d\mu = \|g\|_q^{pq},$$

por lo tanto

$$\|g\|_q^p \int_X |f|^p\, d\mu = \|g\|_q^{pq},$$

de aquí se obtiene

$$\|g\|_q^q = \|f\|_p \|g\|_q,$$

por lo cual

$$F(f) = \|f\|_p \|g\|_q,$$

así

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_p} \geq \|g\|_q,$$

luego existe $f = |g|^{q-1} \operatorname{sign}(g)$ para el cual

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_p} \geq \|g\|_q,$$

en consecuencia, $\|F\| \geq \|g\|_q$. Por lo tanto la norma alcanza el supremo y

$$\|F\| = \|g\|_q.$$

Ahora, consideremos los casos $p = 1$ y $p = \infty$. Sea $g \in L_1(\mu)$ y $f = \operatorname{sign}(g)$, entonces $\|f\|_\infty = 1$ y

$$\int_X fg\, d\mu = \int_X g \operatorname{sign}(g)\, d\mu = \int_X |g|\, d\mu = \|g\|_1,$$

luego
$$F(f) = \|f\|_\infty \|g\|_1$$
así,
$$\frac{F(f)}{\|f\|_\infty} = \|g\|_1,$$
por lo tanto
$$\|F\| \geq \|g\|_1.$$
La otra desigualdad se obtiene usando la desigualdad de Hölder, por lo cual resulta
$$\|F\| = \|g\|_1.$$
Ahora, si $g \in L_\infty(\mu)]$, entonces para $\epsilon > 0$ dado se tendrá
$$|g| > (\|g\|_\infty - \epsilon),$$
para $f = \operatorname{sign}(g)$ tendremos que
$$fg = g \operatorname{sign}(g) = |g|,$$
luego
$$\int_X fg\, d\mu = \int_X |g|\, d\mu > (\|g\|_\infty - \epsilon) \int_X d\mu$$
esto es,
$$\int_X fg\, d\mu > (\|g\|_\infty - \epsilon)$$
pero
$$\|f\|_1 = \int_X |\operatorname{sign}(g)|\, d\mu = 1,$$
entonces
$$\int_X fg\, d\mu > (\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1,$$
por lo cual
$$\frac{F(f)}{\|f\|_1} > \|g\|_\infty - \epsilon,$$
por la arbitrariedad de ϵ podemos escribir
$$\frac{F(f)}{\|f\|_1} > \|g\|_\infty$$
pero
$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_1} \geq \frac{F(f)}{\|f\|_1},$$

luego

$$\|F\| \geq \|g\|_\infty. \tag{2.26}$$

Por otra parte, $|g| \leq \|g\|_\infty$ c.t.p luego $|fg| \leq |f|\|g\|_\infty$, entonces

$$\int_X |fg|\,d\mu \leq \left(\int_X |f|\,d\mu\right)\|g\|_\infty$$

pero

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leq \int_X |fg|\,d\mu,$$

por lo tanto

$$|F(f)| \leq \left(\int_X |f|\,d\mu\right)\|g\|_\infty,$$

así

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_1} \leq \|g\|_\infty,$$

de aquí obtenemos

$$\|F\| \leq \|g\|_\infty, \tag{2.27}$$

en vista de (2.26) y (2.27) resulta

$$\|F\| = \|g\|_\infty.$$

Así, hemos demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 2.57. *Cada función g de $L_q(\mu)$ define un funcional F lineal y acotado en $L_p[0,1]$ dado por*

$$F(f) = \int_X fg\,d\mu$$

y además, $\|F\| = \|g\|_q$.

Lema 2.58. *Sea g una función integrable en $[0,1]$ y supongamos que existe una constante M tal que*

$$\left|\int_0^1 fg\,d\mu\right| \leq M\|f\|_p$$

para toda función f medible y acotada, entonces $g \in L_q[0,1]$ y $\|g\|_q \leq M$.

Demostración. En primer lugar supongamos que $1 < p < \infty$ y definamos la sucesión de funciones medibles y acotada por

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } |g(x)| \leq n; \\ 0 & \text{si } |g(x)| > n. \end{cases}$$

y definamos

$$f_n = |g_n|^{q-1} \operatorname{sign}(g_n),$$

de aquí

$$|f_n| = |g_n|^{q-1},$$

luego

$$|f_n|^p = |g_n|^{p(q-1)},$$

entonces

$$\|f_n\|_p^p = \|g_n\|_q^q$$

y además, $|f_n|^p = |g|^q$, por otra parte,

$$f_n g_n = g_n |g_n|^{q-1} \operatorname{sign}(g_n) = |g_n|^q$$

pero $f_n g_n = f_n g$, luego

$$\|g_n\|_q^q = \int_0^1 f_n g \, d\mu \leq M \|f_n\|_p = M \|g_n\|_q^{q/p},$$

de aquí

$$\|g_n\|_q^q \leq M \|g_n\|_q^{q/p},$$

entonces

$$\|g_n\|_q^{q - \frac{q}{p}} \leq M$$

pero

$$\frac{qp - q}{p} = \frac{q(p-1)}{p} = \frac{p}{p} = 1,$$

entonces

$$\|g_n\|_q \leq M$$

y

$$\int_0^1 |g_n|^q \, d\mu \leq M^q$$

puesto que

$$\lim_{n \to \infty} |g_n|^q = |g|^q$$

casi en todo $[0,1]$, entonces por el Lema de Fatou

$$\int_0^1 |g|^q \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |g_n|^q \, d\mu \leq M^q,$$

esto significa que $g \in L_q[0,1]$ y además

$$\|g\|_q \leq M.$$

Para el caso $p = 1$, sea $\epsilon > 0$ y consideremos el conjunto

$$E = \{x : |g(x)| \geq M + \epsilon\}$$

y la función $f = \operatorname{sign}(g)\chi_E$, entonces

$$\|f\|_1 = \mu(E),$$

de donde

$$M\mu(E) = M\|f\|_1 \geq \left| \int_0^1 f g \, d\mu \right| \geq (M + \epsilon)\mu(E),$$

de aquí se obtiene que $0 \leq \epsilon\mu(E) \leq 0$, por lo tanto $\mu(E) = 0$, en consecuencia $\|f\|_1 = 0$ y $\|g\|_\infty \leq M$ que era lo que se quería demostrar. □

El Lema anterior puede ser extendido a cualquier espacio de medida finita. En efecto.

Lema 2.59. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sea $g \in L_1(\mu)$ tal que para algún $M > 0$ y para toda función simple s se cumple que*

$$\left| \int_X sg \, d\mu \right| \leq M\|s\|_q$$

$(1 \leq p < \infty)$. *Entonces $g \in L_q(\mu)$ y $\|g\|_q \leq M$, donde q es el índice conjugado de p.*

Demostración. **Caso $p = 1$.** Sea $A = \{x : g(x) > M\}$ y $B = \{x : g(x) < -M\}$. Note que A y B están en $\mathcal{A}$.

Si escogemos $s = \chi_A$, entonces por hipótesis tenemos

$$\left| \int_X \chi_A g \, d\mu \right| \leq M\|\chi_A\|_1,$$

es decir

$$\left|\int_A g\,d\mu\right| \leq M\mu(A) = \int_A M\,d\mu,$$

de donde

$$\int_A (g - M)\,d\mu \leq 0.$$

Como $g > M$ en A, concluimos que $\mu(A) = 0$.

Similarmente, escojamos $s = -\chi_B$, luego podemos demostrar que

$$\mu(B) = 0.$$

Así $\mu(A \cup B) = 0$, lo que significa que

$$|g(x)| \leq M \;\text{ c.t.p } [\mu].$$

Entonces $\|g\|_\infty \leq M$.

De esta forma queda demostrado el Lema para el caso $p = 1$.

Caso $1 < p < \infty$. Dado que $|g|^q > 0$ podemos hallar $\{s_n\}$ una sucesión de funciones simples no negativas tal que $s_n \to |g|^q$ (puntualmente).

Definamos $t_n = s_n^{1/p}(\text{sign}(g))\,(n \in \mathbb{N})$, observe que cada t_n es una función simple y

$$\begin{aligned}\|t_n\| &= \left(\int_X |t_n|^p\,d\mu\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_X s_n\,d\mu\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}gt_n &= s^{1/p} g \text{ sign}(g)\\ &= s_n^{1/p}|g|\\ &\geq s_n^{1/p} s_n^{1/q}\\ &= s_n,\end{aligned}$$

entonces

$$0 \leq \int_X s_n\,d\mu \leq \int_X gt_n\,d\mu \leq M\|t_n\|_p.$$

$$\begin{aligned} \int_X s_n \, d\mu &\leq M \left(\int_X s_n \, d\mu\right)^{1/p} \\ \left(\int_X s_n \, d\mu\right)^{1/q} &\leq M \\ \left(\int_X s_n \, d\mu\right) &\leq M^q. \end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia monótona concluimos que

$$\int_X |g|^q \, d\mu \leq M^q,$$

de donde $g \in L_q(\mu)$ y $\|g\|_q \leq M$

$\square$

Teorema 2.60 (Representación de Riesz)**.** *Sea F un funcional lineal y acotado en $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe una función $g \in L_q[0,1]$ tal que*

$$F(f) = \int_0^1 fg \, d\mu$$

para cualquier $f \in L_p[0,1]$ y además,

$$\|F\| = \|g\|_q.$$

Demostración. Sea χ_S la función característica del intervalo $[0,s]$. Definamos

$$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$$

tal que $\phi(s) = F(\chi_S)$. vamos a demostrar que ϕ es absolutamente continua. Sea $\{S_k, \widehat{S}_k\}_{k=1}^n$ cualquier colección de subintervalos de $[0,1]$ disjuntos tales que

$$\sum_{k=1}^n |\widehat{S}_k - S_k| < \delta,$$

entonces si

$$\alpha_k = \operatorname{sign}\left(\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)\right)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)| &= \sum_{k=1}^{n} \left(\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)\right) sign\left(\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(F(\chi_{\widehat{S}_k}) - F(\chi_{S_k})\right) \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} F(\alpha_k(\chi_{\widehat{S}_k} - \chi_{S_k})) \\
&= F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\chi_{\widehat{S}_k} - \chi_{S_k})\right),
\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)\right| = F(f),$$

de donde

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\chi_{\widehat{S}_k} - \chi_{S_k})$$

por otra parte consideremos

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_0^1 |f|^p \, d\mu \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\chi_{\widehat{S}_k} - \chi_{S_k}\right)\right|^p d\mu \\
&\leq \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \left(\chi_{\widehat{S}_k} - \chi_{S_k}\right)|\right)^p d\mu \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\chi_{\widehat{S}_k} - \chi_{S_k}\right|\right)^p d\mu \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{[S_k, \widehat{S}_k]}\right)^p d\mu \\
&= \int_0^1 \left(\chi_{\bigcup_{k=1}^{n}[S_k, \widehat{S}_k]}\right)^p d\mu
\end{aligned}$$

pues $[S_k, \widehat{S}_k]$ son disjuntos, continuando

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\chi_{\bigcup_{k=1}^n [S_k, \widehat{S}_k]}\right)^p \, d\mu &= \int_0^1 \chi_{\bigcup_{k=1}^n [S_k, \widehat{S}_k]} \, d\mu \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^n [S_k, \widehat{S}_k]\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \mu([S_k, \widehat{S}_k]) \\
&= \sum_{k=1}^n \left|\widehat{S}_k - S_k\right| \\
&< \delta
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\|f\|_p^p < \delta.$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=1}^n |\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)| = F(f) \leq \|F\| \|f\|_p < \|F\| \delta^{1/p},$$

si

$$\delta = \frac{\epsilon^p}{\|f\|^p},$$

entonces

$$\sum_{k=1}^n |\phi(\widehat{S}_k) - \phi(S_k)| < \epsilon$$

siempre que $\|f\|_p^p < \delta$, lo que muestra que ϕ es absolutamente continua en $[0, 1]$. Como toda función absolutamente continua es integrable, entonces existe $g \in [0, 1]$ tal que

$$\phi(s) = \int_0^s g(t) \, d\mu,$$

de aquí se tiene que

$$F(\chi_S) = \int_0^1 g(t) \chi_S(t) \, d\mu.$$

Por otra parte, como toda función escalonada ψ de $[0, 1]$ se puede escribir como

$$\psi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_S,$$

entonces tenemos en particular

$$\begin{aligned}
F(\chi_{S_k}) &= \int_0^1 g\chi_{S_k}\, d\mu \\
c_k F(\chi_{S_k}) &= c_k \int_0^1 g\chi_{S_k}\, d\mu \\
F(c_k\chi_{S_k}) &= \int_0^1 gc_k\chi_{S_k}\, d\mu \\
\sum_{k=1}^{n} F(c_k\chi_{S_k}) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 gc_k\chi_{S_k}\, d\mu \\
F\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{S_k}\right) &= \int_0^1 g \sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{S_k}\, d\mu \\
F(\psi) &= \int_0^1 g\psi\, d\mu.
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos una función f medible y acotada en $[0,1]$, entonces por un teorema conocido de teoría de la medida existe una sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones escalonadas tal que $\psi \to f$ c.t.p, de donde resulta que la sucesión $\{|\psi - f|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y tiende a cero en casi todo $[0,1]$, entonces por el teorema de la convergencia acotada

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - f\|_p = 0$$

y como f es acotada, entonces

$$|F(f) - F(\psi_n)| = |F(f - \psi_n)| \leq \|F\| \|f - \psi_n\|_p,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(\psi_n) = F(f).$$

Por otra parte, existe $M > 0$ tal que

$$|\psi_n| \leq M$$

por ser $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, de donde

$$-gM \leq g\psi_n \leq gM,$$

entonces

$$|g\psi_n| \leq gM \leq M|g|,$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g\psi_n\,d\mu &= \int_0^1 fg\,d\mu\\
\lim_{n\to\infty}F(\psi_n) &= \int_0^1 fg\,d\mu\\
F(f) &= \int_0^1 fg\,d\mu
\end{aligned}$$

para cada función f medible acotada, puesto que

$$|F(f)| \leq \|F\|\|f\|_p$$

es decir,

$$\left|\int_0^1 fg\,d\mu\right| \leq \|F\|\|f\|_p,$$

entonces por el Lema 2.58 $g \in L_q[0,1]$ y

$$\|g\|_q \leq \|F\|.$$

Ahora tenemos solamente que mostrar que

$$F(f) = \int_0^1 fg\,d\mu$$

para cada $f \in L_p[0,1]$. Sea f una función arbitraria de $L_p[0,1]$. En virtud del Teorema 2.55 para cada $\epsilon > 0$ existe una función escalonada φ tal que

$$\|f-\psi\|_p < \epsilon.$$

Puesto que ψ es acotada, tenemos entonces que

$$F(\psi) = \int_0^1 \psi g\,d\mu,$$

luego

$$\begin{aligned}
\left|F(f) - \int_0^1 fg\,d\mu\right| &= \left|F(f) - F(\psi) + F(\psi) - \int_0^1 fg\,d\mu\right|\\
&\leq |F(f)-F(\psi)| + \left|F(\psi) - \int_0^1 fg\,d\mu\right|\\
&= |F(f-\psi)| + \left|\int_0^1 (\psi - f)g\,d\mu\right|\\
&\leq \|F\|\|f-\psi\|_p + \|g\|_q\|f-\psi\|_p\\
&< (\|F\| + \|g\|_q)\,\epsilon,
\end{aligned}$$

por la arbitrariedad de ϵ resulta

$$F(f) = \int_0^1 fg\, d\mu.$$

La igualdad $\|F\| = \|g\|_q$ se sigue del Teorema 2.57. □

El Teorema 2.60 puede ser extendido a un espacio de medida σ-finita. En efecto

Teorema 2.61 (Representación de Riesz). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio σ-finito y T un funcional lineal en $L_p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$. Entonces existe un único $g \in L_q(\mu)$ tal que*

$$T(f) = \int_X fg\, d\mu \tag{2.28}$$

para toda $f \in L_p(\mu)$ y además

$$\|T\| = \|g\|_q. \tag{2.29}$$

Como siempre q es el índice conjugado de p.

Demostración. En primer lugar demostremos la unicidad de g. Supongamos que existen g_1 y g_2 en $L_q(\mu)$ tal que satisfacen (2.28), dado que μ es σ-finita, podemos hallar una sucesión de conjuntos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ disjuntos tal que

$$\mu(X_n) < \infty \;\; \forall n \;\; \text{y} \;\; X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

es decir

$$\int_E g_1\, d\mu = \int_E g_2\, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$. Luego

$$\int_{X_n\cap A} g_1\, d\mu = \int_{X_n\cap A} g_2\, d\mu,$$

así

$$\int_{X_n\cap A} (g_1 - g_2)\, d\mu = 0,$$

pero $g_1 > g_2$ en $X_n \cap A$, lo que significa que

$$\mu(X_n \cap A) = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n) = 0.$$

Similarmente $\mu(B) = 0$, por lo tanto

$$g_1 = g_2 \text{ c.t.p } [\mu].$$

Esto demuestra la unicidad.

A demostrar la existencia de g.

- Caso 1. $\mu(X) < \infty$, luego para cada $E \in \mathcal{A}$ definamos $\nu(E) = T(\chi_E)$.

  Note que $\mu(X) < \infty$ implica que $\mu(E) < \infty$. Así

  $$\chi_E \in L_p(\mu).$$

  A demostrar que ν es una medida con signo en $\mathcal{A}$. Claramente χ_ϕ es la función cero en $L_p(\mu)$, entonces

  $$\nu(\phi) = T(\chi_\phi) = 0.$$

  Note que T es una función real, entonces ν también es una función real. En este mismo orden de ideas, escojamos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos. Ahora, definamos

  $$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad A_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

  entonces

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E,$$

  obsérvese que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, por inducción es fácil demostrar que

  $$\chi_{A_n} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}.$$

  De la linealidad de T, se tiene que

  $$T(\chi_{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} T(\chi_{E_k}),$$

es decir

$$T(\chi_{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k).$$

A demostrar que $\chi_{A_n} \to \chi_E$ en $L_p(\mu)$. Para ello consideremos

$$\begin{aligned}
\|\chi_{A_n} - \chi_E\|_p^p &= \int_X |\chi_{A_n} - \chi_E|^p \, d\mu \\
&= \int_X \chi_{E\setminus A_n} \, d\mu \\
&= \mu(E \setminus A_n) \\
&= \mu(E) - \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Dado que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos crecientes tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} [\mu(E) - \mu(A_n)] = 0,$$

así

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n} - \chi_E\|_p^p = 0,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n} - \chi_E\|_p = 0.$$

En virtud de la continuidad de T en $L_q(\mu)$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T(\chi_{A_n}) = T(\chi_E).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= T(\chi_E) \\
&= \lim_{n\to\infty} T(\chi_{A_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k),
\end{aligned}$$

esto último nos dice que ν es una medida con signo. Ahora queremos demostrar que

$$\nu << \mu.$$

Supongamos que $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\chi_E\|_p &= \left(\int_X \chi_E \, d\mu \right)^{1/p} \\
&= [\mu(E)]^{1/p} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que χ_E es la función cero en $L_p(\mu)$, así $T(\chi_E) = 0$, así $T(\chi_E) = 0$, es decir $\nu(E) = 0$ por lo tanto $v << \mu$. En virtud del Teorema de Radon-Nikodym para medidas (con signo) finitas, existe una función medible g tal que

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu$$

$\forall\ E \in \mathcal{A}$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_X g \, d\mu &= \nu(X) \\
&= T(\chi_X) \\
&= T(1) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

así $g \in L_1(\mu)$.

Verifiquemos que g satisface las hipótesis del Lema 2.59, sea $s \in L_p(\mu)$ una función simple $\mathcal{A}$-medible con representación canónica

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k},$$

entonces

$$\begin{aligned}
T(s) &= T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \nu(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{E_k} g \, d\mu \\
&= \int_X g \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k} \right) \, d\mu
\end{aligned}$$

$$= \int_X gs\, d\mu.$$

por lo cual

$$T(s) = \int_X sg\, d\mu$$

para toda función simple $s \in L_p(\mu)$, de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_X sg\, d\mu \right| &= |T(s)| \\ &\leq \|T\| \|s\|_p. \end{aligned}$$

Si $M = \|T\|$ entonces $0 < M < \infty$, esto nos dice que g satisface las condiciones del Lema 2.59, por lo tanto podemos concluir que $g \in L_q(\mu)$ y

$$\|g\|_q \leq M = \|T\|. \tag{2.30}$$

En lo que sigue demostraremos que

$$T(f) = \int_X fg\, d\mu$$

para toda $f \in L_p(\mu)$.

Sea $f \in L_p(\mu)$ y $\epsilon > 0$ arbitrario, en virtud del Lema 2.22 existe una función simple $s \in L_p(\mu)$ tal que

$$\|f - s\|_p < \frac{\epsilon}{\|g\|_q + \|T\| + 1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| T(f) - \int_X fg\, d\mu \right| &= \left| T(f) - T(s) + T(s) - \int_X fg\, d\mu \right| \\ &\leq |T(f - s)| + \left| \int_X sg\, d\mu - \int_X fg\, d\mu \right| \\ &\leq |T(f - s)| + \int_X |s - f||g|\, d\mu \\ &\leq \|T\| \|f - s\|_p + \|s - f\|_p \|g\|_q \\ &= \left(\|T\| + \|g\|_q\right) \|f - s\|_p \\ &< \frac{\left(\|T\| + \|g\|_q\right) \epsilon}{\|T\| + \|g\|_q + 1} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Dado que ϵ es arbitrario, podemos concluir que

$$T(f) = \int_X fg\,d\mu$$

para todo $f \in L_p(\mu)$.

Finalmente por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.22) tenemos

$$|T(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

de donde

$$\|T\| \leq \|g\|_q, \tag{2.31}$$

de (2.30) y (2.31) resulta

$$\|T\| = \|g\|_q,$$

quedando así demostrado el caso 1.

- Caso 2. $\mu(X) = \infty$.

En virtud de la σ-finitud de μ, existe $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ con $X_n \subset X_{n+1}$ y $\mu(X_n) < \infty$ $\forall n$. Aplicaremos el caso 1 al espacio de medida $(X_n, \mathcal{A} \cap X_n, \mu_n)$ donde $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}\cap X_n}$.

Sea $T_n = T|_{L_p(\mu_n)}$, por el caso 1 para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in L_q(\mu_n)$ tal que

$$T_n(h) = \int_{X_n} hg_n\,d\mu_n \tag{2.32}$$

para todo $h \in L_p(\mu)$ que se anula fuera de X_n, además

$$\|g_n\|_q = \|T_n\| \leq \|T\|. \tag{2.33}$$

Definamos

$$\overline{g_n}(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } \; x \in X_n; \\ \\ 0 & \text{si } \; x \notin X_n. \end{cases}$$

Entonces podemos escribir (2.32) como

$$T(h) = \int_X h\overline{g_n}\,d\mu \tag{2.34}$$

para toda $h \in L_p(\mu)$ el cual se anula fuera de X_n.

Ahora, dado que $\overline{g_{n+1}}$ restringido a X_n tiene las mismas propiedades que $\overline{g_n}$ en virtud de la unicidad se tiene que $\overline{g_n} = \overline{g_{n+1}}$ en X_n. Bien, ahora definamos

$$g(x) = g_n(x) \ \text{ si } \ x \in X_n.$$

Como

$$|\overline{g_n}(x)| \leq |\overline{g_{n+1}}(x)| \ \ \forall x \in X$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{g_n}(x) = g(x),$$

entonces por el Teorema de la convergencia monótona

$$\begin{aligned}\int_X |g|^q \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X |\overline{g_n}|^q \, d\mu \\ &\leq \|T\|^q,\end{aligned}$$

entonces

$$g \in L_q(\mu) \ \text{ y } \ \|g\|_q \leq \|T\|. \tag{2.35}$$

Sea $f \in L_p(\mu)$ y $f_n = f\chi_{X_n}$, note que f_n se anula fuera de X_n y $f_n \to f$ (puntualmente) en X. Claramente

$$|f_n - f| \leq |f|,$$

así

$$|f_n - f|^p \leq |f|^p,$$

por el Teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

De la continuidad de T se sigue que

$$T(f_n) \to T(f) \ \ (n \to \infty).$$

Por otra parte , note que

$$|f_n g| \leq |fg|; \ \ fg \in L_1(\mu) \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} f_n g = fg,$$

ahora invocamos el teorema de la convergencia dominada para obtener

$$\begin{aligned}
\int_X fg\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X f_n g\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X f\chi_{X_n} g\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X \left(f\chi_{X_n}\right)\left(g\chi_{X_n}\right)\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\overline{g_n}\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} T(f_n) \\
&= T(f).
\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado (2.28), una vez más por Hölder se tiene que

$$|T(f)| \leq \|f\|_p\|g\|_q,$$

es decir

$$\|T\| \leq \|g\|_q,$$

por (2.35)

$$\|g\|_q \leq \|T\|.$$

Por lo tanto $\|T\| = \|g\|_q$, que era lo que queríamos demostrar.

□

2.7. Espacios duales

En espacios vectoriales X de dimensión finita es conocido el hecho de que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de X, entonces el espacio dual X', denominado dual algebraico de X definido por

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$$

tiene dimension n y el conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$, donde $f_i(e_k) = \delta_{ik}$, es una base de X'. Un resultado análogo puede demostrarse en dimensión infinita, utilizando bases de Schauder.

Este hecho es el punto de partida para definir el concepto de espacio dual en espacios normados arbitrarios.

Definición 2.62. *Sea* $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *un espacio normado, llamamos espacio dual de* X *a*

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal y acotado.}\}$$

Se $\dim X < \infty$*, este concepto coincide con el dual algebraico.*

Observación 2.63. *Los teoremas 2.60 y 2.61 nos demuestran que el espacio dual de* $L_p(\mu)(1 \leq p < \infty)$ *es* $L_q(\mu)$*. Es decir* $[L_p(\mu)]^* = L_q(\mu)$*.*

Teorema 2.64. *El espacio dual de* l_p *es* l_q *si* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* $(1 < p < \infty)$*.*

Demostración. Una base de Schauder de l_p es $e_k = (\delta_{kj})_{j=1}^{\infty}$. Si $f \in (l_p)^*$, entonces $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}\alpha_k f(e_k)}$. Una vez más, definamos $T(f) = (f(e_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Queremos demostrar que la imagen de T está en l_q. Para ello, se define la sucesión $\chi^{(n)} = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ para cada n con

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|f(e_k)|^q}{f(e_k)} & \text{si} \quad k \leq n \text{ y } f(e_k) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad k > n \text{ ó } f(e_k) = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$f(x^n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \xi_k^{(n)} f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q.$$

Como además

$$\begin{aligned} f(x^n) &\leq \|f\| \|x^n\|_p \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{qp-p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|. \end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|$$

donde $(f(e_k))_{k\in\mathbb{N}} \in l_q$.

Ahora, afirmamos que: i) T es sobreyectiva, en efecto dado $b = (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_q$, podemos asociarle un funcional lineal y acotado $g \in l_p$, mediante $g(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k$ con $x = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_p$ (la acotación se deduce de la desigualdad de Hölder). Entonces $g \in (l_p)'$.

No es difícil ver que T es inyectiva. Por último veamos que la norma de f es la norma en l_q de Tf

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k f(e_k)\right| \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\| \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los x de norma 1, se tiene que

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como la otra desigualdad también es cierta, se deduce la igualdad

$$\|f\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

con lo que se establece el isomorfismo $f \to (f(e_k))_{k\in\mathbb{N}}$ deseado. □

Teorema 2.65. *El espacio dual de l_1 es l_∞.*

Demostración. Para todo $x \in l_1$, podemos escribir $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, donde $e_k = (\delta_{kj})_{j=1}^{\infty}$ forma una base de Schauder de l_1, dado que

$$x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \alpha_{n+1}, \ldots)$$

y

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\| \to 0$$

en virtud que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ es convergente.

Definamos la aplicación $T(f) = (f(e_k))_{k\in\mathbb{N}}$, $\forall f \in (l_1)^*$. Como $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k f(e_k)$, entonces $|f(e_k) \leq \|f\|\|e_k\|$, pues $\|e_k\| = 1$. En consecuencia, $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)| \leq \|f\|$, donde $(f(e_k))_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty$.

Afirmamos que:// i) T es sobreyectiva, en efecto $\forall b = (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, definamos $q : l_1 \to E$ como $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k\beta_k$ si $x = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty$.

El funcional g es lineal y acotado dado que

$$|g(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k\beta_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |\beta_k| \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| = \|x\|_1 \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} |\beta_k|,$$

entonces $g \in (l_1)^*$. Además, como $g(e_k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{kj}\beta_j$,

$$T(g) = (g(e_k))_{k\in\mathbb{N}} = (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} = b.$$

ii) T es inyectiva; si $Tf_1 = Tf_2$, entonces

$f_1(e_k) = f_2(e_k), \forall k$. Como $f_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k f_1(e_k)$ y $f_2(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k f_2(e_k)$, entonces $f_1 = f_2$.

iii) T es una isometría (ver definición 9.1) En efecto,

$$\|f\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)| \leq \|f\| \tag{2.36}$$

y

$$|f(x)| = \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k f(e_k) \right| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |f(e_k)| \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| = \|x\| \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)|$$

Así,

$$\|f\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)| = \|Tf\|_\infty \tag{2.37}$$

Combinando (2.36) y 2.37 resulta $\|Tf\|_\infty = \|f\|$. Demostrándose así que los espacios $(l_1)^*$ y l_∞ son isométricos. □

2.8. Convergencia débil en L_p

Consideremos la función $x \mapsto \cos(xn)$ para $n = 1, 2, \ldots$. Note que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \pi, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto la sucesión $\{\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $L_2([0,2\pi],\mathcal{L},m)$ no converge a cero en la norma de $L_2([0,2\pi],\mathcal{L},m)$. Sin embargo tal sucesión converge a cero en el sentido siguiente. Sea $g=\chi_{[a,b]}$ donde $[a,b]\subset[0,2\pi]$. Un cálculo directo nos muestra que

$$\int_0^{2\pi}\chi_{[a,b]}\cos(nx)dx=\frac{1}{n}[\sin(nb)-\sin(na)]\to 0$$

cuando $n\to\infty$. Ahora consideremos $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^m$ una colección finita de subintervalos disjuntos de $[0,2\pi]$ y la función simple φ de la forma

$$\varphi=\sum_{j=1}^m \alpha_j\chi_{[a_j,b_j]}.$$

Observe que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{2\phi}\varphi(x)\cos(nx)dx=0.$$

Los ejemplos anteriores motivan la siguiente definición.

Definición 2.66. *Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida y $1\le p,q\le\infty$ tal que $1/p+1/q=1$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L_p(\mu)$ $(1\le p\le\infty)$ se dice que converge débilmente a $f\in L_p(\mu)$ si*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g d\mu=\int_X f g d\mu$$

para todo $g\in L_q(\mu)$.

Teorema 2.67. *Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida finita y $1<p<\infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L_p(\mu)$ tal que $f_n\to f$ c.t.p $[\mu]$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(f_n)=\varphi(f)$$

para todo $\varphi\in L_p^*(\mu)$ si y sólo si $\{\|f_n\|_p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\varphi(f_n)=\varphi(f)$ para todo $\varphi\in L_p^*(\mu)$. Definamos

$$\psi: L_p\to L_p^*(\mu)$$

por

$$\psi(f)\varphi=\varphi(f),$$

observe que

$$\|\varphi(f)\|=\|f\|_p.$$

Por hipótesis

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(f_n)| < \infty.$$

En virtud del principio de acotación uniforme se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi(f_n)(\varphi)| < \infty$$

implica que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi(f_n)\| < \infty,$$

así

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty.$$

- ($\Leftarrow$). Ahora, si $\|f_n\|_p \leq M$, entonces por el Lema de Fatou se sigue

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p \, d\mu \\ &\leq M.\end{aligned}$$

Por otra parte, por el Teorema 2.60 (Representación de Riesz) para todo $\varphi \in L_p^*(\mu)$ existe $g \in L_q(\mu)$ tal que

$$\varphi(h) = \int_X hg \, d\mu$$

para todo $h \in L_p(\mu)$. Dado que $g \in L_q(\mu)$, entonces $|g|^q \in L_1(\mu)$, luego existe $\delta > 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica que

$$\int_E |g|^q \, d\mu < \left(\frac{\epsilon}{4M}\right)^q,$$

como $\mu(X) < \infty$ podemos invocar el Teorema de Egoroff para garantizar que existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \delta$ y

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(\|g\|_1 + 1)}$$

para todo $x \in A^c$, siempre que $n \geq n_0$.

Finalmente, en virtud de la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi(f_n)-\varphi(f)| &= \left|\int_X (f_n-f)g\,d\mu\right| \\
&= \left|\int_A (f_n-f)g\,d\mu + \int_{A^c}(f_n-f)g\,d\mu\right| \\
&\leq \|f_n-f\|_p\left(\int_A |g|^q\,d\mu\right)^{1/q} + \int_{A^c}|f_n-f||g|\,d\mu \\
&\leq 2M\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon\|g\|_1}{2(\|g\|_1+1)} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

si $n \geq n_0$.

$\square$

Corolario 2.68. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L_p $1<p<\infty$ la cual converge casi en todas las partes a una función $f\in L_p$ y además supongamos que existe una constante M tal que $\|f_n\|_p \leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Entonces para cada $g\in L_q$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n g d\mu = \int f g d\mu.$$

Observación 2.69. *El Corolario 2.68 para $p=1$ no es cierto, en efecto. Sea $X=[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$. Consideremos*

$$g(x) = \begin{cases} n & si\ x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]; \\ 0 & si\ x\in I\cap[0,1]. \end{cases}$$

Sea $M\geq 1$, luego

$$\|g\|_\infty = \operatorname{ínf}\{M : \mu(\{x\in[0,1] : |g(x)|>M\})=0\} = 1.$$

Así $g\in L_\infty[0,1]$. Por otra parte sea $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$, note que $f_n\to 0$ ($n\to\infty$) puntualmente y $\|f_n\|_1 = \int_0^1 f_n dm = 1$. Pero

$$\int_0^1 f_n g dm = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_n n dm = n.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n g dm = \infty.$$

Sin embargo el Corolario 2.68 es cierto para el caso $p = \infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L_∞, entonces $\|f_n\|_\infty < \infty$, luego $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ c.t.p. Dado que $f_n \to f$ puntualmente, obtenemos $|f| \leq \|fn\|_\infty$ c.t.p. Sea $g \in L_1$, entonces $|fg| \leq \|f_n\|_\infty |g| \in L_1$ y $|f_n g| \leq \|f_n\|_\infty |g| \in L_1$. En virtud del teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n g d\mu = \int f g d\mu.$$

Teorema 2.70. *Sea $1 < p < \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_p(\mathbb{R})$ con $1 = \sup_n \|f_n\|_p < \infty$. Entonces existe $f \in L_p(\mathbb{R})$ tal que $\|f\|_p \leq M$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_{n_k} g \, dm = \int_{\mathbb{R}} f g \, dm,$$

con $g \in L_q(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea g una función perteneciente a la familia $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_q(\mathbb{R})$. Queremos demostrar que

$$\lim_{k\to 0} \int_{\mathbb{R}} f_{n_k} g \, dm$$

existe. Para ello definamos

$$C_{k,n} = \int_{\mathbb{R}} f_k g_n \, dm.$$

En virtud de la desigualdad de Hölder, resulta

$$\begin{aligned} |C_{k,1}| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_k g_1 \, dm \right| \\ &\leq \|f_k\|_p \|g_1\|_q, \end{aligned}$$

de lo anterior y ya que $f_k \in L_p(\mathbb{R})$ se sigue que

$$|C_{k,1}| \leq M \|g_1\|_q. \tag{2.38}$$

Dado que $\{C_{k,1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y además, por (2.38) es acotada, entonces podemos invocar el Teorema de Bolzano-Weierstrass para obtener una subsucesión $\{C_{k_1,1}\} \subset \{C_{k,1}\}$ tal que

$$\lim_{k_1\to\infty} C_{k_1,1}$$

existe. Podemos repetir este argumento con $\{C_{k_1,1}\}$ para obtener una nueva subsucesión $\{C_{k_2,h}\}$ con $h = 1, 2$ tal que

$$\lim_{k_2\to\infty} C_{k_2,h}$$

existe. Ahora, por el proceso de diagonalización de Cantor obtenemos una subsucesión $\{C_{k_m,h}\}$ de modo que

$$\lim_{k_m\to\infty} C_{k_m,h}$$

existe.

Por otra parte, podemos escoger de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia densa en $L_q(\mathbb{R})$, denotemos ésta por $\mathcal{G}$ y definamos

$$T(g) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_{k_m} g \, dm$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que

$$T\left(\alpha g_{n_1} + \beta g_{n_2}\right) = \alpha T\left(g_{n_1}\right) + T\left(g_{n_2}\right)$$

para todo g_{n_1}, $g_{n_2} \in \mathcal{G}$. Una vez mas por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned} |T(g)| &\leq \|f_{k_m}\|_p \|g\|_q \\ &\leq M\|g\|_q, \end{aligned}$$

de esta manera, hemos demostrado que T es un funcional lineal y acotado, es decir T es continuo. En lo que sigue, queremos extender T a todo $L_q(\mathbb{R})$, en efecto para cada $g \in L_q(\mathbb{R})$ existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{G}$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \|g - g_n\|_q = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_q = \|g\|_q.$$

Observe que

$$|T(g_n) - T(g_L)| \leq M\|g_n - g_L\|_q \to 0$$

cuando $n \to \infty$, esto nos dice que $\{T(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto converge en R, digamos que su limite es $T(g)$, es decir

$$T(g) = \lim_{n\to\infty} T(g_n),$$

lo cual está bien definido en $L_q(\mathbb{R})$. Luego, note que

$$\begin{aligned}|T(g)| &\leq \limsup_{n\to\infty} |T(g) - T(g_n)| + \limsup_{n\to\infty} |T(g_n)| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} |T(g_n)| \\ &\leq M \limsup_{n\to\infty} \|g_n\|_q \\ &= M\|g\|_q\end{aligned}$$

para toda $g \in L_q(\mathbb{R})$. En virtud del Teorema de Representación de Riesz existe $f \in L_p(\mathbb{R})$ tal que

$$\|T\| = \|f\|_p,$$

pero

$$\|T\| \leq M,$$

así

$$\|f\|_p \leq M$$

y

$$T(g) = \int_{\mathbb{R}} fg\, dm,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_{k_m} g\, dm = \int_{\mathbb{R}} fg\, dm.$$

□

Teorema 2.71. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función $\mathcal{A}$-medible. Consideremos $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función de clase C^1 tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces,*

$$\int_X \varphi(|f|)\, d\mu = \int_0^\infty \varphi'(\lambda)\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda$$

para $\lambda > 0$.

Demostración. Si $\mu((\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})) = \infty$ no hay nada que demostrar, en tal sentido supongamos que $\mu((\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})) < \infty$.

Queremos demostrar que $(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$ es medible sobre $[0, \infty)$. Para ello consideremos el conjunto

$$E = \{(x, \lambda) \in X \times [0, \infty) : 0 < \lambda < |f(x)|\}.$$

A demostrar que E es medible en $X \times [0,\infty)$. En efecto, como $|f| \geq 0$, entonces, existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $s_n \uparrow f$, podemos escribir

$$s_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \chi_{A_j^n},$$

con $A_j^n \in \mathcal{A}$ y $j = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} E_n &= \{(x,\lambda) \in X \times [0,\infty) :\, 0 < \lambda < s_n(x)\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^n \times (0, a_j^n) \end{aligned}$$

es medible en $X \times [0,\infty)$. Ahora, observe que

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = \chi_E(x),$$

dado que χ_{E_n} es una función medible en $X \times [0,\infty)$ ya que E_n es medible en $X \times [0,\infty)$, por lo tanto χ_E es medible por ser el límite de una sucesión de funciones medibles. En consecuencia,

$$E = \{(x,\lambda) \in X \times [0,\infty) :\, 0 < \lambda < |f(x)|\}$$

es medible, de este hecho se desprende que

$$E^\lambda = \{x \in X :\, |f(x)| > \lambda\}$$

es medible en $[0,\infty)$.

Por otra parte, como φ es de clase C^1, entonces

$$(x,\lambda) \longrightarrow \varphi'(\lambda)\chi_{E^\lambda}(x)$$

es medible, además, en virtud que $\varphi(0) = 0$ resulta

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} \varphi'(\lambda)\, d\lambda.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(|f|)\, d\mu &= \int_X \int_0^{|f|} \varphi'(\lambda)\, d\lambda d\mu \\ &= \int_X \int_0^{\infty} \chi_{[0,|f|]}(\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda d\mu \\ &= \int_0^{\infty} \int_X \chi_{\{x\in X:\, |f(x)|>\lambda\}}(x)\varphi'(\lambda)\, d\mu d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \varphi'(\lambda)\mu(\{x \in X :\, |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.72. *Si $f \in L_p(\mu)$ con $0 < p < \infty$. Entonces,*

$$\int_X |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \, d\lambda.$$

Teorema 2.73. *Sea $f \in L_p(\mu)$; $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\lim_{t \to 0} t^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) = \lim_{t \to \infty} t^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})$$

Demostración. Sea $f \in L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, entonces en virtud de la desigualdad de Markov (Lema 2.28) con $g(t) = t^p$, resulta

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int_X |f|^p \, d\mu < \infty,$$

luego

$$\lim_{t \to 0} t^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) = 0.$$

Por otra parte, definamos

$$f_t = \begin{cases} |f|, & \text{si } \ |f| > t; \\ \\ 0, & \text{si } \ |f| \leq t, \end{cases} \tag{2.39}$$

como $f \in L_p(\mu)$, entonces $|f| < \infty$ c.t.p$[\mu]$. En efecto, note que

$$\{x : |f(x)| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > n\}.$$

Así,

$$\mu(\{x : |f(x)| > n\}) \leq \frac{1}{n^p} \int_X |f|^p \, d\mu,$$

de donde

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x : |f(x)| > n\}) = 0,$$

entonces

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) \leq \lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| > n\}) = 0.$$

Por lo tanto

$$|f| < \infty \quad \text{c.t.p}[\mu].$$

Ahora, regresemos a (d), observe que $\lim_{t\to\infty} f_t = 0$ c.t.p$[\mu]$ implica que $\lim_{t\to\infty} f_t^p = 0$ c.t.p$[\mu]$, por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\lim_{t\to\infty}\int_X f_t^p\, d\mu = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\{x:|f(x)|>t\}} |f|^p\, d\mu = \lim_{t\to\infty}\int_X f_t^p\, d\mu = 0,$$

finalmente

$$\lim_{t\to\infty} t^p\mu(\{x\in X:\, |f(x)|>t\}) \leq \lim_{t\to\infty}\int_{\{x:|f(x)|>t\}} |f|^p\, d\mu = 0.$$

$\square$

Si f es una función medible en $(X,\mathcal{A},\mu)$ entonces podemos definir su función distribución

$$D_f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$

por

$$D_f(\lambda) = \mu(\{x\in X : |f(x)|>\lambda\}).$$

Supongamos que D_f es una función decreciente y continua por la derecha, en efecto, sean $0\leq\lambda_1\leq\lambda_2$ arbitrarias, entonces

$$\{x\in X:\, |f(x)|>\lambda_2\}\subset\{x\in X:\, |f(x)|>\lambda_1\},$$

por la monotonía de la medida, se tiene que

$$D_f(\lambda_2)\leq D_f(\lambda_1),$$

esto último nos dice que D_f es decreciente. Para demostrar que D_f es continua por la derecha, consideremos $\lambda_0\geq 0$ y escojamos $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq\cdots$, luego definamos

$$E_f(\lambda) = \{x\in X:\, |f(x)|>\lambda\}.$$

Observe que

$$E_f(\lambda_1)\subseteq E_f(\lambda_2)\subseteq\cdots$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} D_f\left(\lambda_0+\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\mu\left(E_f\left(\lambda_0+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_f\left(\lambda_0+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \mu\left(E_f\left(\lambda_0\right)\right),\end{aligned}$$

estableciéndose así la continuidad por la derecha.

De este hecho podemos definir una medida de Borel en $(0,\infty)$ dada por

$$\nu((a,b]) = D_f(b) - D_f(a)$$

para todo $a, b > 0$. En tal sentido podemos considerar la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_0^\infty \varphi \, dD_f = \int_0^\infty \varphi \, d\nu,$$

donde φ es una función no negativa y Borel medible en $(0,\infty)$.

El siguiente resultado nos muestra que la integral sobre X de la función $|f|$ se puede expresar como una integral de Lebesgue-Stieltjes.

Teorema 2.74. *Si $D_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$ y φ es una función no negativa, Borel medible en $(0,\infty)$. Entonces*

$$\int_X \varphi \circ |f| \, d\mu = -\int_0^\infty \varphi(\lambda) \, dD_f(\lambda).$$

Demostración. Sea ν la medida de Borel en $(0,\infty)$ dada por

$$\nu((a,b]) = D_f(b) - D_f(a) \tag{2.40}$$

para todo $a, b > 0$. Afirmamos que

$$D_f(a) - D_f(b) = \mu(\{x : \, a < |f(x)| \leq b\}).$$

En efecto, dado que $b > a$, entonces

$$\{x \in X : |f(x)| > b\} \subset \{x \in X : |f(x)| > a\}.$$

Como $D_f(a) < \infty$ se tiene

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) < \infty,$$

luego

$$\begin{aligned}
\{x \in X : a < |f(x)| \leq b\} &= \{x \in X : |f(x)| > a\} \cap \{x \in X : |f(x)| \leq b\} \\
&= \{x \in X : |f(x)| > a\} \cap \{x \in X : |f(x)| > b\}^c \\
&= \{x \in X : |f(x)| > a\} \setminus \{x \in X : |f(x)| > b\}.
\end{aligned}$$

Así, resulta

$$\mu(\{x \in X : a < |f(x)| \leq b\}) = \\ \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) - \mu(\{x \in X : |f(x)| > b\}) = \\ D_f(a) - D_f(b).$$

En virtud de (2.40) podemos escribir

$$\begin{aligned} \nu((a,b]) &= -[D_f(a) - D_f(b)] \\ &= -\mu(\{x \in X : a < |f(x)| \leq b\}) \\ &= -\mu(|f|^{-1}(a,b]). \end{aligned}$$

En vista del teorema de extensión única de la medida, se sigue que

$$\nu(E) = -\mu(|f|^{-1}(E))$$

para todo conjunto de Borel $E \subset [0,\infty)$.

Ahora, consideremos

a) $\varphi = \chi_E$ y observemos que

$$\begin{aligned} \varphi \circ |f|(x) &= \chi_E \circ |f|(x) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } |f(x)| \in E; \\ \\ 0, & \text{si } |f(x)| \notin E, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \in |f|^{-1}(E); \\ \\ 0, & \text{si } x \notin |f|^{-1}(E), \end{cases} \\ &= \chi_{|f|^{-1}(E)}(E). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_X \varphi \circ |f| \, d\mu &= \int_X \chi_{|f|^{-1}(E)}(x) \, d\mu \\ &= \mu(|f|^{-1}(E)) \\ &= -\nu(E) \\ &= -\int_0^\infty \chi_E \, d\nu \\ &= -\int_0^\infty \varphi \, d\nu \\ &= -\int_0^\infty \varphi \, dD_f. \end{aligned}$$

b) Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi \circ |f| \, d\mu &= \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \chi_{|f|^{-1}(E_k)}(x) \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(|f|^{-1}(E_k)) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} a_k \nu(E_k) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{\infty} \chi_{E_k} \, d\nu \\
&= -\int_0^{\infty} \varphi \, d\nu \\
&= -\int_0^{\infty} \varphi \, dD_f.
\end{aligned}$$

c) Si φ es cualquier función no negativa Borel medible, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $s_n \uparrow \varphi$, entonces $s_n \circ |f| \uparrow \varphi \circ |f|$, luego en virtud de b)

$$\int_X s_n \circ |f| \, d\mu = -\int_0^{\infty} s_n \, D_f,$$

por el teorema de la convergencia monótona se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \circ |f| \, d\mu = -\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, dD_f,$$

$$\int_X \varphi \circ |f| \, d\mu = -\int_0^{\infty} \varphi \, dD_f.$$

□

Ejercicios

1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Sea f una función $\mathcal{A}$-medible. Demuestre que
$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

2. Sea $1 \leq p < q < \infty$. Supongamos que para $g \in L_q(X, \mathcal{A}, \mu)$ se cumple que
$$\int_X fg\, d\mu = 0 \qquad \forall\, f \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu).$$
Demostrar que $g = 0$ c.t.p. en X.

3. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in L_1(\mu)$. Definamos
$$L_f(h) = \int_X fh\, d\mu$$
para $h \in L_\infty(\mu)$. Demostrar que L_f es un operador lineal y acotado en $L_\infty(\mu)$ y además
$$\|L_f\| = \|f\|_1.$$

4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Dada $g \in L_\infty(\mu)$ y $\varepsilon > 0$, demostrar que existe $f \in L_1(\mu)$ tal que $\|f\|_1 = 1$ y
$$\|g\|_\infty \geq \int_X fg\, d\mu > \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) = 1$. Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos:

   1) S es un subespacio cerrado de $L_p(\mu)$.
   2) $S \subset L_\infty(\mu)$.

   Demostrar que S es de dimensión finita.

6. Sea $X = C[0, 1]$ el espacio de Banach de las funciones continuas en $[0, 1]$ dotado con la norma del supremo. Sea S un subespacio de X el cual es cerrado como subespacio de $L_2([0, 1], \mathcal{L}, m)$. Demostrar que

   I) S es un subespacio cerrado de X.
   II) Existe una constante M tal que
$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2 \qquad \forall\, f \in S.$$

III) Para todo $y \in [0,1]$ existe $k_y \in L_2([0,1], \mathcal{L}, m)$ tal que

$$f(y) = \int_0^1 k_y(x) f(x)\, dx \qquad \forall\, f \in S.$$

7. Demuestre que $f \in L_p([0,\infty), \mathcal{L}, m)$ $(p > 1)$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} m\left(\left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} m\left(\{|f| > n\}\right) < \infty.$$

8. Sea $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ $1 \leq p < \infty$ y $l_p^n = \{x : \|x\|_p < \infty\}$. $B_{l_p^n}(0,1) = \{x : \|x\|_p \leq 1\}$ denota la bola unitaria en l_p^n. Denotemos

$$v_n(p) = \mathrm{vol}(B_{l_p^n}) = \mathrm{vol}\{x \in l_p^n : \|x\|_p \leq 1\}.$$

Obsérvese que $\mathbb{R}^n \cong l_p^n$. Calcular $v_n(p)$. *Ayuda*: Calcule la integral

$$I_p = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p}\, dx$$

9. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función $\mathcal{A}$-medible, demostrar que

$$\int_X \operatorname{sen} |f(x)|\, d\mu(x) = \int_0^{\infty} \cos \lambda \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) d\lambda.$$

10. Para $g \in L_q(\mu)$, sea F un funcional lineal en $L_p(\mu)$ definido por $F(f) = \int f g d\mu$, $F \in L_p(\mu)$. Sin usar el teorema de representación de Riesz, demuestre que $\|F\| = \|g\|_q$.

11. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Demostrar que el espacio dual de $L_1(\mu)$ es $L_\infty(\mu)$.

12. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Si $\mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}\right) \leq e^{-\lambda}$ para todo $\lambda \geq 0$, entonces demostrar que $f \in L_p(\mu)$ para cada $1 \leq p < \infty$.

13. Demostrar que l_∞ no es el espacio dual de l_1.

2.9. Continuidad de la traslación en $L_p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Para $f \in L_p(\Omega)$ y $h \in \mathbb{R}^n$, definamos la traslación de f como

$$T_h f(x) = \begin{cases} f(x+h) & \text{si } x+h \in \Omega \\ 0 & \text{si } x+h \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

La siguiente proposición nos dice que la operación traslación es continua en la topología generada por la norma $L_p(\Omega)$ para $p \in [1, +\infty)$.

Proposición 2.75. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea $f \in L_p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que*

$$\sup_{|h| \leq \delta} \|T_h f - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Demostración. En primer lugar supongamos que Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ acotado, es decir que está contenido en una bola $B_R(0)$ centrada en el origen y de radio R, para algún $R > 0$ suficientemente grande. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Omega = B_R(0)$ definiendo $f = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Para $E \subset \Omega$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos

$$E - \lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : x + \lambda \in E\}.$$

Para $\varepsilon > 0$ (dado) existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \subset \Omega$ medible con $m(E) < \delta$ entonces

$$\int_E |f|^p \, dm < \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}.$$

En virtud de que la medida de Lebesgue es invariante por traslación se tiene que

$$m\left((E - \lambda) \cap \Omega\right) < \delta.$$

Por lo tanto

$$\int_E |T_h f - f|^p \, dm \leq 2^{p-1} \left[\int_E |f|^p \, dm + \int_{(E-\lambda)\cap\Omega} |f|^p \, dm \right] \leq \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Dado que f es medible, por el teorema de Lusin (ver apéndice) f es cuasi-continua. Por lo tanto, fijamos un número positivo

$$\sigma = \frac{\delta}{2 + m(\Omega)},$$

entonces existe un conjunto cerrado $\Omega_\sigma \subset \Omega$ tal que $m(\Omega \setminus \Omega_\sigma) \leq \sigma$ y f es uniformemente continua en Ω_σ. En particular, existe $\delta_\sigma > 0$ tal que

$$|T_h f(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon^p}{2m(\Omega_\sigma)},$$

siempre que $|h| < \delta_\sigma$, y $x, x+h$ pertenezcan a Ω_σ.

Para cualquier h, tenemos que

$$\int_{\Omega_\sigma \cap (\Omega_\sigma - h)} |T_h f - f|^p \, dm \leq \frac{1}{2}\varepsilon^p.$$

Para cualquier $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\eta| < \sigma$, calculamos

$$\begin{aligned} m\left(\Omega \setminus (\Omega_\sigma - \eta)\right) &= m\left((\Omega + \eta) \setminus \Omega_\sigma\right) \\ &\leq m(\Omega \setminus \Omega_\sigma) + m\left((\Omega + \eta) \setminus \Omega\right) \\ &\leq \sigma + \sigma m(\Omega). \end{aligned}$$

De esto último se tiene que

$$\begin{aligned} & m\left(\Omega \setminus [\Omega_\sigma \cap (\Omega_\sigma - \eta)]\right) \\ & \leq m(\Omega \setminus \Omega_\sigma) + m\left(\Omega \setminus (\Omega_\sigma - \eta)\right) \\ & \leq \sigma\left(2 + m(\Omega)\right) = \delta. \end{aligned}$$

Si $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| \leq \delta = \text{mín}\{\sigma, \delta\}$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_\Omega |T_h f - f|^p \, dm &\leq \int_{\Omega_\sigma \cap (\Omega_\sigma - h)} |T_h f - f|^p \, dm \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \{\Omega_\sigma \cap (\Omega_\sigma - h)\}} |T_h f - f|^p \, dm \\ &= \int_{\Omega_\sigma \cap (\Omega_\sigma - h)} |T_h f - f|^p \, dm + \frac{1}{2}\varepsilon^p \leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Sea η tal que $|\eta| < \sigma$, entonces

$$\begin{aligned} m\left(\Omega \setminus (\Omega_\sigma - \eta)\right) &= m\left((\Omega + \eta) - \Omega_\sigma\right) \\ &\leq m(\Omega \setminus \Omega_\sigma) + m\left((\Omega + \eta) - \Omega\right) \\ &\leq \sigma + \sigma m(\Omega). \end{aligned}$$

De esto último se tiene que

$$\begin{aligned} & m\left(\Omega \setminus [\Omega_\sigma \cap (\Omega_\sigma - \eta)]\right) \\ & \leq m(\Omega \setminus \Omega_\sigma) + m\left(\Omega \setminus (\Omega_\sigma - \eta)\right) \\ & \leq \sigma\left(2 + m(\Omega)\right) = \delta. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso cuando Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no acotado. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ suficientemente grande tal que para todo $|h| < 1$

$$\int_{\Omega\cap\{|x|>2R\}} |T_h f - f|^p \, dm \leq 2^p \int_{\Omega\cap\{|x|>R\}} |f|^p \, dm \leq \frac{1}{2^p}\varepsilon^p.$$

Para tal R, existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ tal que

$$\sup_{|h|<\delta_0} \|T_h f - f\|_{p,\Omega\cap\{|x|<2R\}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sup_{|h|<\delta_0} \|T_h f - f\|_{p,\Omega} &\leq \|T_h f - f\|_{p,\Omega\cap\{|x|<2R\}} \\ &\quad + 2\|f\|_{p,\Omega\cap\{|x|>R\}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.76. *El teorema 2.75 es falso cuando $p = \infty$.*

Capítulo 3

Operadores Integrales

3.1. Desigualdades básicas y algunos operadores importantes

Definición 3.1 (Operadores Compactos)**.** *Supongamos que X e Y son espacios de Banach y B la bola unitaria en X. Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ se dice que es compacto si la clausura de $T(B)$ $(\overline{T(B)})$ es compacta en Y. De este hecho es claro que T es acotado.*

Observación 3.2. *Esta definición es equivalente a decir que T es compacto si y sólo si toda sucesión $\{x_n\}$ acotada en X contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{T(x_{n_k})\}$ converge puntualmente en Y.*

Teorema 3.3 (Arzela-Ascoli)**.** *Supongamos que (X, d) es un espacio métrico compacto. Entonces un conjunto $F \subset C(X)$ ($C(X)$ es el espacio de las funciones continuas de X en si mismo) es compacto si y sólo si F es cerrado, acotado y equicontinuo.*

Definición 3.4. *Un espacio métrico (X, d) se dice que es σ-compacto si se puede expresar como la unión contable de subespacios compactos.*

Teorema 3.5. *Sea (X, d) un espacio métrico σ-compacto y μ una medida de Borel en X. Si $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que*

$$\int_X |K(x, y)|\, d\mu(x) \leq C \text{ para casi todo } y \in X$$

y

$$\int_X |K(x, y)|\, d\mu(y) \leq C \text{ para casi todo } x \in X.$$

Entonces el operador integral

$$T : L_p(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$$

dado por

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y)$$

es compacto para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Supongamos que $1 < p < \infty$. Sea q el número conjugado de p, entonces aplicando la desigualdad de Hölder al producto

$$|K(x,y)f(y)| = |K(x,y)|^{1/q} \left(|K(x,y)|^{1/p}|f(y)|\right)$$

se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_X |K(x,y)f(y)|\,d\mu(y) \leq \\
&\qquad \left[\int_X |K(x,y)|\,d\mu(y)\right]^{1/q} \left[\int_X |K(x,y)||f(y)|^p\,d\mu(y)\right]^{1/p} \leq \\
&\qquad\qquad C^{1/q}\left[\int_X |K(x,y)||f(y)|^p\,d\mu(y)\right]^{1/p}
\end{aligned}$$

para casi todo $x \in X$. Por el teorema de Tonelli resulta

$$\begin{aligned}
&\int_X \left[\int_X |K(x,y)||f(y)|\,d\mu(y)\right]^p d\mu(x) \leq \\
&\qquad C^{p/q}\int_X\int_X |K(x,y)||f(y)|^p\,d\mu(y)d\mu(x) \leq \\
&\qquad\qquad C^{p/q+1}\int_X |f(y)|^p\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

Dado que $f \in L_P(\mu)$, entonces la integral de arriba es finita, luego por el teorema de Fubini, concluimos que $K(x,\cdot) \in L_1(\mu)$ para casi todo $x \in X$, así Tf está bien definido c.t.p. Finalmente, resulta

$$\int_X |Tf(x)|^p\,d\mu(x) \leq C^{p/q+1}\|f\|_p^p,$$

es decir

$$\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Por lo tanto Tf es acotado.

Ahora, fijemos $y_0 \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad de κ en $X \times X$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(y, y_0) < \delta$ entonces, $|K(x, y) - K(x, y_0) < \epsilon|$ para cada $x \in X$. Luego, si $d(y, y_0) < \delta$ y $f \in L_p(\mu)$ satisface $\|f\|_p \leq 1$, entonces la desigualdad de Hölder implica

$$
\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(x_0)| &= \left| \int_X [K(x,y) - K(x,y_0)] f(y)\, d\mu(y) \right| \\
&< \epsilon \int_X |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq \epsilon [\mu(X)]^{1/q} \|f\|_p \\
&\leq \epsilon [\mu(X)]^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Así, hemos demostrado que $\{Tf : \|f\|_p \leq 1\}$ es un subconjunto de $C(X)$ el cual es $\|\cdot\|_p$-acotado y equicontinuo, en virtud del teorema de Arzela-Ascoli concluimos que T es un operador compacto. $\square$

La desigualdad de Minkowski (teorema 2.19) establece que la norma $\|\cdot\|_p$ de la suma de dos funciones en L_p es al menos la suma de la norma $\|\cdot\|_p$ de cada una de estas funciones. El siguiente resultado generaliza el teorema 2.19.

Teorema 3.6 (Desigualdad integral de Minkowski)**.** *Sean* $(X, \mathcal{A}_1, \mu)$ *y* $(X, \mathcal{A}_2, \mu)$ *espacios de medidas σ-finitas. Supongamos que f es una función $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ medible y $f(\cdot, y) \in L_p(\mu)$ para todo $y \in Y$. Entonces para $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que*

$$
\left(\int_X \left| \int_Y f(x,y)\, d\nu \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p\, d\mu \right)^{1/p} d\nu.
$$

Demostración. Puesto que

$$
\left| \int_Y f(x,y)\, d\nu \right| \leq \int_Y |f(x,y)|\, d\nu
$$

para $p = 1$, entonces

$$
\int_X \left| \int_Y f(x,y)\, d\nu \right| d\mu \leq \int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\nu d\mu,
$$

por Fubini

$$
\int_X \left| \int_Y f(x,y)\, d\nu \right| d\mu \leq \int_Y \int_X |f(x,y)|\, d\mu d\nu.
$$

Ahora, si $p = \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right| &\leq \int_Y |f(x,y)|\,d\nu\\ &\leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_\infty\,d\nu,\end{aligned}$$

así, aplicando Fubini una vez más se tiene

$$\begin{aligned}\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|\,d\mu &\leq \int_X \left(\int_Y \|f(\cdot,y)\|_\infty\,d\nu\right)\,d\mu\\ &\leq \int_Y \left(\int_X \|f(\cdot,y)\|_\infty\,d\mu\right)\,d\nu.\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $1 < p < \infty$, entonces por Fubini y el Teorema 2.22 (Desigualdad de Hölder) tenemos

$$\begin{aligned}&\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^p\,d\mu\\ &= \int_X \left(\left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|\left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^{p-1}\right)\,d\mu\\ &\leq \int_X \int_Y |f(x,y)|\,d\nu\left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^{p-1}\,d\mu\\ &= \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^{p-1}\,d\mu\right)\,d\nu\\ &\leq \int_Y \left[\left(\int_X |f(x,y)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{1/q}\right]\,d\nu\\ &= \int_Y \left[\left(\int_X |f(x,y)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^{p}\,d\mu\right)^{1/q}\right]\,d\nu,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^p\,d\mu\right)^{1-1/q} &= \left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu\right|^p\,d\mu\right)^{1/p}\\ &\leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\,d\nu\end{aligned}$$

□

Teorema 3.7. *Sea K una función medible en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ tal que $K(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}K(x,y)$ para todo $\lambda>0$ y además*

$$\int_0^\infty |K(x,1)|x^{-1/p}\,dx = C<\infty.$$

Para $f\in L_p(\mu)$ definamos

$$Tf(y)=\int_0^\infty K(x,y)f(x)\,dx.$$

Entonces,

$$\|Tf\|_p\le C\|f\|_p.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p &= \left(\int_0^\infty |Tf(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty K(x,y)f(x)\,dx\right|^p\,dy\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Escribiendo $x=zy$, entonces $dx=ydz$, luego por la desigualdad integral de Minkowski

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty K(zy,y)f(zy)y\,dz\right|^p\,dy\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty y^{-1}K(z,1)f(zy)y\,dz\right|^p\,dy\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty K(z,1)f(zy)\,dz\right|^p\,dy\right)^{1/p}\\ &\le \int_0^\infty k(z,1)\left(\int_0^\infty |f(zy)|^p\,dy\right)^{1/p}\,dz.\end{aligned}$$

Ahora, si $x=zy$, entonces $z^{-1}dx=dy$, luego

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty K(z,1)\left(\int_0^\infty |f(zy)|^p dy\right)^{1/p} dz =\\ &\int_0^\infty K(z,1)\left(\int_0^\infty |f(x)|^p z^{-1}dx\right)^{1/p} dz =\\ &\left(\int_0^\infty K(z,1)z^{-1/p}dz\right)\|f\|_p.\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que

$$\|Tf\|_p\le C\|f\|_p.$$

□

Los siguientes resultados representan la versión continua de las desigualdades de Hilbert y Hardy, respectivamente.

Teorema 3.8 (Desigualdad de Hilbert). *Sean $f \in L_p(m)$ y $g \in L_q(m)$. Entonces*

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(y)g(x)}{x+y}\, dydx \right| \leq \frac{\pi}{sen\left(\frac{\pi}{p}\right)} \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Sean $f \in L_p(m)$ y $g \in L_q(m)$. Note que

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(y)g(x)}{x+y}\, dydx \right| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(y)g(x)|}{x+y}\, dxdy.$$

Sea $y = xz$, entonces $dy = xdz$, luego por Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(y)g(x)|}{x+y}\, dydx &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(xz)g(x)|}{x(1+z)}\, xdzdx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(xz)g(x)|}{1+z}\, dzdx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+z} \int_0^\infty |f(xz)g(x)|\, dxdz.
\end{aligned}$$

Si $u = xz$, entonces $du = zdx$, además $x = \frac{u}{z}$, aplicando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{1+z} \int_0^\infty |f(xz)g(x)|\, dxdz \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+z} \left(\int_0^\infty \left| f(u) g\left(\frac{u}{z}\right) \right| z^{-1}\, du \right) dz \\
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{1+z} \left(\int_0^\infty |f(u)|\, du \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \left| g\left(\frac{u}{z}\right) \right|^q z^{-q}\, du \right)^{1/q} dz.
\end{aligned}$$

Ahora, para $w = \frac{u}{z}$ tenemos $zw = u$ y $zdw = du$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{1+z} \left(\int_0^\infty |f(u)|\, du \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |g(w)|^q z^{-q+1}\, du \right)^{1/q} dz \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{q}-1}}{1+z}\, dz \right) \|f\|_p \|g\|_q. \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{z^{-(1-\frac{1}{q})}}{1+z}\, dz \right) \|f\|_p \|g\|_q. \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{z^{-\frac{1}{p}} dz}{1+z} \right) \|f\|_p \|g\|_q. \\
&= \frac{\pi}{\sin\left(\dfrac{\pi}{p}\right)} \|f\|_p \|g\|_q,
\end{aligned}
$$

ver Lema A.2. Finalmente,

$$
\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(y)g(x)}{x+y}\, dxdy \right| \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)} \|f\|_p \|g\|_q.
$$

$\square$

Definición 3.9 (Operador de Hardy)**.** *Sea f una función medible y positiva en $(0,\infty)$, el operador de Hardy se define como*

$$
Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy.
$$

Teorema 3.10 (Desigualdad de Hardy)**.** *Sea $f \in L_p(0,\infty)$ positiva y $1 < p < \infty$. Entonces*

$$
\|Hf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.
$$

Demostración. Observe que si $y = zx$, entonces $dy = xdz$, luego

$$
\begin{aligned}
Hf(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{x} \int_0^1 f(xz)\, xdz \\
&= \int_0^1 f(xz) dz.
\end{aligned}
$$

Ahora, empleando la desigualdad integral de Minkowski, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^p dx\right)^{1/p} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(zx)\,dz\right)^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty (f(zx))^p\,dx\right)^{1/p} dz \\
&= \int_0^1 z^{-1/p} \left(\int_0^\infty (f(u))^p\,du\right)^{1/p} dz \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|_p.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.11. *Este último resultado nos dice que $H \in B(L_p(m))$ donde $B(L_p(m))$ denota al conjunto de todos los funcionales acotados en $L_p(m)$.*

Definición 3.12. *Sea T un operador lineal y acotado, un operador T^* se dice que es el operador adjunto del operador T si satisface la identidad de dualidad, es decir, si*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$ donde X e Y son espacios de Banach.

Teorema 3.13. *Al menos de manera formal el adjunto del operador de Hardy está dado por*

$$H^*f(y) = \int_y^\infty f(x)\frac{dx}{x}$$

para $f \geq 0$.

Demostración. Empleando la definición 3.12 y el teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned}
\langle Hf, g\rangle &= \int_0^\infty Hf(x)g(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right) g(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^\infty \chi_{(0,x)}(y)f(y)\,dy\right) g(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{(y,\infty)}(x)f(y)\,dy\right) \frac{g(x)}{x}\,dx \\
&= \int_0^\infty f(y)\int_y^\infty g(x)\frac{dx}{x}\,dy \\
&= \langle f, H^*g\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$H^*g(y) = \int_y^\infty g(x)\frac{dx}{x}.$$

□

3.2. L_p es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$

En lo sucesivo, necesitaremos el siguiente resultado, el cual es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach (versión norma).

Teorema 3.14. *Sean $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ un espacio normado, Y un subespacio de X y $x_0 \in X$ tal que*
$$\delta = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| > 0$$
es decir, la distancia de x_0 a Y es positiva.

Entonces, existe f un funcional lineal y acotado en X tal que
$$f(y) = 0$$
para todo $y \in Y$,
$$f(x_0) = 1$$
y
$$\|f\| = \frac{1}{\delta}.$$

Observación 3.15. *Sean X e Y dos espacios vectoriales, un funcional lineal*
$$T : X \longrightarrow Y$$
se dice que es un isomorfismo, si T es uno-uno y sobreyectivo. Además, si X e Y son espacios normados tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para cada $x \in X$, entonces se dice que T es un isomorfismo isométrico y X e Y son isométricamente isomorfos.

Denotemos por X^{**} al espacio dual de X^*. Vamos a demostrar que X es isométricamente isomorfo al subespacio X^{**}.

Supongamos que X es un espacio normado. Para cada $x \in X$ sea $\phi(x)$ un funcional lineal en X^* definido por
$$\phi(x)(f) = f(x)$$

para cada $f \in X^*$. Dado que

$$|\phi(x)(f)| \leq \|f\|\|x\|,$$

el funcional $\phi(x)$ es acotado, de hecho

$$\|\phi(x)\| \leq \|x\|.$$

Así $\phi(x) \in X^{**}$

El siguiente resultado es la clave para entender la relación entre X y X^*.

Proposición 3.16. *Sea $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces para cada $x \in X$*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \, f \in X^*; \, \|f\| = 1\}.$$

Demostración. Fijemos $x \in X$. Si $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$, entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|.$$

Por otra parte, si $x \neq 0$, entonces

$$\delta = \text{dist}(x, \{0\}) = \inf_{y \in \{0\}} \|x - y\| = \|x\| > 0,$$

por el teorema 3.14 existe $g \in X^*$ tal que

$$g(x) = 1 \text{ y } \|g\| = \frac{1}{\|x\|}.$$

Sea $f = \|x\|g$, note que

$$\|f\| = \|x\|\|g\| = \|x\|\frac{1}{\|x\|} = 1$$

y

$$f(x) = \|x\|g(x) = \|x\|,$$

luego

$$\|x\| \leq \sup\{|f(x)| : \, f \in X^*, \, \|f\| = 1\} \leq \|x\|,$$

por lo tanto

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \, f \in X^*, \, \|f\| = 1\}. \qquad \square$$

Observación 3.17. *En virtud del resultado anterior no es difícil demostrar que*

$$\|\phi(x)\| = \|x\|,$$

lo que nos dice que ϕ es un isomorfismo isométrico de X en $\phi(X)$.

El funcional ϕ lo llamaremos la inmersión natural de X en X^{**}.

Definición 3.18. *Un espacio normado $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ se dice que es reflexivo si*

$$\phi(X) = X^{**}$$

en cuyo caso X es isométricamente isomorfo a X^{**}.

Teorema 3.19. *$L_p(\mu)$ con $1 < p < \infty$ es reflexivo.*

Demostración. Si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, consideremos

$$\psi : L_q(\mu) \longrightarrow (L_p(\mu))^*,$$

definido por

$$\psi(g) = \phi(F_g)$$

para $g \in L_q(\mu)$ donde $F_g(f) = \int_X gf\, d\mu$.

Observe que ψ es un funcional lineal y acotado, la acotación la obtenemos del hecho que

$$\begin{aligned} |\phi(g)| = |\phi(F_g)| &\leq \|\phi\|\|F_g\| \\ &= \|\phi\|\|g\|_q, \end{aligned}$$

la última igualdad es consecuencia del Teorema 2.61. De nuevo por el Teorema 2.61 existe algún $f \in L_p(\mu)$ tal que $\psi(g) = \int_X gf d\mu$ para todo $g \in L_q(\mu)$.

Por otra parte, para $w \in (L_p(\mu))^{**}$ tenemos que

$$w(F_g) = F_g(f) = \int_X fg d\mu = \psi(g) = \phi(F_g)$$

para todo $g \in L_q(\mu)$. El Teorema 2.61 garantiza que $w = \phi$. Es decir, la inmersión natural

$$\phi : L_p(\mu) \to (L_p(\mu))^{**}$$

es sobreyectiva. Así hemos demostrado que $L_p(\mu)$ es reflexiva. □

3.3. El espacio L_2

Definición 3.20 (Producto interior)**.** *Sea $(X, +, .)$ un espacio vectorial, una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tal que satisface:*

(a) $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ *para todo* $f, g, h \in X$,

(b) $\langle cf, g \rangle = c\langle f, g \rangle$ *para todo* $f, g \in X$ *y cualquier escalar* c.

(c) $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$ *para todo* $f, g \in X$.

(d) $0 \leq \langle f, f \rangle < +\infty$ *para todo* $f \in X$.

(e) $\langle f, f \rangle = 0$ *si y sólo si* $f = 0$.

se llama producto interior.

Observación 3.21. $\overline{\langle f, g \rangle}$ *denota el conjugado de* $\langle f, g \rangle$ *el cual se cumple si* X *es un espacio vectorial complejo, en caso de que* X *es un espacio vectorial real (c) es nuevamente* $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$. *Un espacio vectorial dotado de un producto interno, se llama espacio vectorial con un producto interior.*

Todo producto interno genera una norma definida por

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Además se tiene que la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\|g\|.$$

Definición 3.22 (Espacio de Hilbert)**.** *Un espacio vectorial con un producto interno se dice que es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma generada por su producto interno.*

Teorema 3.23. *Una norma $\|\cdot\|$ sobre un espacio vectorial está inducida por un producto interno si y sólo si satisface la ley del paralelogramo, es decir, si y sólo si*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

para cualesquiera vectores f, g.

Ahora, consideremos el caso $p = 2$.

Definición 3.24. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p = 2$. Una función f definida de X en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ ($f : X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se dice que pertenece a $\mathcal{L}_2(\mu)$ (pre-Lebesgue) si*

$$\int_X |f|^2 d\mu < \infty.$$

Es decir

$$\mathcal{L}_2(\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

Por la construcción hecha en la sección 2.3 podemos definir

$$L_2(\mu) = L_2(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}_2/\sim .$$

En virtud del Teorema 2.29 para el caso $p = 2$, la función $\|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ definida por

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma sobre $L_2(\mu)$.

Para el Teorema 2.29 $(L_2(\mu), \|\cdot\|_2)$ es un espacio completo. Ahora consideremos en $L_2(\mu)$ el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g} d\mu,$$

$f, g \in L_2(\mu)$.

Observemos que este producto interno genera la norma $\|\cdot\|_2$ y además $\|\cdot\|_2$ satisface la ley del paralelogramo (ver ejercicio 1). Por lo tanto se tiene la siguiente

Definición 3.25. $(L_2(\mu), \|\cdot\|_1)$ *es un espacio de Hilbert.*

Sea X un espacio con un producto interior. Si A es un subconjunto (no vacío) de X, entonces el complemento ortogonal $A^\perp$ de A es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a cualquier vector de A, esto es,

$$A^\perp = \{x \in X \mid x \perp y \text{ para todo } y \in A\},$$

$x \perp y$ si y sólo si $\langle x, y \rangle = 0$.

De la linealidad y continuidad del producto interior es claro que $A\ \perp$ es un subespacio cerrado de X tal que $A^\perp = (\overline{A})^\perp$ y $A \cap A^\perp = \{0\}$.

Teorema 3.26. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces $H = M \oplus M^\perp$.*

Observación 3.27. *Dado que todo producto interno es continuo, se sigue que todo vector y en un espacio X con producto interior define un funcional lineal $f_y : X \to \mathbb{C}$ vía la fórmula*

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle, \tag{3.1}$$

como veremos en el siguiente resultado. Si X es un espacio de Hilbert, entonces todo funcional lineal y contínuo será de la forma (3.1).

Teorema 3.28 (F. Riesz)**.** *Si H es un espacio de Hilbert y $f : H \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal y continuo, entonces existe un único vector $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Además $\|f\| = \|y\|$.

Demostración. Sea $F : H \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo en H. Sea M su núcleo, es decir

$$M = \ker(f) = f^{-1}(0) = \{x \in H \mid f(x) = 0\},$$

dado que f es un funcional lineal y continuo, se tiene que M es un subespacio cerrado en H. Luego, si $M = H$, entonces $y = 0$ satisface $f(x) = \langle x, y \rangle = 0$ para cada $x \in H$. Por lo tanto podemos suponer que $M \subsetneq H$ (subespacio propio de H). Entonces existe algún $x_0 \in H$ con $f(x_0) = 1$ y (por el Teorema 3.26) algún vector $w \in M^{\perp}$ tal que $w \neq 0$. Ahora, note que si $x \in H$, entonces $x - f(x)x_0 \in M$ y $\langle x - f(x)x_0, w \rangle = 0$ ó $f(x)\langle x_0, w \rangle > 0$ y así $\langle x_0, w \rangle \neq 0$. Observe que el vector $y = \frac{w}{\langle x_0, w \rangle}$ satisface $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in H$.

Unicidad. Note que si $\langle x, y \rangle = \langle x, y_1 \rangle$ para cada $x \in H$, luego si $x = y - y_1$, entonces $\langle y - y_1, y - y_1 \rangle = 0$, de aquí se desprende que $y = y_1$. Finalmente, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|f(x)| \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ se tiene que $\|f\| \leq \|y\|$. Por otra parte, si $y \neq 0$, entonces $x = \frac{y}{\|y\|}$ satisface $\|x\| = 1$ y $\|f\| \geq |f(x)| = \langle y/\|y\|, y \rangle| = \|y\|$. Así $\|f\| = \|y\|$. $\square$

Si H es un espacio de Hilbert, entonces el Teorema de F. Riesz nos muestra que una función $y \mapsto f_y$ donde $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ puede definirse de H en H^*. En vista de las propiedades:

a) $f_y + f_z = f_{y+z}$

b) $\alpha f_y = f_{\overline{\alpha} y}$

c) $\|f_y\| = \|y\|$

Se puede ver fácilmente que f_y es una aplicación lineal "conjudada" la cual es una isometría de H en H^*. Gracias a esta isometría, podemos demostrar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Corolario 3.29. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Demostración. Sea H un espacio de Hilbert y $F : H^* \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Definamos $\phi : H \to \mathbb{C}$ vía la fórmula $\phi(y) = \overline{F(f_y)}$, ahora note que:

I) $\phi(y+z) = \overline{F(f_{y+z})} = \overline{F(f_y + f_z)} = \overline{F(f_y)} + \overline{F(f_z)} = \phi(y) + \phi(z)$

II) $\phi(\alpha y) = \overline{F(f_{\overline{\alpha} y})} = \overline{F(\overline{\alpha} f_y)} = \overline{\overline{\alpha} F(f_y)} = \alpha \overline{F(f_y)} = \alpha\phi(y)$

III) $|\phi(y)| = \overline{|F(f_y)|} = |F(f_y)| \leq \|F\|\|f_y\| = \|F\|\|y\|$

Así en virtud de I), II) y III9 se tiene que $\phi \in H^*$. Entonces por el Teorema de F. Riesz, existe un único $x \in X$ tal que $\langle y, x\rangle = \phi(y) = \overline{F(f_y)}$ para todo $y \in H$. Esto implica que, para $\hat{x} \in H^{**}$ se tiene

$$\hat{x}(f_y) = f_y(x) = \langle x, y\rangle = F(f_y)$$

para cada $y \in H$, de esto último se tiene que $\hat{x} = F$, esto nos dice que la inmersión natural es sobreyectiva en H^{***}, por lo tanto H es un espacio reflexivo. □

3.3.1. Teorema de Radon-Nikodym

En esta subsección presentamos una demostración alternativa del clásico Teorema de Radon-Nikodym la cual es independiente del Teorema de la descomposición de Hahn, sin embargo esta demostración estará basada en el Teorema de F. Riesz, esta demostración alternativa se debe a Von Neumann, la misma la dividiremos en varios Lemas.

Lema 3.30. *Sean μ y ν medidas finitas sobre un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y sea $\lambda = \mu + \lambda$. Definamos $F(f) = \int_X f d\mu$ para $f \in L_2(\lambda)$. Entonces F es un funcional lineal y acotado en $L_2(\lambda)$.*

Demostración. Note que $L_2(\lambda) \subset L_1(\lambda) \subset L_1(\mu)$ ya que, en virtud de la desigualdad de Hölder con $p = q = 2$, resulta

$$\int_X |f| d\lambda \leq (\lambda(X))^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X |f| d\lambda \quad (\mu < \lambda).$$

Además esto nos dice que F está bien definida, no es difícil ver que F es un funcional lineal.

Además

$$\begin{aligned}|F(f)| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{2}}\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{2}}\left(\int_X |f|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\lambda)}\end{aligned}$$

donde $\|f\|_{L_2(\lambda)} = \|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$, de esta manera hemos demostrado que F es un funcional lineal y acotado en $L_2(\lambda)$. $\square$

Lema 3.31. *Sea $g \in L_2(\lambda)$ tal que $F(f) = \langle f, g\rangle$. Entonces $0 \leq g \leq 1$ c.t.p. y*

I) $\mu(E) = \int_E g d\lambda$.

II) $\mu(E) = \int_E (1-g) d\lambda$ *con* $E \subset X$.

Demostración. Por el lema 3.30 y por el Teorema de F. Riesz existe un único funcional $g \in L_2(\lambda)$ tal que $F(f) = \langle f, g\rangle$. Note que

$$\{g > 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{g \geq 1 + \frac{1}{n}\right\},$$

Sea $E_n = \left\{g \geq 1 + \frac{1}{n}\right\}$, entonces

$$\mu(E_n) = F(\chi_{E_n}) = \langle \chi_{E_n}, g\rangle = \int_E \chi_{E_n} g d\lambda = \int_{E_n} g d\lambda \geq (1 + \frac{1}{n})\lambda(E_n).$$

Así

$$\begin{aligned}\mu(E_n) \geq (1+\frac{1}{n})\lambda(E_n) &\geq (1+\frac{1}{n})(\lambda(E_n) + \nu(E_n)) \\ &\geq \mu(E_n) + \frac{\mu(E_n)}{n} + (1+\frac{1}{n})\nu(E_n)\end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$0 \geq \frac{\mu(E_n)}{n} + \nu(E_n),$$

de esto último deducimos que

$$\mu(E_n) = 0 = \nu(E_n)$$

y así $\lambda(E_n) = 0$, por lo tanto $\lambda(\{g > 1\}) = 0$.

Por otra parte, sea

$$\{g < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g \leq -1/n\}$$

y $A_n = \{g \leq -1/n\}$. Entonces

$$\mu(A_n) = F(\chi_{A_n}) = \langle \chi_{A_n}, g \rangle = \int_{A_n} g d\lambda \leq -\frac{1}{n}\lambda(A_n) \leq -\frac{1}{n}[\mu(A_n) + \nu(A_n)],$$

luego

$$0 \leq \mu(A_n) + \frac{1}{n}\nu(A_n) \leq -\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq 0,$$

por lo tanto $\mu(A_n) = 0 = \nu(A_n)$.

Así $\lambda(A_n) = 0$, entonces $\lambda(\{g < 0\}) = 0$. Con esto, hemos demostrado que

$$0 \leq g \leq 1 \quad \text{c.t.p.}$$

Finalmente, para cualquier conjunto $E \subset X$ se tiene que

$$\mu(E) = F(\chi_E) = \langle \chi_E, g \rangle = \int_E g d\lambda,$$

es decir,

$$\mu(E) = \int_E g d\lambda.$$

Por otra parte como

$$\nu(E) = \lambda(E) - \mu(E),$$

entonces

$$\nu(E) = \int_X \chi_{E_n} d\lambda - \int_E g d\lambda = \int_E d\lambda - \int_E g d\lambda = \int_E (1-g) d\lambda.$$

$\square$

Lema 3.32. *Si $\nu \ll \mu$, entonces $\lambda \ll \mu$ y $g = 0$ sólo en un conjunto de medida cero con respecto a la medida μ, en este caso tenemos que*

$$\lambda(E) = \int_E g^{-1} d\mu.$$

Demostración. Supongamos que $\lambda \ll \mu$, si $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = 0$, así $\lambda(E) = 0$, así $\lambda \ll \mu$. Consideremos ahora $E = \{x : g(x) = 0\}$, entonces

$$\mu(E) = \int_E g d\lambda = 0,$$

de esto se deduce que $g \neq 0$ c.t.p. luego $g^{-1} \neq 0$ c.t.p..

Ahora para cualquier conjunto $A \in \mathcal{A}$, consideremos $g^{-1} = \chi_A$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_E g^{-1} d\mu = \int_X \chi_E \chi_A d\mu = \int_X \chi_{E\cap A} d\mu = \mu(E \cap A) = \int_{E\cap A} g d\lambda \\ = \int_E \chi_A g d\lambda = \int_E g^{-1} g d\lambda.\end{aligned}$$

□

Lema 3.33. *Si $\nu \ll \mu$, entonces $(1 - g)g^{-1}$ es integrable con respecto a μ y además*

$$\nu(E) = \int_E (1 - g)g^{-1} d\mu.$$

Demostración. Si $\nu \ll \mu$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E (1 - g)g^{-1} d\mu &= \int_E g^{-1} d\mu - \int_E g g^{-1} d\mu \\ &= \lambda(E) - \int_E d\mu = \lambda(E) - \mu(E) = \lambda(E).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nu(E) = \int_E (1 - g)g^{-1} d\mu$. □

Teorema 3.34 (Radon-Nikodym)**.** *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y sea ν una medida definida en $\mathcal{A}$ la cual es absolutamente continua con respecto a μ, esto es, $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función F no negativa y medible tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ se tiene que*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu. \tag{3.2}$$

La función f es única en el sentido que si g es cualquier función medible que satisface (3.2), entonces $f = g$ c.t.p.$[\mu]$.

El siguiente ejemplo nos muestra que en el Teorema de Radon-Nikodym la hipótesis de que μ debe ser una medida σ-finita no se puede omitir.

Ejemplo 3.35. *Sea $X = [0,1]$ y $\mathcal{A}$ la clase de todos los subconjuntos de $[0,1]$ medibles. Sea ν la medida de Lebesgue y μ la medida de contar en $\mathcal{A}$. Entonces ν es finita y absolutamente continua con respecto a μ, pero no existe una función f tal que*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{A}$.

En efecto, si $\mu(E) = 0$, entonces $E = \emptyset$ ya que μ es la medida de contar, así $\nu(E) = \nu(\emptyset) = 0$, ν-medida de Lebesgue por lo tanto $\nu \ll \mu$.

Dado que $\nu([0,1]) = 1$ entonces ν es finita. Por otra parte $X = [0,1]$ es no numerable y $\mu(\{x\}) = 1$ $\forall x \in [0,1]$ lo que nos dice que μ no es una medida σ-finita.

Ahora supongamos que existe $f : [0,1] \to [0,\infty)$ definida por $F = f(x)\chi_{\{x\}}$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Sea $x \in [0,1]$, entonces

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = \int_X f(x)\chi_{\{x\}} d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x)$$

para todo $x \in [0,1]$.

Pero $\nu([0,1]) = \int_{[0,1]} f d\mu = 0$ lo cual es una contradicción.

Ejercicios

1. Demostrar que $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g} d\mu$ con $f, g \in L_2(\mu)$ es un producto interno.

2. Sean $f, g \in L_2(\mu)$, demostrar que

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

   Esta desigualdad es conocida como la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

3. Demuestre que la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz se da, es decir

$$|\langle f, g\rangle| = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

   si y sólo si f y g son linealmente dependientes.

4. Demuestre que $\|\cdot\|_2 : L_2(\mu) \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ definida por

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

   es una norma sobre $L_2(\mu)$.

5. Demuestre que la norma $\|\cdot\|_2$ satisface la ley del paralelogramo.

6. Si $f \in L_2(\mu)$, demuestre que $\|f\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} |\langle f, g\rangle|$.

7. Demuestre que las siguientes normas no pueden ser inducidas por un producto interno:

   a) $\|x\| = \text{máx}_{1\leq k\leq n}\{|x_k|\}$ en $\mathbb{R}^n$

   b) $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ en $C[a,b]$

   c) $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ en $L_p(\mu)$ con $p \neq 2$.

8. Sean $f_n, g_n \in L_2(\mu)$ para $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f)^2 d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (g_n - g)^2 d\mu = 0.$$

   Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g_n d\mu = \int_X f g d\mu.$$

9. Sea $I = [0, \pi]$ y $f \in L_2([0, \pi], \mathcal{L}, m)$. ¿Será posible tener simultáneamente

$$\int_I (f(x) - \operatorname{sen} x)^2 \, dx \leq 4$$

   y

$$\int_I (f(x) - \cos x)^2 \, dx \leq \frac{1}{9}?.$$

10. Sea $I = [0, 1]$. Sea f una función Lebesgue medible. Demostrar que $f \in L_2(I, \mathcal{L}, m)$ si y sólo si $f \in L_1(I, \mathcal{L}, m)$ tal que existe una función g creciente de modo que para todo intervalo cerrado $[a, b] \subset [0, 1]$ se cumple que

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|^2 \leq (g(b) - g(a))\, |b - a|.$$

11. Sea $f \in L_2([0, 1], \mathcal{L}, m)$ tal que $\|f\|_2 = 1$ y $\int_0^1 f \, dm \geq \alpha > 0$. También, para $\beta \in \mathbb{R}$, sea $E_\beta = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq \beta\}$. Si $0 < \beta < \alpha$, demostrar que

$$m(E_\beta) \geq (\beta - \alpha)^2.$$

    Esta desigualdad se conoce en la literatura como la desigualdad de Paley-Zygmund.

12. Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com $\mu(X) = 1$ y sean $f, g \in L_2(\mu)$. Si $\int_X f\, d\mu = 0$, demostrar que

$$\left(\int_X fg\, d\mu\right)^2 \leq \left[\int_X g^2\, d\mu - \left(\int_X g\, d\mu\right)^2\right] \int_X f^2\, d\mu.$$

13. Sea $f \in L_1(\mu) \cap L_2(\mu)$. Demostrar que:

    a) $f \in L_p(\mu)$ para cada $1 \leq p \leq 2$.

    b) $\lim_{p \to 1^+} \|f\|_p = \|f\|_1$.

14. Si $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx < \infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2\, dx < \infty$, demostrar que si $x \geq 0$, entonces

$$x|f(x)|^2 \leq 4 \left(\int_x^{\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_x^{\infty} |f'(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

15. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $f(x)$ y $xf(x)$ pertenecen a $L_2(\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\right)^2 \leq 8 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

16. Usar el Teorema 3.10 para demostrar el Teorema 2.42. Ayuda: Escoja una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tal que $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Considere $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ y defina $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{(n-1,n)}$.

3.4. Espectro de un Operador

Definición 3.36. *Sea $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ un espacio normado, el espectro $\sigma(T)$ de un operador T acotado, $T : X \longrightarrow X$ es el conjunto de todos los números complejos λ tal que el operador $T - \lambda I$ es no invertible, donde I representa el operador identidad*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es no invertible}\}$$

Un número complejo λ se llama un valor propio de un operador T si existe un vector x diferente de cero tal que

$$T(x) = \lambda x.$$

Obsérvese que los valores propios de T son exactamente los números complejos λ para los cuales $T - \lambda I$ no es uno a uno, además ellos pertenecen al espectro de T. El conjunto de todos los valores propios de T se conoce como el espectro puntual de T y se denota por

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &= \{\lambda \in \sigma(T) : T - I\lambda \text{ es no uno-uno}\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T) : T(x) = \lambda x \text{ para } x \neq 0\}.\end{aligned}$$

Teorema 3.37. *Sea H el operador de Hardy. Entonces*

a) H es positivo en $C[0,1]$.

b) H es uno-uno.

c) El espectro puntual de H es el conjunto

$$\sigma_p(H) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}.$$

d) H es no compacto.

Demostración. a) Sea $f \in C[0,1]$, queremos demostrar que $H(f)$ es continua en 0. Sea $\epsilon > 0$ y escojamos $\delta > 0$ tal que $x, x_0 \in [0,1]$, luego si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Si $x \in [0,1]$ satisface $0 < x < \delta$, tenemos que $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. En particular, para cada $x \in [0,1]$ resulta

$$\begin{aligned}|Hf(x) - Hf(0)| &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x [f(y) - f(0)]\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(y) - f(0)|\,dy \\ &< \frac{1}{x}\epsilon x \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Esto nos demuestra que $H(f)$ es continua en 0. De esto último es claro que $H(f)$ es un operador positivo en $C[0,1]$.

b) Supongamos que para algún $f \in C[0,1]$ se tiene $H(f) = 0$, entonces

$$\int_0^x f(y)\,dy = 0$$

para cada $x \in [0,1]$, en virtud del teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(y)\,dy\right) = 0$$

para cada $x \in [0,1]$. Así H es uno-uno, de este hecho se concluye que H es estrictamente positivo.

c) Observe que para $1 \in C[0,1]$ se tiene que

$$H(1)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x 1(y)\,dy = 1,$$

luego $H(1) = 1$, así $\lambda = 1$ es un valor propio de H, en vista de esto, podemos suponer $\lambda \neq 1$.

Para hallar los valores propios de H, debemos hallar todos los números complejos $\lambda = \alpha + \beta i$ para los cuales existe una función continua distinta de cero ($f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$) tal que

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy = \lambda f(x) \tag{3.3}$$

para $x \in [0,1]$. Dado que H es uno-uno podemos ver que $\lambda = 0$ no es un valor propio de H, luego $\lambda \neq 0$. Por otra parte, podemos escribir (3.3) como

$$\int_0^x f(y)\,dy = \lambda x f(x)$$

Diferenciando a ambos lados resulta

$$f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x),$$

así

$$\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0,$$

buscamos valores propios diferentes de 0 y 1, en este caso

$$\lambda x f'(x) = (1-\lambda)f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\frac{1}{x},$$

integrando

$$\ln f(x) = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\ln x$$

$$\ln f(x) = \ln x^{\frac{1}{\lambda}-1},$$

luego

$$f(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1} = e^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\ln x}$$

para cada $0 < x \leq 1$. Si $x \to 0^+$ en (3.3), gracias a la regla de LHôpital tenemos

$$f(0) = \lambda f(0),$$

es decir, f(0)=0, esto último nos dice que la función $f(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ es un valor propio de H si y sólo si

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{\lambda}-1} &= x^{\frac{1}{\alpha+i\beta}-1} \\ &= e^{\left(\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}-1\right)\ln x} \\ &= e^{\frac{\alpha-\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\ln x} e^{-\frac{i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\ln x} \end{aligned}$$

Así, vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} = 0$$

si y sólo si $\alpha - \alpha^2 - \beta^2 > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha^2 - \beta^2 > 0 &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - \alpha < 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} + \beta^2 < \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \beta^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow |\lambda - 1/2| < 1/2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el espectro puntual de H es

$$\sigma_p(H) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}.$$

d) Dado que el espectro de H no es contable, entonces H no puede ser compacto. A continuación damos una demostración directa de este hecho. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C[0,1]$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ \\ 1, & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Claramente, $\|f_n\|_\infty = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} Hf_n(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f_n(y)\,dy \\ &= \begin{cases} \frac{nx}{2}, & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ \\ 1 - \frac{1}{nx}, & \text{si } \ \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Además,

$$\lim_{n\to\infty} Hf_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = 0; \\ \\ 1, & \text{si } \ 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

pero $g \notin C[0,1]$ donde

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = 0; \\ \\ 1, & \text{si } \ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Así, observamos que ninguna subsucesión de $\{Hf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede converger uniformemente, por lo tanto H es no compacto.

$\square$

Ejercicios

1. La función Gamma se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \alpha \in (0,\infty)$$

siempre que ésta integral sea convergente.

a) Si $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ demostrar que

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt.$$

b) Sea f continua en $[0,\infty)$ para $\alpha \in (0,\infty)$ y $x \geq 0$ definamos

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt.$$

Demostrar que $I_\alpha(I_\beta f)(x) = I_{\alpha+\beta} f(x)$.

c) Definamos $J_\alpha f(x) = x^{-\alpha} I_\alpha f(x)$. Demostrar que para $1 < p < \infty$

$$\|J_\alpha f\|_p \leq \frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(\alpha+1-1/p)} \|f\|_p.$$

2. Sea $1 \leq p < \infty$, $r > 0$ y h una función no negativa medible en $(0, \infty)$. Demostrar que:

   a) $\int_0^\infty x^{-r-1} \left[\int_0^x h(y)\, dy\right]^p \, dx \leq \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p-r-1} \left[h(x)\right]^p \, dx$

   b) $\int_0^\infty x^{r-1} \left[\int_x^\infty h(y)\, dy\right]^p \, dx \leq \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p+r-1} \left[h(x)\right]^p \, dx$

3. Sea k una función medible no negativa en $(0, \infty)$ tal que

$$\int_0^\infty k(x) x^{s-1}\, dx = \varphi(s),$$

   para $0 < s < 1$, si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, además si f, g son funciones medibles no negativas en $(0, \infty)$. Demostrar que

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty k(xy) f(x) g(y)\, dx\, dy \\ &\leq \varphi(p^{-1}) \left[\int_0^\infty x^{p-2} \left[f(x)\right]^p \, dx\right]^{1/p} \left[\int_0^\infty \left[g(x)\right]^q \, dx\right]^{1/q} \end{aligned}$$

4. Sea $F(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\, dy$; $0 < x < \infty$. Si $1 < p < \infty$. Demostrar que

$$\|F\|_p \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)} \|f\|_p.$$

5. Demostrar que

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x) g(y)}{x+y}\, dx\, dy \right| \leq \pi \|f\|_2 \|g\|_2$$

   para $f, g \in L_2\left((0, \infty), \mathcal{L}, m\right)$.

6. Sea $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$K(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y $V : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ $(1 \le p \le \infty)$ el operador definido por

$$Vx(t) = \int_0^1 K(s,t)x(s)\,ds = \int_0^t x(s)\,ds$$

para $x \in L_p[0,1]$. Este operador se conoce como el operador de Volterra. Demostrar que el adjunto del operador de Volterra está dado por

$$V^* y(s) = \int_s^1 y(t)\,dt.$$

7. Sea k una función medible no negativa en $(0,\infty)$ tal que $\int_0^\infty k(x)x^{s-1}\,dx = \varphi(s)$ para $0 < s < 1$. Sea f una función medible no negativa en $(0,\infty)$. Definamos
$$Tf(x) = \int_0^\infty k(xy)f(y)\,dy.$$
Demostrar que
$$\|Tf\|_2 \le \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\|f\|_2.$$
¿Qué puede decirse de Tf y $\varphi(s)$ si $k(x) = e^{-x}$?

8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Si
$$\mu\left(\{x \in X : |F(x)| > \lambda\}\right) \le \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in X:|F(x)|>\lambda\}} |f|\,d\mu.$$
Demostrar que
$$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

9. Sea $f \in L_p((0,\infty), \mathcal{L}, m)$. Para cada $t > 0$, definamos
$$Sf(t) = \int_0^\infty \text{mín}\left(1, \frac{s}{t}\right) f(s)\frac{ds}{s},$$
demostrar que
$$\|Sf\|_p \le \frac{p^2}{p-1}\|f\|_p.$$

10. Sea $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ un operador continuo donde $1 < p < \infty$ y $0 \le r \le p$. Demostrar que:

a) Si $f \in L_p(\mu)$, entonces $|f|^{p-r}|Tf|^r \in L_1(\mu)$ y
$$\int |f|^{p-r}|Tf|^r\,d\mu \le \|T\|^r\left(\|f\|_p\right)^r.$$

b) Si para algún $f \in L_p(\mu)$ con $\|f\|_p \leq 1$ tenemos que

$$\int |f|^{p-r}|Tf|^r \, d\mu = \|T\|^r,$$

entonces

$$|Tf| = \|T\||f|.$$

11. Si $f \in L_1\left((0,\infty), \mathcal{L}, m\right)$, demostrar que:

a)

$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\, dt} \leq e \int_0^\infty f(x)\, dx$$

b)

$$\int_0^\infty \left(e^{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t) dt}\right) x^p dx \leq \frac{e}{1-p}\int_0^\infty f(x)x^p dx$$

para $0 < p < 1$.

c) Sea f una función no negativa y medible en $(0,b)$, $0 < b \leq \infty$ tal que $0 < \int_0^b [f(x)]^p dx < \infty$. Demostrar

(c_1) para $p \geq 1$,

$$\int_0^b \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p \frac{dx}{x} \leq \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b}\right)[f(t)]^p \frac{dt}{t}.$$

(c_2) para $p \geq 1$,

$$\int_0^b x^{-\frac{1}{p}+1}\left(\frac{1}{x}\int_0^b f(t)dt\right)^p dx$$
$$\leq \frac{p}{p-1} b^{\frac{p-1}{p}} \int_0^b \left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right][f(x)]^p dx.$$

12. Sea $1 < q < \infty$ y p tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definamos

$$T(f)(x) = \int k(x,t) f(t)\, dt$$

Demostrar que para toda $f \in L_p(\mathbb{R})$ T es un operador lineal y acotado de $L_p(\mathbb{R})$ en $L_q(\mathbb{R})$ y además

$$\|T\| \leq \left(\int\int |k(x,t)|^q \, dt\, dx\right)^{1/q}.$$

13. Dado $1 < p < \infty$ y $Tf(x) = x^{-1/p} \int_0^x f(t)\,dt$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demostrar que T es un operador lineal y acotado de $L_q(0,\infty)$ en $C_0((0,\infty))$.

14. Sean $s < r-1$ y $r > 1$. Sea f definida en $(0,\infty)$ tal que
$$\int_0^\infty |f(x)|^r x^s\,dx < \infty.$$
Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Demostrar que
$$\left(\int_0^\infty \left|\frac{F(x)}{x}\right|^r x^s\,dx\right)^{1/r} \leq \frac{r}{r-s-1}\left(\int_0^\infty |f(x)|^r x^s\,dx\right)^{1/r}.$$

15. Sean $s < r-1$ y $r > 1$. Sea f una función diferenciable en casi todo $(0,\infty)$ tal que
$$\int_0^\infty |f'(x)|^r x^s\,dx < \infty,$$
además f satisface las siguientes propiedades:

    a) $f(0) = 0$.

    b) $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

    Demostrar que
$$\left(\int_0^\infty |f(x)|^r x^{s-r}\,dx\right)^{1/r} \leq \frac{r}{r-s-1}\left(\int_0^\infty |f'(x)|^r x^s\,dx\right)^{1/r}.$$

16. Sea $\lambda > 0$, si la ecuación diferencial
$$\lambda \frac{d}{dx}\left(y'(x)\right)^{q/p'} + g(x)\left[y(x)\right]^{q/p'} = 0$$
tiene solución y tal que

    I) $y(0) = y(\infty) = 0$.

    II) $y(x) > 0$.

    III) $y'(x) > 0$.

    $0 < x < \infty$. Demostrar que
$$\left(\int_0^\infty |u(x)|^q g(x)\,dx\right)^{1/q} \leq \lambda^{1/q}\left(\int_0^\infty |u'(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
para toda función $u(x)$ tal que
$$u(x) \in \mathrm{AC}[0,\infty)$$
$$u(0) = \lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$$

17. Supongamos que f y g son funciones no negativas y medibles en $(0,\infty)$ y que

    a) $\int_0^\infty f(t)t^{-1/2}\,dt<\infty$.

    b) $\int_0^\infty [g(t)]^2\,dt<\infty$.

    Demostrar que
$$\int_0^\infty \int_0^x \frac{g(x)}{x} f(t)\,dt\,dx<\infty.$$

18. Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida y u,v funciones no negativas $\mathcal{A}$-medibles tal que
$$t\mu\left(\{x\in X : u(x)\geq t\}\right)\leq \int_{\{u(x)\geq t\}} v\,d\mu.$$
    Si $u,v\in L_p(X,\mathcal{A},\mu)$ demostrar que
$$\|u\|_p\leq \frac{p}{p-1}\|v\|_p.$$

19. Sea $f\geq 0$ y $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Demostrar que
$$\left(\int_0^1 [F(x)]^p\,dx\right)^{1/p}\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 [f(x)]^p\,dx\right)^{1/p}$$
    para $1<p<\infty$.

20. Sea $T: C(X)\to\mathbb{R}$ con $\mu(X)<\infty$ ($C(X)$ denota el espacio de todas las funciones continuas en X) tal que $T(f)=\int_X f\,d\mu$. Demostrar que T es un operador lineal y hallar $\|T\|$.

21. Sea φ una función Lebesgue medible, definida en $(0,1)$ tal que $t\varphi(t)\in L_p\left((0,1),\mathcal{L},\frac{dt}{t}\right)$. Demostrar que
$$\left\|(1+|\log t|)^{-1}\int_t^1 \varphi(s)\,ds\right\|_{L_p\left(\frac{dt}{t}\right)}\leq \frac{p}{p-1}\left\|t\varphi(t)\right\|_{L_p\left(\frac{dt}{t}\right)}.$$

22. Sea g una función medible y positiva en $(0,\infty)$. Sea φ una función convexa en $(0,\infty)$. Demostrar que
$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt\right)\frac{dx}{x}\leq \int_0^\infty \varphi(g(x))\,\frac{dx}{x}.$$

Capítulo 4

Operador Maximal

4.1. Funciones localmente integrables

Definición 4.1. *Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es localmente integrable si*

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty$$

para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. El espacio de las funciones localmente integrables se denota por $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$

Note que $L_1(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, entonces

$$\chi_K |f| \leq |f|,$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K |f| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu < \infty,$$

es decir

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty,$$

por lo tanto $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte obsérvese que

$$f(x) = \frac{1}{|x|^{n-1}} \notin L_1(\mathbb{R}^n),$$

pero f restringida a cualquier bola cerrada de centro 0 y radio $r > 0$, es localmente integrable, es decir

$$f(x) = \chi_{\overline{B}(0,1)}(x) \frac{1}{|x|^{n-1}} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n).$$

4.2. El teorema de cubrimiento de Vitali

Teorema 4.2. *Sea $E \in \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Sea $\mathfrak{F}$ la colección de bolas abiertas concentradas en puntos de E tal que todo punto de E es el centro de alguna bola en $\mathfrak{F}$. Entonces existe una sucesión $B_1, B_2, \dots$ de bolas de $\mathfrak{F}$ tal que*

1. *Las bolas $B_1, B_2, \dots$ son disjuntas*
2. $E \subset \bigcup_{\alpha \geq 1} 3B_\alpha$

Nota: *E no está cubierto por bolas disjuntas sin embargo está cubierto por bolas concéntricas de radio tres veces su radio original.*

4.3. Función Maximal de Hardy-Littlewood

Definición 4.3. *Sea $L_{1,loc(\mathbb{R}^n)}$. La función maximal de Hardy-Littlewood de f se define como:*

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

donde $B(x,r) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\big\}$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$.

De la definición de Mf, podemos ver que las siguientes propiedades se satisfacen:

(i) $0 \leq Mf(x) \leq \infty$

(ii) $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$

(iii) $M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)$.

Se demuestra fácilmente que la función $f(t) = |t|^\alpha$ con $\alpha > 0$ tiene $Mf(x) = \infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Nuestro próximo objetivo, es calcular Mf cuando $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Para $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ vemos que:

$$Mf(x) \leq \|f\|_\infty$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, es decir $Mf \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sin embargo, para $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, no necesariamente $Mf \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo, $f = \chi_{[0,1]} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ después de algunos cálculos rutinarios obtenemos que:

$$Mf(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1 \\[2ex] 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2(1-x)} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Pero $Mf \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 4.4. *Mf es semicontinua inferiormente y por lo tanto medible.*

Demostración. Para demostrar que Mf es semicontinua inferiormente, debemos verificar que para cada $\lambda > 0$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ es abierto, para ello demostremos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \leq \lambda\}$ es cerrado. Fijemos $\lambda > 0$ y supongamos que $x \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \leq \lambda\}}$, entonces existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \leq \lambda\}$ tal que $x_k \to x$ en $\mathbb{R}^n$ cuando $k \to \infty$. Primero observemos que, como $x_k \to x$, tendremos $\lim\limits_{k\to\infty} B(x_k, r) \Delta B(x, r) = \emptyset$ para todo $r > 0$. Sea $A_k = B(x_k, r) \Delta B(x, r)$ y $f_k = f\chi_{A_k}$, luego, se tiene que

$$|f_k| \leq |f(y)| \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} f_k = 0, \quad c.t.p.$$

Por el teorema de la convergencia dominada, tenemos:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|\, dy = 0. \tag{4.1}$$

Pero

$$B(x, r) \subseteq B(x_k, r) \,\triangle\, B(x, r) \cup B(x_k, r)$$

y

$$m\big(B(x_k, r)\big) = m\big(B(x, r)\big),$$

entonces

$$\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \leq$$
$$\frac{1}{m\big(B(x_k,r)\big)} \int_{B(x_k,r)\Delta B(x,r)} |f(y)|\, dy + \frac{1}{m\big(B(x_k,r)\big)} \int_{B(x_k,r)} |f(y)|\, dy.$$

Así, por (4.1) se tiene que

$$Mf(x) \leq \lambda,$$

por lo tanto $x \in \left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \leq \lambda\right\}$ con esto completamos la demostración. $\square$

La siguiente propiedad, se introduce a titulo de precaución. La función Mf, la podemos ver definitivamente más 'grande' que $|f|$, sin embargo, no es cierto que si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces $Mf \in L_1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $Mf \in L_1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $f = 0$. Verifiquemos esto, si $a > 0$ arbitraria y $|x| > a$, resulta

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{m\big(B(x,2|x|)\big)} \int\limits_{B(x,2|x|)} |f(y)|\, dy \\ &\geq \frac{1}{m\big(B(0,2|x|)\big)} \int\limits_{B(0,a)} |f(y)|\, dy \\ &= \frac{const}{|x|^n} \int\limits_{B(0,a)} |f(y)|\, dy, \end{aligned}$$

dado que $|x|^{-n}$ no es integrable para $|x| > a$, se tiene que:

$$\int\limits_{B(0,a)} |f(y)|\, dy = 0.$$

De la arbitrariedad de a, se concluye que $f = 0$. Otro ejemplo, para el caso $n = 1$, sea

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x} \chi_{\left(0,1/2\right)}(x),$$

usemos $r = x$, note que $f \in L_1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{2x} \int\limits_0^{2x} |f(y)|\, dy \\ &\geq \frac{1}{2x} \int\limits_0^{x} \frac{dy}{y \log^2 y} \\ &= \frac{-1}{2x \log x}. \end{aligned}$$

Como
$$\frac{-1}{2x\log x}$$
no es integrable en la cercanías de $x=0$, se tiene que $Mf\notin L_1(\mathbb{R})$. Ahora bien, en descargo de esta situación negativa, tendremos que si $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces Mf pertenece a L_1-débil.

Definición 4.5. *Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida, una función f $\mathcal{A}-$medible, se dice que pertenece al espacio de las funciones L_p-débil denotado por $WeakL_p = L_{p,\infty}$ $(0<p<\infty)$ si*
$$\|f\|_{L_{(p,\infty)}} = \inf\left\{C>0 : D_f(\lambda)\leq\left(\frac{C}{\lambda}\right)^p \quad \forall\lambda>0\right\}$$
es finito. Bajo el convenio de que $\inf\emptyset=\infty$. Como es usual dos funciones en $L_{(p,\infty)}$ se consideran iguales si ellas son iguales μ-c.t.p.

Ejercicios

1. Dada $f(x)=\frac{|x|^{-1/2}}{1+|x|^{-1/2}}$ para $x\in\mathbb{R}$, demostrar que $f\notin L_\infty(m)$ pero $f\in \mathrm{Weak}L_2$.

Teorema 4.6. *Si $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces*
$$m\big(\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}\big)\leq\frac{C}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,dm.$$
Así $Mf\in L_{(1,\infty)}$.

Demostración. Para cada $\lambda\in\mathbb{R}^+$, definimos $A_\lambda=\big\{x : Mf(x)>\lambda\big\}$, de la definición 4.3, se desprende que para cada $x\in A_\lambda$, existe $0<r<\infty$ (el cual depende de x) tal que
$$\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dm>\lambda.$$
Nótese que esta última expresión la podemos escribir como
$$m\big(B(x,r)\big)<\frac{1}{\lambda}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dm. \tag{4.2}$$
supongamos que $A_\lambda\neq\emptyset$, de lo contrario el resultado se tiene trivialmente. Notemos que para hacer uso del teorema 4.2 debemos tener que A_λ debe

ser acotado, a priori esto no se ve claro, sin embargo podemos considerar el conjunto $A_\lambda \cap B(0,k)$ (k fijo) en lugar del conjunto A_λ. Ahora, sea $\mathfrak{F}$ una colección de bolas abiertas B con centro en $A_\lambda \cap B(0,k)$ tal que satisfacen (4.2). Observe que bajo esta situación la hipótesis del teorema 4.2 se satisfacen, así, si $A_\lambda \cap B(0,k) \neq \emptyset$, entonces existe una sucesión B_1, $B_2, \ldots$ de bolas de $\mathfrak{F}$ tal que

(1) Las bolas B_1, $B_2, \ldots$ son disjuntas,

(2) $A_\lambda \cap B(0,k) \subset \bigcup\limits_{\alpha \geq 1} 3B_\alpha$.

Dado que $m\big(3B_\alpha\big) = 3^n m\big(B_\alpha\big)$, entonces por la desigualdad (4.2) tenemos

$$\begin{aligned} m\big(A_\lambda \cap B(0,k)\big) &\leq \sum_{\alpha \geq 1} m\big(3B_\alpha\big) \\ &= \sum_{\alpha \geq 1} 3^n m\big(B_\alpha\big) \\ &< \sum_{\alpha \geq 1} 3^n \lambda^{-1} \int\limits_{B_\alpha} |f(y)|\, dm \\ &= 3^n \lambda^{-1} \int\limits_{\bigcup\limits_{\alpha \geq 1}} |f(y)|\, dm \\ &\leq 3^n \lambda^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dm \end{aligned}$$

si $k \to \infty$, se tiene que

$$m(A_\lambda) \leq \frac{3^n}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dm,$$

es decir

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\big) \leq \frac{3^n}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dm.$$

De esto último se tiene que $Mf \in L_{(1,\infty)}$. $\square$

Teorema 4.7 (Diferenciación de Lebesgue)**.** *Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dm = f(x) \quad [m] - c.t.p.$$

Demostración. Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos hallar una función g continua tal que $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y para $\epsilon > 0$ (dado)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dm < \epsilon.$$

Ahora, observe que

$$\left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |g(y)|\, dm - g(x) \right| \leq \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dm < \epsilon,$$

es decir

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |g(y)|\, dm = g(x).$$

Por otra parte, obsérvese que

$$\limsup_{r \to 0} \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dm - f(x) \right| =$$

$$\limsup_{r \to 0} \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y) - g(y)\, dm + \left(\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} g(y)\, dm - g(x) \right) + (g(x) - f(x)) \right|$$

$$\leq M(f-g)(x) + 0 + |g(x) - f(x)|.$$

Ahora, consideremos los siguientes conjuntos

$$E_\lambda = \left\{ x : \limsup_{r \to 0} \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dm - f(x) \right| > \lambda \right\}$$

$$F_\lambda = \{ x : M(f-g)(x) > \lambda \}$$

$$H_\lambda = \{x : |f(x) - g(x)| > \lambda\}.$$

Note que

$$E_\lambda \subset F_{\lambda/2} \cup H_{\lambda/2}$$

y

$$\frac{\lambda}{2} m\big(F_{\lambda/2}\big) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - f(x)|\, dm < \epsilon,$$

luego

$$m\big(F_{\lambda/2}\big) < \frac{2\epsilon}{\lambda}.$$

Además, en vista del teorema 4.6 tenemos

$$m\big(H_{\lambda/2}\big) \leq \frac{2c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dm < \frac{2c\epsilon}{\lambda}$$

de donde

$$\begin{aligned} m\big(E_\lambda\big) &\leq m\big(F_{\lambda/2}\big) + m\big(H_{\lambda/2}\big) \\ & \quad 2(1+c)\frac{\epsilon}{\lambda} \to 0 \quad \text{si} \quad \epsilon \to 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$m\big(E_\lambda\big) = 0,$$

así hemos demostrado que

$$\limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dm - f(x) \right| = 0$$

$[m]$-c.t.p. Como

$$\begin{aligned} 0 \leq \liminf_{r\to 0} & \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dm - f(x) \right| \\ \leq \limsup_{r\to 0} & \left| \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dm - f(x) \right| = 0 \quad [m] - \text{c.t.p}, \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{r\to 0}\left|\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dm - f(x)\right| \\
&= \limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dm - f(x)\right| = 0 \quad [m]-\text{c.t.p},
\end{aligned}$$

por lo tanto, podemos escribir

$$\lim_{r\to 0}\left|\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dm - f(x)\right| = 0 \quad [m]-\text{c.t.p}$$

de aquí obtenemos

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|\,dm - f(x) = 0 \quad [m]-\text{c.t.p}$$

que era lo que queríamos demostrar. □

Teorema 4.8. *Sea $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, entonces $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Además existe una constante $C = C(p)$ tal que*

$$\|Mf\|_{L_p} \leq C(p)\|f\|_p.$$

Demostración. Para $p = \infty$, podemos observar que $Mf \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|Mf\|_{L_\infty} \leq \|f\|_\infty.$$

Supongamos que $1 < p < \infty$, luego para cada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ definamos

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \lambda/2 \\ \\ 0 & \text{si } |f(x)| < \lambda/2 \end{cases}$$

entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)| \leq |f_\lambda(x)| + \lambda/2,$$

así

$$|Mf(x)| \leq Mf_\lambda(x)| + \lambda/2,$$

luego
$$\{x : Mf(x) > \lambda\} \subset \{x : Mf_\lambda(x) > \lambda/2\}.$$
De esto último obtenemos
$$m\Big(\{x : Mf(x) > \lambda\}\Big) \leq m\Big(\{x : Mf_\lambda(x) > \lambda/2\}\Big),$$
En virtud del teorema 4.6
$$\begin{aligned} m\Big(\{x : Mf(x) > \lambda\}\Big) &\leq \frac{C}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|\, dm \\ &= \frac{C}{\lambda} \int\limits_{\{x:|f(x)|\geq \lambda/2\}} |f(x)|\, dm \end{aligned} \tag{4.3}$$
Luego por el corolario 2.72 y (4.3), resulta
$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\, dm &= p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} m\Big(\{x : Mf(x) > \lambda\}\Big)\, d\lambda \\ &\leq pC \int\limits_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int\limits_{\{x:f(x)\geq \lambda/2\}} |f(x)|\, dm \right) d\lambda, \\ &= pC \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int\limits_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2}\, d\lambda \right) dm, \\ &= \frac{2^{p-1}pC}{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||f(x)|^{p-1}\, dm, \\ &= \frac{2^{p-1}pC}{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dm, \end{aligned}$$
es decir, para $p > 1$, tenemos
$$\|Mf\|_{L_p} \leq C(p)\|f\|_{L_p},$$
donde $C(p) = \left(\dfrac{2^{p-1}pC}{p-1}\right)^{1/p}$. □

Las propiedades de la función maximal de Hardy-Littlewood, motivan la siguiente definición.

Definición 4.9. *Un operador T definido del espacio de las funciones medibles en si mismo, se dice que es sublineal si:*

1. $|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$,
2. $|T(\lambda f)(x)| \leq |\lambda||Tf(x)|$

para toda función medible f y g y todo escalar λ.

Las desigualdades en la definición 4.9, se cumplen casi en todas partes.

Definición 4.10. *Un operador sublineal T definido en $L_1(\mathbb{R}^n)$, se dice que es de tipo débil (p,q) con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, si existe una constante C, tal que para cada $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y cada $\lambda > 0$ se cumple*

$$m\Big(\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_p}\right)^q$$

y que es de tipo fuerte (p,q) si

$$\|Tf\|_{L_q} \leq C\|f\|_{L_p}$$

Nota:

a) La definición anterior se puede extender a cualquier espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

b) C no depende de f.

c) Claramente todo operador lineal es sublineal.

Proposición 4.11. *Sea T un operador de tipo fuerte (p,q). Entonces T es de tipo débil (p,q).*

Demostración. Por la desigualdad de Markov, con $g(\lambda) = \lambda^q$ y por el teorema 4.6 tenemos

$$\begin{aligned} m\Big(\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big) &= m\Big(\big\{x : |Tf(x)|^q > \lambda^q\big\}\Big) \\ &\leq \frac{C}{\lambda^q}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q \, dm, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} m\Big(\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big) &\leq \frac{C}{\lambda^q}\|Tf\|_{L_q}^q \\ &\leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_p}\right)^q. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.12 (Desigualdad de Kolmogorov). *Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita, si T es de tipo débil (p,q) y $0<r<q$, entonces*

$$\int_E |Tf(x)|^r\,dm \le C_{q,r}\Big[m(E)\Big]^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r.$$

Demostración. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}^+$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_E |Tf(x)|^r\,dm &= r\int_0^\infty \lambda^{r-1} m\Big(\big\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big)\,d\lambda \\
&= r\int_0^{\left(m(E)\right)^{-1/q}\|f\|_{L_p}} \lambda^{r-1} m\Big(\big\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big)\,d\lambda \\
&\quad + r\int_{\left(m(E)\right)^{-1/q}\|f\|_{L_p}}^\infty \lambda^{r-1} m\Big(\big\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big)\,d\lambda \\
&\le r\int_0^{\left(m(E)\right)^{-1/q}\|f\|_{L_p}} \lambda^{r-1} m(E)\,d\lambda \\
&\quad + r\int_{\left(m(E)\right)^{-1/q}\|f\|_{L_p}}^\infty \lambda^{r-1}\left(\frac{C^q}{\lambda^q}\|f\|_{L_p}^q\right)d\lambda \\
&= m(E)\Big[m(E)\Big]^{-r/q}\|f\|_{L_p}^r + rC^q\|f\|_{L_p}^r\frac{\Big(m(E)\Big)^{1-\frac{r}{q}}}{q-r} \\
&= \Big(1+\frac{rC^q}{q-r}\Big)\Big(m(E)\Big)^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_E |Tf(x)|^r\,dm \le \Big(1+\frac{rC^q}{q-r}\Big)\Big(m(E)\Big)^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r,$$

así

$$\int_E |Tf(x)|^r\,dm \le C_{r,q}\Big(m(E)\Big)^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r,$$

donde $C_{r,q} = 1 + \dfrac{rC^q}{q-r}$. □

El recíproco del teorema 4.12 también es cierto.

Corolario 4.13. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita, tal que*

$$\int_E |Tf(x)|^r\,dm \leq C_{r,q}\Big(m(E)\Big)^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r,$$

con $0<r<q$, entonces existe $C>0$ tal que

$$m\Big(\big\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_p}\right)^q.$$

Demostración. Sea $E = \big\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\big\}$ para $\lambda\in\mathbb{R}^+$, entonces

$$\int\limits_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} |Tf(x)|^r\,dm \leq C_{r,q}\Big[m\big(\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\}\big)\Big]^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r.$$

Por otra parte es claro que

$$\begin{aligned}\lambda^r m\Big(\big\{x : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big) &= \int\limits_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} \lambda^r\,dm\\ &\leq \int\limits_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} |Tf(x)|^r\,dm,\end{aligned}$$

luego

$$\lambda^r m\Big(\big\{x : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big) \leq C_{r,q}\Big[m\big(\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\}\big)\Big]^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_{L_p}^r$$

$$\begin{aligned}\lambda^r m\Big(\big\{x : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big)\Big[m\big(\{x\in E : |Tf(x)|>\lambda\}\big)\Big]^{\frac{r}{q}-1} &\leq C_{r,q}\|f\|_{L_p}^r\\ \Big[m\Big(\big\{x : |Tf(x)|>\lambda\big\}\Big)\Big]^{r/q} &\leq \left(\frac{C_{r,q}^{1/r}}{\lambda}\|f\|_{L_p}\right)^q.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.14. *Sea T un operador sublineal definido en $L_1(\mathbb{R}^n)+L_\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que T es de tipo débil $(1,1)$ y además satisface*

$$\|Tf\|_{L_\infty} \leq A\|f\|_{L_\infty},$$

donde A es una constante positiva, entonces para $f \in L_1(\mathbb{R}^n)+L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$, se tiene que

$$m\Big(\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big) \leq \frac{C}{\lambda} \int\limits_{[\lambda/A,\infty)} m\Big(\big\{x : |f(x)| > t\big\}\Big)\, dt$$

Demostración. Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, dado $\lambda > 0$ podemos escribir

$$f(x) = f_\lambda(x) + f^\lambda(x),$$

donde

$$f_\lambda(x) = f(x)\chi_{\{s:|f(s)|\leq\lambda/A\}}(x)$$

y

$$f^\lambda(x) = f(x)\chi_{\{s:|f(s)|>\lambda/A\}}(x).$$

De la sublinealidad de T, vemos que

$$\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\} \subset \big\{x : |Tf_{\lambda/2}(x)| > \lambda\big\} \cup \big\{x : |Tf^{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\big\}$$

así

$$\begin{aligned} m\Big(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\Big) \leq{}& m\Big(\{x : |Tf_{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\}\Big) \\ &+ m\Big(\{x : |Tf^{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\}\Big). \end{aligned}$$

Por otra parte, nótese que $\|f_{\lambda/2}\|_{L_\infty} \leq \dfrac{\lambda}{2A}$, entonces por hipótesis

$$\|Tf(x)\|_{L_\infty} \leq \lambda/2,$$

por lo tanto

$$m\Big(\{x : |Tf(x)| > \lambda/2\}\Big) = 0.$$

luego

$$\begin{aligned}
m\Big(\{x:|Tf(x)|>\lambda\}\Big) &\leq m\Big(\{x:|Tf^{\lambda/2}(x)|>\lambda/2\}\Big)\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f^{\lambda/2}(x)|\,dm\\
&= \frac{C}{\lambda}\int\limits_{\{x:|f(x)|>\frac{\lambda}{2A}\}}|f(x)|\,dm\\
&= \frac{C}{\lambda}\int\limits_{[\lambda/A,\infty)} m\Big(\Big\{x:|f(x)|>t\Big\}\Big)\,dt
\end{aligned}$$

□

Observación 4.15. *Si reemplazamos* $\frac{\lambda}{2A}$ *por cero, obtenemos que* T *es de tipo débil* $(1,1)$*; además nótese que* $m\Big(\Big\{x:|f(x)|>t\Big\}\Big)=0$ *siempre y cuando* $t\geq\|f\|_{L_\infty}$*, así, la integral de arriba se anula, entonces* $m\Big(\Big\{x:|Tf(x)|>\lambda\Big\}\Big)=0$*,si escogemos* $t=\frac{\lambda}{A}$*, resulta* $\|Tf\|_{L_\infty}\leq A\|f\|_{L_\infty}$*. De esta manera hemos demostrado que el recíproco del teorema 4.14 se cumple.*

Teorema 4.16 (Interpolación de Marcinkiewick)**.** *Sea* $1\leq p_0\leq p_1<\infty$*. Supongamos que* T *es un operador sublineal definido en* $L_{p_0}(\mathbb{R}^n)+L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$*, el cual es simultáneamente de tipo débil* (p_0,p_0) *y de tipo débil* (p_1,p_1)*. Entonces* T *es de tipo fuerte* (p,p) *con* $p_0<p<p_1$*.*

Demostración. Sea $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$; para cada $\lambda>0$ podemos escribir

$$f(x)=f_\lambda(x)+f^\lambda(x),$$

donde

$$f_\lambda(x)=f(x)\chi_{\{x:|f(x)|\leq\lambda\}}(x)$$

y

$$f^\lambda(x)=f(x)\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x).$$

Consideremos sólo el caso $p_1<\infty$. Ahora, queremos demostrar que $f_\lambda\in$

$L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$ y $f^\lambda \in L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$, para ello consideremos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^{p_0}\, dm &= \lambda^{p_0} \int\limits_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p_0}\, dm \\ &< \lambda^{p_0} \int\limits_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p}\, dm \\ &< \lambda^{p_0-p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dm \\ &< \lambda^{p_0-p} \|f\|_{L_p}^p,\end{aligned}$$

así $f_\lambda \in L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$. Por un argumento similar al dado en las líneas de arriba podemos demostrar que $f^\lambda \in L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$. En virtud de la sublinealidad de T se sigue que

$$\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\} \subset \big\{x : |Tf_{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\big\} \cup \big\{x : |Tf^{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\big\}.$$

Por otra parte, gracias al corolario 6.6.1 resulta

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L_p}^p &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\, dm \\ &= p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} m\Big(\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big)\, d\lambda \\ &\le p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} m\Big(\big\{x : |Tf_{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\big\}\Big)\, d\lambda \\ &\quad + p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} m\Big(\big\{x : |Tf^{\lambda/2}(x)| > \lambda/2\big\}\Big)\, d\lambda \\ &\le p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \frac{C^{p_0}}{\lambda^{p_0}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^{p_0}\, dm\right)\, d\lambda \\ &\quad + p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \frac{C^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\lambda(x)|^{p_1}\, dm\right)\, d\lambda \\ &\le p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-p_0-1} C^{p_0} \left(\int\limits_{\{x:|f(x)|>\lambda/2\}} |f(x)|^{p_0}\, dm\right)\, d\lambda\end{aligned}$$

$$+ p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\frac{C^{p_1}}{\lambda^{p_1}}\left(\int_{\{x:|f(x)|\leq\lambda/2\}} |f(x)|^{p_1}\, dm\right) d\lambda,$$

Por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L_p}^p &\leq pC^{p_0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|f(x)|^{p_0}\int_0^{2|f(x)|}\lambda^{p-p_0-1}\, d\lambda\right) dm \\ &\quad + pC^{p_1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|f(x)|^{p_1}\int_{2|f(x)|}^\infty \lambda^{p-p_1-1}\, d\lambda\right) dm \\ &= \frac{2^{p-p_0}pC^{p_0}}{p-p_0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}\, dm \\ &\quad + \frac{2^{p-p_1}pC^{p_1}}{p_1-p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p_1}|f(x)|^{p-p_1}\, dm,\end{aligned}$$

esto es

$$\|Tf\|_{L_p}^p \leq p\left(\frac{2^{p-p_0}C^{p_0}}{p-p_0}+\frac{2^{p-p_1}C^{p_1}}{p_1-p}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\, dm$$

así

$$\|Tf\|_{L_p}^p \leq C(p_0,p,p_1)\|f\|_{L_p},$$

donde

$$C(p_0,p,p_1) = \left(p\frac{2^{p-p_0}C^{p_0}}{p-p_0}+\frac{2^{p-p_1}C^{p_1}}{p_1-p}\right)^{1/p}$$

□

Teorema 4.17. *Si T es un operador de tipo débil $(1,1)$ y $B\subset\mathbb{R}^n$ tal que $m(B)<\infty$, entonces*

$$\int_B |Tf(x)|\, dm \leq m(B) + C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\log^+|f(x)|\, dm$$

donde $\log^+ t = \text{máx}(\log t, 0)$ y C es una constante independiente de f.

Demostración. En virtud del corolario 6.6.1 con $p = 1$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_B |Tf(x)|\,dm &= \int_0^\infty m\Big(\big\{x \in B : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big)\,d\lambda \\
&= \int_0^1 m\Big(\big\{x \in B : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big)\,d\lambda \\
&\quad + \int_1^\infty m\Big(\big\{x \in B : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big)\,d\lambda \\
&\leq m(B) + \int_1^\infty \left(\frac{C}{\lambda} \int_{\{x \in B : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|\,dm \right) d\lambda \\
&\leq m(B) + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x)| \int_1^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) dm \\
&= m(B) + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)|\,dm.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.18 (Cotlar). *Supóngase que S y T son operadores sublineales y que T está mayorado por S en el siguiente sentido: Si $C(x,r) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : r \leq |x-y| \leq 2r\big\}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ le corresponde $0 < \widetilde{r} < \infty$, tal que $Tf(x) \leq \inf\limits_{y \in C(x,\widetilde{r})} |Sf(y)|$. Entonces si S es de tipo débil (p,p) para algún $p > 0$, T también es de tipo débil (p,p).*

Demostración. Sea $0 < q < p$, entonces

$$|Tf(x)|^q \leq \inf_{y \in C(x,\widetilde{r})} |Sf(y)|^q,$$

luego

$$\begin{aligned}
|Tf(x)|^q &\leq \frac{1}{m\big(C(x,\widetilde{r})\big)} \int_{C(x,\widetilde{r})} |Sf(y)|^q\,dm \\
&\leq \frac{m\big(B(x,4\widetilde{r})\big)}{m\big(C(x,\widetilde{r})\big) m\big(C(x,4\widetilde{r})\big)} \int_{B(x,4\widetilde{r})} |Sf(y)|^q\,dm \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Donde $B(x,\widetilde{r})$ denota la bola de centro en x y radio $\widetilde{r}$. Entonces por (4.4)

$$|Tf(x)|^q \leq CM\big(|Sf|^q(x)\big)$$

Con C independiente de x y f.

Note que en virtud del teorema 4.6 M es de tipo débil $(1,1)$ y por el teorema 4.8 $M\big(|Sf|^q\big) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|M\big(|Sf|^q\big)\|_{L_\infty} \leq C\||Sf|^q\|_{L_\infty}.$$

Ahora, invocando al teorema 4.14 para obtener

$$\begin{aligned} m\Big(\big\{x : M(|Sf|^q(x)) > \lambda^q/2\big\}\Big) &\leq \frac{C}{\lambda^q} \int\limits_{[C\lambda^q,\infty)} m\Big(\big\{x : |Sf(x)| > t^{1/q}\big\}\Big)\, dt \\ &\leq \frac{C}{\lambda^q} \int\limits_{[C\lambda^q,\infty)} \|f\|_{L_p}^p t^{-p/q}\, dt \\ &= C\lambda^{-p}\|f\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

Así

$$m\Big(\big\{x : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big) \leq C\Big(\frac{\|f\|_{L_p}}{\lambda}\Big)^p.$$

□

Ejercicios

1. Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida finita. Demuestre que el dual de $L_1(\mu)$ es $L_\infty(\mu)$.

2. Si $f \geq 0$ es una función no decreciente en $(0,\infty)$ y $0 < p \leq q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\left(\int_0^\infty (t^\alpha f(t))^q \,\frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty (t^\alpha f(t))^p \,\frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$

donde $C = C(p,q,\alpha)$.

3. Sea f una función decreciente en $[a,b]$ $(a \neq 0)$ tal que $0 < \int_0^b f(x)\,dx < \infty$ y $0 < \int_0^a f(x)\,dx < \infty$. Demostrar que

$$\ln\left(\frac{\int_0^b f(x)\,dx}{\int_0^a f(x)\,dx}\right) \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

lo que es equivalente a

$$a\int_0^b f(x)\,dx \leq b\int_0^a f(x)\,dx.$$

4. Sea $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ una bola abierta de centro x y radio r. Definamos el conjunto de Lebesgue de f como

$$L_f = \left\{ x : \lim_{r\to 0} \frac{1}{m\left(B(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0 \right\}.$$

Demostrar que si $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ entonces

$$|f(x)| \leq Mf(x) \qquad \text{para cada } x \in L_f$$

donde $Mf(x)$ es la función maximal de Hardy-Littlewood.

5. Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ tal que

$$\left| \int_E f\,dm \right| \leq m(E)$$

donde E es un conjunto Lebesgue-medible. Demuestre que $|f| \leq 1$ c.t.p.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x} & \text{si } x \in (0, 1/e) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1/e). \end{cases}$$

Demuestre que

a) $\int_{(0,x)} f(t)\,dt = -1/\ln x$ para $x \in (0, 1/e)$.

b) $\int_0^r Mf(x)\,dx = \infty$.

Capítulo 5

Convolución

5.1. Resultados básicos

Definición 5.1. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ definamos $\sigma(E) \subset \mathbb{R}$ como $\sigma(E) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\big\}$*

Proposición 5.2. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Entonces T es continua en 0.*

Demostración. En primer lugar, queremos demostrar que $T(V \times V) = V + V$ para $V \subset \mathbb{R}$, donde

$V + V = \big\{x + y : x \in V,\ y \in V\big\}$. En efecto, sea $z \in T(V \times V) \Leftrightarrow$ existe $(x, y) \in V \times V$ tal que $z = T(x, y) \Leftrightarrow z = x + y$ con $x \in V$, $y \in V \Leftrightarrow z \in V + V$. Así $T(V \times V) = V + V$.

En segundo lugar, queremos demostrar que T es continuo en 0. Para ello sea U una vecindad de 0 en $\mathbb{R}$ y V una vecindad de 0 tal que $V + V \subset U$, note que $V \times V$ es una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^2$ pero

$$T(V \times V) = V + V \subset U,$$

demostrándose así la continuidad de T en 0. $\square$

Observación 5.3. *Una demostración alternativa de la proposición 5.2, consiste en observar que $\mathbb{R}^2$ como espacio normado está dotado de la norma*

$$\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2} = \|x\|_{\mathbb{R}} + \|y\|_{\mathbb{R}},$$

luego, para $T(x, y) = x + y$, se tiene

$$\begin{aligned} \|T(x, y) - T(x_0, y_0)\|_{\mathbb{R}} &= \|x - x_0 + y - y_0\|_{\mathbb{R}} \\ &\leq \|x - x_0\|_{\mathbb{R}} + \|y - y_0\|_{\mathbb{R}} \\ &= \|(x - x_0, y - y_0)\|_{\mathbb{R}^2} \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto último, nos dice que la continuidad de T en (x_0, y_0) es uniforme.

Proposición 5.4. *Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x - y$. Entonces*

I. *h es continua en 0.*

II. $h^-1(E) = \sigma(E)\ \forall E \in \mathbb{R}$.

III. *Si E es abierto en $\mathbb{R}$, entonces $\sigma(E)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.*

IV. *Si E es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $\sigma(E)$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.*

V. $\sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(E_n)$

VI. $\sigma\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(E_n)$.

Demostración. (i) es una consecuencia inmediata de la proposición 5.1.

(ii)

$$\begin{aligned}\text{Sea}\quad E \in \mathbb{R} \text{ y } (x,y) \in h^{-1}(E) &\Leftrightarrow h(x,y) \in E\\ &\Leftrightarrow x - y \in E\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma(E).\end{aligned}$$

Por lo tanto $h^{-1}(E) = \sigma(E)$.

(iii) y (iv) se obtienen de (ii).

(v) $(x,y) \in \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \Leftrightarrow x - y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Leftrightarrow x - y \in E_n$ para algún $n \Leftrightarrow$ $(x,y) \in \sigma(E_n) \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(E_n)$.

De esta manera hemos demostrado que

$$\sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(E_n).$$

(vi) Lo dejamos como ejercicio. □

Lema 5.5. *Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto Lebesgue medible, entonces $\sigma(E)$ es un conjunto medible en el espacio producto.*

Demostración. Supongamos que E es un conjunto acotado, entonces $m(E) < \infty$. El lema es cierto.

Si E es un conjunto G_δ o F_σ. En efecto, por un resultado conocido de teoría de la medida podemos hallar un conjunto K el cual es F_σ y un conjunto H el cual es G_δ tal que

$$K \subset E \subset H \quad \text{y} \quad m(K) = m(E) = m(H). \tag{5.1}$$

Entonces $m(H \setminus K) = 0$.

Es claro que $\sigma(K) \subset \sigma(E) \subset (H)$.

Nótese que para todo $A \subset \mathbb{R}$ tenemos que

$$\chi_{\sigma(A)}(x, y) = \chi_A(x - y).$$

Luego para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{\sigma(K)}(x, y)\, dy &= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_K(x - y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_K(-y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_K(y)\, dy \\ &= m(K) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sea $C \in \mathbb{R}$ un conjunto arbitrario, acotado en $\mathbb{R}$, en virtud del teorema de Tonelli, tenemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{C\times\mathbb{R}} \chi_{\sigma(K)}\, dm \times m &= \int\limits_{C} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{\sigma(K)}\, dy\, dx \\ &= \int\limits_{C} m(K)\, dx \\ &= m(K) m(C). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Similarmente, podemos demostrar que

$$\int\limits_{C\times\mathbb{R}} \chi_{\sigma(H)}\, dm \times m = m(H) m(C). \tag{5.4}$$

Así

$$\int\limits_{C\times\mathbb{R}} \chi_{\sigma(H)} - \chi_{\sigma(K)}\, dm \times m = 0. \tag{5.5}$$

Como $\sigma(K) \subset \sigma(H)$, entonces

$$\begin{aligned}\chi_{\sigma(H)} - \chi_{\sigma(K)} &= \chi_{\sigma(H)\Delta\sigma(K)} \\ &= \chi_{\sigma(H)-\sigma(K)},\end{aligned}$$

luego

$$\int\limits_{C\times\mathbb{R}} \chi_{\sigma(H)-\sigma(K)}\, dm \times m = \int\limits_{C\times\mathbb{R}} \chi_{\sigma(H)-\sigma(K)}\, dm \times m$$

es decir

$$\int\limits_{C\times\mathbb{R}} \chi_{\sigma(H)-\sigma(K)}\, dm \times m = m \times m\Big([\sigma(H) - \sigma(K)] \cap C \times \mathbb{R}\Big).$$

Por (5.5) resulta

$$m \times m\Big([\sigma(H) - \sigma(K)] \cap C \times \mathbb{R}\Big) = 0.$$

En particular

$$m \times m\Big([\sigma(H) - \sigma(K)] \cap [-n, n] \times \mathbb{R}\Big) = 0. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pero

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big([\sigma(H) - \sigma(K)] \cap [-n, n] \times \mathbb{R}\Big) = \sigma(H) - \sigma(K),$$

de aquí, concluimos que

$$m \times m\Big(\sigma(H) - \sigma(K)\Big) = 0.$$

Por otra parte, sabemos que

$$\sigma(E) - \sigma(K) \subset \sigma(H) - \sigma(K)$$

en virtud de que $m \times m$ es una medida completa se tiene $\sigma(E) - \sigma(K)$ es un conjunto medible, además $\sigma(K)$ es un conjunto F_σ, por lo tanto

$$\sigma(E) = \sigma(K) \cup \Big(\sigma(E) - \sigma(K)\Big)$$

es un conjunto medible, con esto queda demostrado el lema 5.5 □

Corolario 5.6. *Sea f una función medible. Definamos $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por $F(x,y)=f(x-y)$. Entonces F es medible en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y)=x-y.$$

Note que
$$F(x,y)=f(h(x,y))=f\circ h(x,y)$$

Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned}\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:F(x,y)<\alpha\big\}&=F^{-1}(-\infty,\alpha)\\&=(f\circ h)^{-1}(-\infty,\alpha)\\&=h^{-1}\big(f^{-1}(-\infty,\alpha)\big).\end{aligned}$$

Como f es medible, entonces $f^{-1}(-\infty,\alpha)$ es medible.
Sea $F(x,y)=f(x-y)$ y $G(x,y)=g(y)$.
En virtud del corolario 5.6 F es medible en $\mathbb{R}^2$, Ahora, obsérvese que

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:G(x,y)<\alpha\big\}=\mathbb{R}\times g^{-1}(-\infty,\alpha),$$

entonces G es medible en $\mathbb{R}^2$. Así, resulta ϕ medible en $\mathbb{R}^2$.
Por otra parte, en virtud del teorema de Tonelli, resulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|\phi(x,y)|\,dm\times m&=\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,dx\right]|g(y)|\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx\right]|g(y)|\,dy\\&=\|f\|_1\int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,dy\\&=\|f\|_1\|g\|_1<\infty,\end{aligned}$$

si $E=f^{-1}(-\infty,\alpha)$, entonces E es medible, así

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:F(x,y)<\alpha\big\}=h^{-1}(E),$$

es decir $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:F(x,y)<\alpha\big\}=\sigma(E)$.
Por el lema 5.5 $\sigma(E)$ es medible, por lo tanto F es medible. $\square$

Teorema 5.7. *Sean f, $g \in L_1\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m\big)$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos*

$$C(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

Entonces $C \in L_1(m)$ y además $\|C\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Demostración. Primero debemos demostrar que si $\varphi(x,y) = f(x,y)g(y)$, entonces φ es medible en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto $\varphi \in L_{\mathbb{R}^2}$. Luego, por el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} |C(x)|\,dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy \right] dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dx \right] |g(y)|\,dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \right] |g(y)|\,dy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Así

$$\|C\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

□

Definición 5.8. *La función C definida en el teorema 5.7 recibe el nombre de convolución de f y g y se denota por $f * g$, es decir*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Note que si f, $g \in L_1(m)$, entonces $f * g \in L_1(m)$ y

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Teorema 5.9. *Sean f, $g \in L_1(m)$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$, entonces tenemos:*

a) $f * g = g * f$ *(Conmutatividad)*

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ *(Asociatividad)*

c) $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$ *(Distributividad)*

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 5.10. *Sea* $g \in L_1(m)$ *y* $f \in L_p(m)$ *con* $1 \le p \le \infty$*. Entonces* $\|f * g\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p$

Demostración. Si $p = \infty$ y $f \in L_\infty$, entonces

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy \\ &\le \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy \\ &= \|g\|_1 \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

De donde

$$\|(f * g)(x)\|_\infty \le \|g\|_1 \|f\|_\infty.$$

Sea $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ el índice conjugado de p, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ahora, note que por la desigualdad de Hölder, el teorema de Tonelli y la invariancia por traslación de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \big(g(y)\big)^{1/p} \big(g(y)\big)^{1/q}\,dy \right]^p dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|\,dy \right)^{1/p} \right]^p \left[\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy \right]^{p/q} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|\,dy \right) \|g\|_1^{p/q}\,dx \\ &= \|g\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|\,dy \right) dx \\ &= \|g\|_1^{p/q} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p\,dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy \right) \\ &= \|g\|_1^{p/q} \|f\|_p^p \|g\|_1 \\ &= \|g\|_1^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\|f * g\|_p^p \leq \|g\|_1^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_p^p,$$

finalmente

$$\begin{aligned}\|f * g\|_p &\leq \|g\|_1^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \|f\|_p \\ &\leq \|g\|_1 \|f\|_p.\end{aligned}$$

□

Observación 5.11. *El teorema 5.10 juega un papel importante en la teoría de semigrupos. Por ejemplo, definamos en $L_p(m)$ el siguiente operador*

$$T_t(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy$$

Con $f \in L_p(m)$, entonces podemos escribir

$$T_t(f)(x) = (G_t * f)(x), \quad \textit{donde} \quad G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Por el teorema 5.10 tenemos

$$\|T_t(f)\|_p = \|G_t * f\|_p \leq \|G_t\|_1 \|f\|_p,$$

pero

$$\|G_t\|_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Así, finalmente $\|T_t(f)\| \leq 1$, tomando $T(0) = I$ es el operador identidad, se demuestra fácilmente que $T_t T_s(f) = T_{t+s}(f)$, este semigrupo se llama semigrupo de Gauss-Weierstrass.

Observación 5.12. *La siguiente aplicación del teorema 5.9, es sencillamente sorprendente, ya que podemos transformar un operador que no está definido por una convolución y así poder aplicar el teorema 5.9. En efecto, sea H el operador dado en la definición 3.9(Operador de Hardy), es decir*

$$Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy \quad \textit{para} \quad 0 < x < \infty.$$

hagamos el siguiente cambio de variable:

$$x = e^s \quad y = e^t$$

Observe que

$$Hf(e^s) = e^{-s} \int_{-\infty}^{s} f(e^t)e^t \, dt.$$

Por otra parte, note que

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p = \int_0^{\infty} |f(x)|^p \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(e^s)|^p e^s \, ds \\ &= \|e^{s/p} f(e^s)\|_{L_p}^p \end{aligned}$$

Ahora, bien la ecuación

$$Hf(e^s) = e^{-s} \int_{-\infty}^{s} f(e^t)e^t \, dt$$

nos conduce a

$$\begin{aligned} e^{s/p} Hf(e^s) &= e^{-s/q} \int_{-\infty}^{s} e^{t/p} f(e^t) e^{t/q} \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{s} e^{t/p} f(e^t) e^{-\frac{s-t}{q}} \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{s} e^{t/p} f(e^t) g(s-t) \, dt, \end{aligned}$$

donde

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y/q} & \textit{si } 0 < y < \infty \\ \\ 0 & \textit{si } -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Como podemos ver hemos transformado (via un cambio de variable) el operador de Hardy en un operador definido por una convolución, en tal sentido podemos aplicar el teorema 5.9 y así obtener

$$\begin{aligned} \|Hf\|_p &= \|e^{s/p} Hf(e^s)\|_p \\ &\leq \|g\|_1 \|e^{t/p} f(e^t)\|_p \\ &= \|g\|_1 \|f\|_p. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\|g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\,dy = \int_{0}^{\infty} |g(y)|\,dy\\ &= \int_0^{\infty} e^{-y/q}\,dy\\ &= q\\ &= \frac{p}{p-1},\end{aligned}$$

Finalmente

$$\|Hf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Observación 5.13. *Si fijamos $g \in L_1(m)$ y definimos*

$$T(f) = f * g.$$

Entonces podemos interpretar el teorema 5.10 de la siguiente manera, para $1 \leq p \leq \infty$ el operador $T : L_p(m) \to L_p(m)$ es un operador lineal acotado.

Teorema 5.14 (W.H. Young)**.** *Sean p, q y r números reales tales que $p > 1$, $q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} > 0$. Sean $f \in L_p(m)$ y $g \in L_q(m)$. Entonces $f * g \in L_r(m)$ y*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Sean a, b y c números reales tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ y $a = r$. Note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) - \frac{1}{a}\\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.\end{aligned}$$

Ahora, escribamos

$$\begin{aligned}|f(x-y)g(y)| &= |f(x-y)||g(y)|\\ &= \left(|f(x-y)|^{p/a}|g(y)|^{q/a}\right)\left(|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})}|g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{a})}\right).\end{aligned}$$

En virtud del corolario 2.24, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\,dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)|^{p/a}|g(y)|^{q/a}\right]^{a}\,dy\right)^{1/a} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{pb(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})}\,dy\right)^{1/b}$$

$$\cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^{qc(\frac{1}{q}-\frac{1}{a})}\,dy\right)^{1/c},$$

pero $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$ y $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{c}$, así

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{p}|g(y)|^{q}\,dy\right)^{1/a} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{p}\,dy\right)^{1/b} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^{q}\,dy\right)^{1/c}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{p}|g(y)|^{q}\,dy\right)^{1/r} \|f\|_p^{p/b}\|g\|_q^{q/c}.$$

Definamos

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\,dy,$$

entonces

$$|h(x)|^r \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{p}|g(y)|^{q}\,dy\right) \|f\|_p^{r\frac{p}{b}}\|g\|_q^{r\frac{q}{c}},$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^r\,dx \leq \|f\|_p^{r\frac{p}{b}}\|g\|_q^{r\frac{q}{c}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)|^p \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^q\,dy\right]\,dx$$

$$\leq \|f\|_p^{r\frac{p}{b}}\|g\|_q^{r\frac{q}{c}}\|f\|_p^{p}\|g\|_q^{q}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^r\,dx \leq \|f\|_p^{p(\frac{r}{b}+1)}\|g\|_q^{q(\frac{r}{c}+1)}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^r \, dx\right)^{1/r} \leq \|f\|_p^{p(\frac{1}{b}+\frac{1}{r})} \|g\|_q^{q(\frac{1}{c}+\frac{1}{r})}.$$

Note que

$$p(\frac{1}{b}+\frac{1}{r}) = p(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}) = 1$$

y

$$q(\frac{1}{c}+\frac{1}{r}) = q(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}) = 1.$$

Así

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^r \, dx\right)^{1/r} \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

de esto último es fácil ver que $f * g \in L_r(m)$, así

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \qquad \square$$

5.2. El soporte y la convolución

Definición 5.15. *El soporte de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

(siempre es cerrado).

Corolario 5.16. *Si $x \notin \operatorname{supp}(f)$, entonces existe un entorno abierto de x donde f se anula.*

Observación 5.17. *Brezis observó que esta noción no es adecuada cuando trabajamos con clases de equivalencia tales como el espacio L_p, en virtud que con la definición 5.15 no es cierto que si $f = g$ c.t.p entonces $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(g)$.*

En tal sentido, se da la siguiente definición.

Definición 5.18. *$x \notin \operatorname{supp}(f)$ si y sólo si existe una abierto V tal que $x \in V$ y $f = 0$ casi en todo punto de V.*

Si f es una función continua en $\mathbb{R}^n$ no es difícil verificar que esta nueva definición coincide con la definición 5.15.

Por otra parte, si $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ (con la nueva definición) es claro que $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(g)$. Así, podemos hablar del soporte de una función $f \in L_p$ sin preocuparnos cual representante de la clase escogemos.

Proposición 5.19. *Si f y g tienen soporte compacto, entonces $f * g$ tiene soporte compacto. Además*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Demostración. Note que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\, dt = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(t)g(x-t)\, dt$$

pues si $t \notin \operatorname{supp}(f)$, entonces $f(t) = 0$.

Análogamente si $x-t \in \operatorname{supp}(g)$, entonces $t \in x - \operatorname{supp}(g)$, luego $g(x-t) = 0$ si $t \notin x - \operatorname{supp}(g)$. Se deduce que

$$(f * g)(x) = \int_{\operatorname{supp}(f) \cap (x - \operatorname{supp}(g))} f(t)g(x-t)\, dt.$$

Si $(f * g)(x) \neq 0$, entonces $\operatorname{supp}(f) \cap (x - \operatorname{supp}(g)) \neq \emptyset$ luego existe $y \in \operatorname{supp}(f) \cap (x - \operatorname{supp}(g))$. Pero como $y \in x - \operatorname{supp}(g)$, entonces $y = x - w$ con $w \in \operatorname{supp}(g)$. Así pues $x = y + w$ con $y \in \operatorname{supp}(f)$, $w \in \operatorname{supp}(g)$.

Así hemos demostrado que

$$\{(f * g)(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g),$$

pero la suma de dos compactos es compacto (no vale para cerrados) por lo tanto

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$ □

Teorema 5.20. *Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ y k es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * k$ es acotada y uniformemente continua.*

Demostración. Veamos que $f * k$ es uniformemente continua. Si $f = 0$, entonces $f * k = 0$ en cuyo caso no hay nada que demostrar. Supongamos que $f \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser k uniformemente continua encontramos un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|k(x) - k(y)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}$, entonces

$$\begin{aligned}
|f * k(x) - f * k(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)k(x-t)\, dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(t)k(y-t)\, dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)||k(x-t) - k(y-t)|\, dt \\
&< \frac{\varepsilon}{\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, dt \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

ya que $|(x-t)-(y-t)| = |x-y| < \delta$. Esto muestra que $f*k$ es uniformemente continua. Por el teorema 5.10 sabemos que

$$\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_1 \|k\|_\infty.$$ □

5.3. Convolución con funciones suaves

Definición 5.21. *Para $m \in \mathbb{N}$ denotamos C^m la clase de funciones $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ tales que las derivadas parciales hasta el orden m incluido existen y son continuas.*

El subconjunto de funciones de clase C^m con soporte compacto se denota C_0^m.

Similarmente C^∞ es el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables y C_0^∞ el subconjunto de las de soporte compacto.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es un multi-índice con $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, podemos considerar la derivada parcial

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Siendo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Teorema 5.22. *Si $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ y $k \in C_0^m$, entonces $f * k \in C_0^m$ y además*

$$D^\alpha (f * k)(x) = (f * D^\alpha k)(x)$$

siempre que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq m$.

Demostración. Primero demostremos que si k es continua con soporte compacto, entonces $f * k$ es continua.

$$\begin{aligned}
&|(f * k)(x + h) - (f * k)(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) k(x + h - t)\, dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(t) k(x - t)\, dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)[k(x + h - t) - k(x - t)]\, dt \right|
\end{aligned}$$

Si $u = x - t$, entonces $t = x - u$, luego

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)[k(u + h) - k(u)]\, du \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - u)|^p\, du \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(u + h) - k(u)|^q\, du \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\lim_{h \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(u + h) - k(u)|^q\, du \right)^{1/q} = 0.$$

En efecto, como k es continua y tiene soporte compacto, entonces es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^n$, si $|h| < \delta$, entonces

$$|k(u+h) - k(u)| < \varepsilon.$$

Podemos además suponer que $\delta < 1$. En consecuencia si $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |k(u+h) - k(u)|^q \, du &= \int_I |k(u+h) - k(u)|^q \, du \\ &< \int_I \varepsilon^q \, du \\ &= \varepsilon^q m(I)\end{aligned}$$

donde $I = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \operatorname{supp}(k)) \leq 1\}$ (que es compacto y por lo tanto tiene medida finita).

Sea $k \in C_0^m$ $(m \geq 1)$ fijada i con $1 \leq i \leq m$ y sea e_i el i-ésimo vector de la base canónica, entonces

$$\begin{aligned}&\frac{(f*k)(x + h \cdot e_i) - (f*k)(x)}{h} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left[\frac{k(x - t + h \cdot e_i) - k(x-t)}{h}\right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left[\frac{\partial k}{\partial x_i}(x - t + h^*)\right] dt\end{aligned}$$

por el teorema del valor medio, para algún $h^* = \zeta \cdot e_i$ dependiendo de x y t, donde ζ está entre 0 y h.

Por lo tanto, cuando $|h| \to 0$, $\frac{\partial k}{\partial x_i}(x - t + h^*)$ converge a $\frac{\partial k}{\partial x_i}(x-t)$ uniformemente en t.

Como $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ tiene soporte compacto, se deduce del teorema de la convergencia uniforme que la última integral converge a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left[\frac{\partial k}{\partial x_i}(x-t)\right] dt.$$

Por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*k)(x)$ existe y es igual a $\left(f * \frac{\partial k}{\partial x_i}\right)(x)$ que es continua por lo antes demostrado. Esto demuestra el teorema para el caso $m = 1$, la demostración para cualquier m es inmediata por inducción (aplicando el caso $m = 1$). Se sigue que $f * k \in C^\infty$ si $f \in L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ y $k \in C_0^\infty$.

Además por el teorema 5.20 $f * k$ tiene soporte compacto. $\square$

5.4. Aproximaciones de la identidad

Definición 5.23. *Dada una función* $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$ *definamos*

$$k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Por ejemplo, si $k = \chi_B$ donde $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, entonces tenemos que

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-n}, & \text{si } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{si } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

es decir, $k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi_{B_\varepsilon(0)}$ donde $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$. Vemos que a medida que hacemos pequeño a ε, k_ε es una función con un pico más elevado y un soporte más pequeño.

Para cualquier función k positiva ocurre lo mismo.

Lema 5.24. *Si* $k \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ *y* $\varepsilon > 0$*, entonces*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} k(x)\,dx$.
2. *Para cada* $\delta > 0$ *fijo*

$$\int_{|x|>\delta} |k_\varepsilon(x)|\,dx \to 0 \quad \textit{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Demostración. 1. Basta hacer el cambio $y = \frac{x}{\varepsilon}$, luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} k(y)\,dy.$$

($y = \frac{x}{\varepsilon}$ es un cambio lineal de coordenadas.)

2. Fijemos un $\delta > 0$ y hacemos el mismo cambio de variable, entonces

$$\int_{|x|>\delta} |k_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{|x|>\delta} \varepsilon^{-n} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx$$
$$= \int_{|y|>\delta/\varepsilon} |k(y)|\,dy.$$

Pero $\delta/\varepsilon \to +\infty$ cuando $\varepsilon \to 0$. Como $k \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ la última integral tiende a cero a medida que $\varepsilon \to 0$.

$\square$

Observación 5.25. *Si $k \geq 0$, la primera propiedad significa que el área bajo las gráficas k y k_ε es la misma, mientras que la segunda significa que para ε pequeño el área bajo el gráfico de k_ε está concentrada en una región sobre un pequeño entorno del origen.*

Para cualquier $k \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ consideremos

$$(f * k_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) k_\varepsilon(x)\, dt,$$

Ahora, vamos a demostrar que $(f * k_\varepsilon)(x) \to f(x)$ puntualmente cuando $\varepsilon \to 0$, bajo hipótesis adecuadas sobre f y k.

Definición 5.26. *Una familia $\{k_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ de núcleos para la cual $f * k_\varepsilon \to f$ en algún sentido, se llama una aproximación de la identidad.*

Teorema 5.27. *Sea $f_\varepsilon = f * k_\varepsilon$ donde $k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\, dx = 1$. Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.*

Demostración. Por la parte 1 del lema anterior tenemos

$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) k_\varepsilon(t)\, dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-t) - f(x)] k_\varepsilon(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)| |k_\varepsilon(t)|\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)| |k_\varepsilon(t)|^{1/p} |k_\varepsilon(t)|^{1/q}\, dt \end{aligned}$$

donde q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes p y q obtenemos que

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |k_\varepsilon(t)|\, dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(t)|\, dt \right)^{1/q}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |k_\varepsilon(t)|\, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(t)|\, dt \right)^{p/q} dx \\ &= \|k\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |k_\varepsilon(t)|\, dt \right) dx. \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración (lo cual está justificado por el teorema de Fubini-Tonelli, pues el integrando es no negativo) obtenemos

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_p^p &\le \|k\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |k_\varepsilon(t)|\, dx \right) dt \\ &= \|k\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \right) dt\end{aligned}$$

haciendo $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx = \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p^p$ tenemos

$$\|f_\varepsilon - f\|_p^p \le \|k\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(t)| \phi(t)\, dt.$$

Para $\delta > 0$ escribimos

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(t)|\phi(t)\, dt = A_{\varepsilon,\delta} + B_{\varepsilon,\delta}$$

donde

$$A_{\varepsilon,\delta} = \int_{|t|<\delta} |k_\varepsilon(t)|\phi(t)\, dt$$

y

$$B_{\varepsilon,\delta} = \int_{|t|\ge\delta} |k_\varepsilon(t)|\phi(t)\, dt.$$

Dado $\eta > 0$, podemos elegir $\delta > 0$ tan pequeño que $\phi(t) < \eta$ si $|t| < \delta$, ya que $\phi(t) \to 0$ cuando $|t| \to 0$ pues $f \in L_p(m)$

$$A_{\varepsilon,\delta} \le n \int_{|t|<\delta} |k_\varepsilon(t)|\, dt \le n\|k\|_1,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por otra parte, por la desigualdad de Minkowski ϕ es una función acotada, de hecho

$$\begin{aligned}[\phi(t)]^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= 2\|f\|_p,\end{aligned}$$

de modo que

$$\|\phi\|_\infty \le (2\|f\|_p)^p = C,$$

luego

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon,\delta} &= \int_{|t|\geq\delta} |k_\varepsilon(t)|\phi(t)\,dt \\ &\leq C\int_{|t|\geq\delta} |k_\varepsilon(t)|\,dt \to 0. \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto

$$I_\varepsilon \to 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0$$

y esto demuestra el teorema. □

Corolario 5.28. *Para* $1 \leq p < \infty$*,* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L_p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$*.*

Demostración. Sea $f \in L_p(m)$ $(1 \leq p < \infty)$. Dado $\eta > 0$ escribimos $f = g+h$ donde g tiene soporte compacto y $\|h\|_p < \eta$. Elijamos un núcleo $k \in C_0^\infty$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\,dx = 1$ y sea $g_\varepsilon = g * k_\varepsilon$, entonces $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\|g_\varepsilon - g\|_p \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Por los resultados anteriores, elijamos ε tal que $\|g_\varepsilon - g\|_p < \eta$, entonces

$$\|f - g_\varepsilon\|_p \leq \|h\|_p + \|g - g_\varepsilon\|_p < 2\eta.$$

Esto demuestra el corolario. □

Teorema 5.29. *Sea* $f_\varepsilon = f * k_\varepsilon$ *donde* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ *y* $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\,dx = 1$*, entonces* $f_\varepsilon \to f$ *en cada punto de continuidad de* f *cuando* $\varepsilon \to 0$*.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)k_\varepsilon(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)k_\varepsilon(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)||k_\varepsilon(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Si f es continua en x, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, entonces $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ y obtenemos

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \int_{|t|\geq\delta} |f(x-t) - f(x)||k_\varepsilon(t)|\,dt + \varepsilon\int_{|t|<\delta} |k_\varepsilon(t)|\,dt \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int |t| \geq \delta |k_\varepsilon(t)|\,dt + \varepsilon\|k\|_1. \end{aligned}$$

Como $\int_{|t|\geq\delta} |k_\varepsilon(t)|\,dt \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ para un δ fijo, se sigue que

$$|f_\varepsilon - f(x)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0$$

□

Ejercicios

1. Sean

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f = \chi_{[-1,1]}$.

    b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f = \chi_{B(0,1)}$.

    En cada caso hallar $(f * f)(x)$.

2. Supóngase que $f \in L_p\left((\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)\right)$ y $g \in L_q\left((\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)\right)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$(f * g)(x) < \varepsilon \qquad \forall\ |x| > R.$$

3. Sean

$$l_1(L_\infty)(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{\mathrm{loc},\infty} : \|f\|_{\infty,1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f\|_{L_\infty(Q_k)} < \infty \right\}$$
$$l_\infty(L_1)(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{\mathrm{loc},1} : \|f\|_{1,\infty} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f\|_{L_1(Q_k)} < \infty \right\}$$

    donde $Q_k = Q_0 + k$ y $Q_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$. Si $f \in l_1(L_\infty)(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L_\infty(L_1)(\mathbb{R}^n)$ demostrar que $f * g \in L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ y

$$\|f * g\|_\infty \leq 2^n \|f\|_{\infty,1} \|g\|_{1,\infty}.$$

4. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

    a) Demostrar que φ es de clase C^∞ con $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$,

    b) Para $\varepsilon > 0$ y $a \in \mathbb{R}$, demuestre que la función $f(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$ es de clase C^∞ con $\operatorname{supp} f = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

5. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ donde φ está definida como en el problema 1. Definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \int_a^b \varphi\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right) dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

    a) $\operatorname{supp} h \subset [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$

    b) $h(x) = c$ (función constante) para todo $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$

c) h es de clase C^∞ y $h^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^n}{\partial x^n}\varphi\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right) dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y

d) La función $f = h/c$ de clase C^∞ satisface $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ para todo $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ y $\int_{\mathbb{R}} |\chi_{(a,b)} - f| dm < 4\varepsilon$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable con respecto a la medida de Lebesgue. Dado $\varepsilon > 0$, demuestre que existe una función g de clase C^∞ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f - g| dm < \varepsilon$.

7. Consideremos el espacio vectorial de funciones

$$E = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^\infty \text{ y } \int_{\mathbb{R}} f dm = 0 \right\}$$

Demostrar que para cada $1 < p < \infty$, el espacio vectorial E es denso en $L_p(\mathbb{R})$. ¿ Será E denso en $L_1(\mathbb{R})$?

Capítulo 6

Potenciales

6.1. Potencial de Riesz

Las desigualdades que involucran el potencial de Riesz proveen una importante herramienta que permite estimar funciones en términos de la norma de sus derivadas. En lo sucesivo utilizaremos la transformada de Fourier. Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$; definimos $\widehat{f}$ por

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La función $\widehat{f}$, la llamaremos la transformada de Fourier de la función f, algunas veces la denotaremos por $\mathcal{F}(f)$. Consideremos el laplaciano de f, esto es

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

Ahora, tomemos la transformada de Fourier de $(-\Delta f)$; es decir

$$\begin{aligned}
(\widehat{-\Delta f})(x) &= \widehat{\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\right)}(x) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (i2\pi x_k)^2 \widehat{f}(x) \\
&= 4\pi^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \widehat{f}(x) \\
&= 4\pi^2 |x|^2 \widehat{f}(x).
\end{aligned}$$

Ahora, deseamos reemplazar el exponente 2 en $|x|^2$ por un exponente general β y así definir, al menos formalmente, el laplaciano fraccional por

$$(\widehat{(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f})(x) = (2\pi|x|)^{\beta}\widehat{f}(x).$$

Con esta idea en mente, junto con el hecho que $|\xi|^{-\alpha}$ para $0 < \alpha < n$ es localmente integrable, podemos ver al laplaciano fraccional como un elemento de $\mathscr{S}'$ ($\mathscr{S}'$ el dual del espacio de Schwartz $\mathscr{S}$). Ahora, definamos el siguiente operador

$$I_\alpha : \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}',$$

donde

$$I_\alpha(f) = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi)) \tag{6.1}$$

para $0 < \alpha < n$, donde $\mathcal{F}^{-1}$ representa la transformada inversa de Fourier de $|\xi|^{-\alpha}$ (en el sentido de distribuciones). Usando la fórmula

$$|\xi|^{-\alpha} = \frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\, d\lambda,$$

donde $C_\alpha = \pi^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})$, el Teorema de Fubini nos permite demostrar que

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \tag{6.2}$$

donde

$$\gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}.$$

En efecto, dado que $|\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(x)$ es integrable obtenemos

$$\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(x))(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}\left[\frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\, d\lambda\right]\widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\widehat{f}(\xi)\, d\xi\right]\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi y}\, dy\right)\, d\xi\right]\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi(x-y)}e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\,d\xi\right)\,dy\right]\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\lambda^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\lambda}}\,dy\right]\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\left[\frac{1}{C_\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\lambda}}\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda\right]\,dy$$

$$= C_{n-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)\,dy$$

de esta forma hemos demostrado (6.2).

Observación 6.1. La verificación de (6.2) la hicimos de manera formal; es decir, supusimos que (6.2) estaba bien definido. Sin embargo, para ver que (6.2) está bien definido, necesitamos estudiar la convergencia de la integral. Dado que el soporte de f es acotado, no tendremos problemas de integrabilidad en el infinito. A pesar que el núcleo del operador tiene una singularidad en la diagonal $x = y$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{B(x,1)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dy &\leq \|f\|_{L_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k-1}\leq|x-y|<2^{-k}}\frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}}\\ &\leq \|f\|_{L_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(B(x,2^{-k+1}))}{2^{-(k+1)(n-\alpha)}}\\ &\leq 2^{2n-\alpha}\|f\|_{L_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}<\infty.\end{aligned}$$

De esta manera, hemos demostrado que la integral que define al operador I_α es localmente uniformemente integrable; es decir $I_\alpha \in L^1_{loc,u}$.
A (6.2), lo llamaremos el potencial de Riesz de f. Con la ayuda de (6.1) podemos ver que

$$|\widehat{I_\alpha f(x)}|(\xi) = |\xi|^{-\alpha}(\xi).$$

Lema 6.2. Sea $0 < \alpha < n$, entonces

(I) La transformada de Fourier de la función $|x|^{\alpha-n}$ es la función

$$\gamma(\alpha)(2\pi)^{-\alpha}|x|^{\alpha},$$

en el sentido siguiente

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\alpha)(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}\overline{\widehat{\varphi(x)}}\,dx,$$

para $\varphi \in \mathscr{S}$.

(II) La identidad

$$(\widehat{I_\alpha f})(x) = (2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{f}(x),$$

se obtiene en el siguiente sentido

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} I_\alpha(f)(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)(2\pi|x|)^{-\alpha}\overline{\widehat{g}(x)}\,dx,$$

para $f, g \in \mathscr{S}$.

Demostración. (I) Ver [13].

(II) En virtud de (I) tenemos

$$\frac{(2\pi)^\alpha}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)|y|^{\alpha-n}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}\widehat{f}(x-y)dy,$$

pero

$$f(\widehat{x-y})(\xi) = f(\widehat{-y+x})(\xi) = e^{-2\pi ixy}\widehat{f}(-y).$$

Entonces

$$\frac{(2\pi)^\alpha}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)|y|^{\alpha-n}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}\widehat{f}(-y)e^{-2\pi ixy}dy$$

$$\frac{(2\pi)^\alpha}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)|y|^{\alpha-n}dy\right)\overline{g}(x)dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}\widehat{f}(-y)e^{-2\pi ixy}\,dy\right)\overline{g}(x)dx,$$

luego

$$(2\pi)^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} I_\alpha f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}\widehat{f}(-y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{g}(x)e^{-2\pi ixy}\,dx\right)\,dy$$

$$(2\pi)^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} I_\alpha f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}\widehat{f}(-y)\widehat{\overline{g}}(y)dy.$$

Dado que $\widehat{\overline{g}}(y) = \overline{\widehat{g}(-y)}$, entonces

$$(2\pi)^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} I_\alpha f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}\widehat{f}(-y)\overline{\widehat{g}(-y)}dy$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} I_\alpha f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dy.$$

□

Lema 6.3. Si $f \in \mathscr{S}$, entonces

(I) $I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta}(f)$ donde $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < n$.

(II) $\Delta(I_\alpha f) = I_\alpha(\Delta f) = -I_{\alpha-2}(f)$ con $n > 3, n \geq \alpha \geq 2$.

Demostración. (I) Al aplicar la transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned}
[\widehat{I_\alpha(I_\beta})](\xi) &= (2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{(I_\beta)}(\xi) \\
&= (2\pi|x|)^{-\alpha}(2\pi|x|)^{-\beta}\widehat{f}(\xi) \\
&= (2\pi|x|)^{-(\alpha+\beta)}\widehat{f}(\xi) \\
&= (\widehat{I_{\alpha+\beta}})(\xi).
\end{aligned}$$

Así, tomando la transformada inversa de Fourier, se tiene

$$I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta}(f).$$

(II)

$$\begin{aligned}
(\Delta\widehat{(I_\alpha f}))(\xi) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 I_\alpha f(x)}{\partial x_k^2}}\right)(\xi) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} 4\pi^2 x_k^2(\widehat{I_\alpha f})(\xi) \\
&= -(2\pi|x|)^2(2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{f}(\xi) \\
&= -(\widehat{I_{2-\alpha} f})(\xi).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(I_\alpha\widehat{(\Delta f)})(\xi) &= (2\pi|x|)^{\alpha}(\widehat{\Delta f})(\xi)\\ &= -(2\pi|x|)^{-\alpha}(2\pi|x|)^2\widehat{f}(\xi)\\ &= -(2\pi|x|)^{2-\alpha}\widehat{f}(\xi)\\ &= -(\widehat{I_{\alpha-2}}f)(\xi). \end{aligned} \tag{6.4}$$

De (6.3) y (6.4), se obtiene el resultado.

□

En lo sucesivo, será de utilidad la siguiente definición.

Definición 6.4. Sea $\varphi \in \mathscr{S}$, el funcional delta se define por la ecuación

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

Teorema 6.5 (Identidad de aproximación)**.** Sea f una función puntualmente continua, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Si $f_a(x) = af(ax)$, entonces

$$\lim_{a\to\infty} \langle f_a, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{S}.$$

Demostración. Por supuesto, la convergencia es en el sentido de distribución. La idea es que cuando $a \to \infty$, $f_a(x)$ se transforme en un pulso angosto (estrecho), con su altura creciendo en la misma proporción que su ancho. Sea φ cualquier función de prueba, para eso, escojamos $\delta > 0$; tal que $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \epsilon$ para $|x| < \delta$, escojamos t de modo que

$$\int_{-\infty}^{-t} |f(x)|\, dx + \int_{t}^{\infty} |f(x)|\, dx < \epsilon.$$

Finalmente, sea $a < \frac{t}{\delta}$, $M = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ y $K = \max_x |\varphi(x)|$, entonces

$$
\begin{aligned}
&|\langle f_a(\cdot), \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| \\
&\qquad = |\langle af(a\cdot), \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| \\
&\qquad = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right] du \right| \\
&\qquad = \left| \int_{-t}^{t} f(u) \left[\varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right] du + \int\limits_{\{|u>t|\}} f(u) \left[\varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right] du \right| \\
&\qquad \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du \right) \left(\max_{|u\leq t|} \left| \varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right| \right) \\
&\qquad + \left(\int\limits_{|u|>t} |f(u)|\, du \right) \left(\max_{|u\leq /t|} \left| \varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right| \right).
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que $|u| \leq t$ y $a > \frac{t}{\delta}$, entonces $\left|\frac{u}{a}\right| < \delta$ y así

$$
\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du \right) \left(\max_{|u\leq t|} \left| \varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right| \right) < M\epsilon,
$$

además

$$
\left(\int\limits_{|u|>t} |f(u)|\, du \right) \left(\max_{|u\leq t|} \left| \varphi\left(\frac{u}{a}\right) - \varphi(0) \right| \right) < 2K\epsilon,
$$

luego

$$
|\langle f_a(\cdot), \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| < (M + 2K)\epsilon \qquad \text{si} \qquad a > \frac{t}{\delta},
$$

lo que significa que

$$
\lim_{a\to\infty} \langle f_a, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle.
$$

□

Ejercicios

1. Demuestre que si $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle = \delta(\varphi)$ entonces $\langle \delta, \varphi\rangle$ no se puede escribir como $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\, dx$, siempre que δ sea localmente integrable.

6.2. Potenciales en L_p

En la Sección 2.1, consideramos el potencial de Riesz desde un punto de vista formal. En particular operamos con funciones suaves que se comportan bien en el infinito. Dado que el potencial de Riesz es un operador integrable, es natural estudiar su acción en los espacios $L_p(\mathbb{R}^n)$. Por esta razón, formulamos el siguiente problema; dado α con $0 < \alpha < n$ ¿para cuáles valores de p y q el operador

$$I_\alpha : L_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$$

es acotado? En otras palabras, ¿cuándo se tiene la siguiente desigualdad

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leq c\|f\|_p? \tag{6.5}$$

Para resolver esta pregunta, consideremos el operador dilatación β_λ definido por

$$\beta_\lambda(f)(x) = f(\lambda x), \qquad \lambda > 0.$$

Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned} \|\beta_\lambda(f)\|_p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^p \\ &= \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p, \end{aligned} \tag{6.6}$$

por otra parte, obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda^{-1}}(I_\alpha(\beta_\lambda))(x) &= I(\beta_\lambda)(\lambda^{-1}x) \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\beta_\lambda(f)(y)}{|\lambda^{-1}x - y|^{n-\alpha}}\,dy \\ &= \lambda^{-\alpha} I_\alpha f(x). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \lambda^{-\alpha}\|I_\alpha(f)\|_q &= \|\beta_\lambda^{-1}(I_\alpha(\beta_\lambda(f)))\|_q \\ &= \lambda^{\frac{n}{q}}\|I_\alpha(\beta_\lambda f)\|_q. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Si

$$\|I_\lambda(\beta_\lambda f)\|_q \leq c\|f\|_q,$$

entonces por (6.5) y (6.6), se tiene que

$$\lambda^{\alpha+\frac{n}{q}}\|I_\lambda(\beta_\lambda f)\|_q \leq \lambda^{\frac{n}{q}}c\|\beta_\lambda(f)\|_p.$$

Así

$$\|I_\lambda(\beta_\lambda f)\|_q \leq \lambda^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\alpha)}c\|\beta_\lambda(f)\|_p,$$

donde si $\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\alpha \neq 0$, entonces $\lambda \to 0$ o $\lambda \to \infty$.
Si obtenemos la desigualdad deseada, necesariamente tendremos

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Veremos que esta condición es suficiente para dos casos excepcionales. Éstos suceden cuando $p = 1$, el cual implica que $q = \frac{n}{n-\alpha}$ y cuando $q = \infty$, entonces $p = \frac{n}{\alpha}$. Consideremos la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Ahora, definamos la siguiente sucesión

$$\varphi_k(x) = 2k^n\varphi(kx),$$

observe que

$$\operatorname{supp}\varphi_k = B\left(0, \frac{1}{2k}\right)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx = 1.$$

Ahora, consideremos la siguiente situación; si (6.5) fuese válido, se tiene

$$\|\varphi_k\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq c\|\varphi_k\|_1.$$

Puesto que $\|\varphi_k\|_1 = 1$ se tendría que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha\varphi(x)|^{\frac{n}{n-\alpha}}\,dx \leq c^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

es decir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy\right|^{\frac{n}{n-\alpha}}dx\leq C^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Si

$$g(y)=\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}},$$

notemos que $g\in\mathscr{S}$, entonces con la ayuda del Teorema 6.5, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}g(y)\varphi_k(y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n}g(y)\delta(y)dy=g(0).$$

El Lema de Fatou nos permite obtener

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}g(y)\delta(y)\,dy\right|^{\frac{n}{n-\alpha}}dx\leq\liminf\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}g(y)\varphi_k(y)\,dy\right|^{\frac{n}{n-\alpha}}dx$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(0)|^{\frac{n}{n-\alpha}}\,dx\leq C^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{|x|^n}\leq C^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Esto último nos conduce a una contradicción. El segundo caso atípico ocurre cuando $q=\infty$, de nuevo la desigualdad del tipo (6.5), no se puede obtener. Una razón inmediata es que este es el caso dual del caso $p=1$; sin embargo, este caso ($q=\infty$) lo podemos ver directamente considerando la siguiente función, sea

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{-\alpha}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{\alpha}{n}(1+\epsilon)} & \text{si } |x|\leq\frac{1}{2}\\ \\ 0 & \text{si } |x|>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

con $\frac{\alpha}{n}(1+\epsilon)$ donde ϵ es un número positivo suficientemente pequeño. Ahora queremos demostrar que $f\in L_{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$, en efecto

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{\frac{n}{\alpha}}\,dx &= \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{2}}|x|^{-n}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{-(1+\epsilon)}dx\\ &=\omega_n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dr}{r\left(\log\frac{1}{r}\right)^{(1+\epsilon)}}\\ &<\infty.\end{aligned}$$

Sin embargo, $I_\alpha(f)$ es esencialmente no acotado cerca del origen. Esto es

$$\begin{aligned} I_\alpha(f)(0) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|\leq\frac{1}{2}} |y|^{-n} \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\epsilon)} dy \\ &= C(\alpha)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r\left(\log\frac{1}{r}\right)^{\frac{\alpha}{n}(1+\epsilon)}} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Ahora bien, si tomamos un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(\alpha < n)$, tal que $0 < m(\Omega) < \infty$, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 6.6. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con $0 < m(\Omega) < \infty$ y $0 < \alpha < n$, entonces existe una constante $C > 0$, tal que

$$\|I(\chi_\Omega)\|_\infty \leq C\|\chi_\Omega\|_{\frac{n}{\alpha}}.$$

Demostración. Podemos suponer que $x = 0$, y hallar un $R > 0$, para el cual $|B(0,R)| = |\Omega|$; denotemos $B = B(0,R)$; luego, si $y \in \Omega \setminus B$, entonces $|y| > R$ como $\alpha - n < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus B} |y|^{\alpha-n}dy &\leq R^{\alpha-n}|\Omega\setminus B| \\ &= R^{\alpha-n}|B\setminus\Omega| \\ \int_{\Omega\setminus B} |y|^{\alpha-n}dy &\leq \int_{B\setminus\Omega} |y|^{\alpha-n}dy. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Por otra parte

$$\int_\Omega |y|^{\alpha-n}dy = \int_{\Omega\setminus B} |y|^{\alpha-n}dy + \int_{\Omega\cap B} |y|^{\alpha-n}dy,$$

y por (6.8), se tiene que

$$\int_\Omega |y|^{\alpha-n}dy \leq \int_{B\setminus\Omega} |y|^{\alpha-n}dy + \int_{\Omega\cap B} |y|^{\alpha-n}dy,$$

de donde

$$\int_\Omega |y|^{\alpha-n}dy \leq \int_B |y|^{\alpha-n}dy.$$

Como

$$
\begin{aligned}
\int_B |y|^{\alpha-n} dy &= \sigma_n |B(0,1)| \int_0^R r^{n-1} r^{\alpha-n} dr \\
&= \frac{\sigma_n}{\alpha} |B(0,1)| R^\alpha \\
&= R^\alpha |B(0,1)| |B(0,1)|^{-\alpha/n} |B(0,1)|^{\alpha/n} \\
&= |B(0,1)|^{1-\alpha/n} (R^n |B(0,1)|)^{\alpha/n} \\
&= |B(0,1)|^{1-\alpha/n} |B(0,R)|^{\alpha/n}.
\end{aligned}
$$

Finalmente obtenemos

$$
\int_\Omega |y|^{\alpha-n} dy \leq |B(0,1)|^{1-\alpha/n} |B(0,R)|^{\alpha/n};
$$

es decir

$$
\|I_\alpha(\chi_\Omega)\|_\infty \leq C \|\chi_\Omega\|_{\frac{n}{\alpha}}.
$$

□

Proposición 6.7. $I_\alpha f$ es semicontinua cuando $f \geq 0$.

Demostración. Si $x_n \to x$, entonces $|x_n - y|^{\alpha-n} f(y) \to |x - y|^{\alpha-n} f(y)$; por el Lema de Fatou obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \liminf |x_n - y|^{\alpha-n} f(y) dy &\leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} |x_n - y|^{\alpha-n} f(y) dy \\
\int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{\alpha-n} f(y) dy &\leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} |x_n - y|^{\alpha-n} f(y) dy \\
I_\alpha f(x) &\leq \liminf I_\alpha f(x_n).
\end{aligned}
$$

□

Lema 6.8. Sea μ la medida signada de Radon en $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha < n$, entonces

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu}{|x - y|^{n-\alpha}} = (n - \alpha) \int_0^\infty r^{\alpha-n-1} \mu(B(x,r)) dr,
$$

siempre que μ sea no negativa, 0

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} < \infty.
$$

Demostración. En virtud que toda medida de Radon es una medida de Lebesgue y gracias al corolario 2.72, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} &= \int_0^\infty \mu\left(\{x : \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} > \lambda\}\right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu\left(\{x : |x-y| < (\frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{n-\alpha}}\right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu\left(B\big(x, (\frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{n-\alpha}}\big)\right) d\lambda,\end{aligned}$$

haciendo el siguiente cambio de variable

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-\alpha}} = r,$$

resulta

$$\int_0^\infty \mu\left(B\left(x, \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-\alpha}}\right)\right) d\lambda = (n-\alpha)\int_0^\infty r^{\alpha-n-1}\mu\big(B(x,r)\big)dr.$$

Finalmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} = (n-\alpha)\int_0^\infty r^{\alpha-n-1}\mu\big(B(x,r)\big)dr.$$

□

Teorema 6.9. Sea $1 \leq p < \infty$. Sea Ω un conjunto de medida finita y sea $f \in L_p(\Omega)$, entonces

$$\|I_\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{6.9}$$

donde $C = |B(0,1)|^{1-\alpha/n}$.

Demostración. Por el Lema 6.6 con $\alpha = 1$, tenemos

$$\int_\Omega |x-y|^{\alpha-n}dy \leq C|\Omega|^{\alpha/n}.$$

Entonces, si $p \geq 1$, utilizando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\int_\Omega |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy \leq \left(\int_\Omega |f(y)|^p|x-y|^{\alpha-n}dy\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |x-y|^{\alpha-n}dy\right)^{1/q}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy &\leq C^{1-1/p}\left(\int_\Omega |f(y)|^p|x-y|^{\alpha-n}dy\right)^{1/p} \\
\left[\int_\Omega |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy\right]^p &\leq C^{p-1}\left(\int_\Omega |f(y)|^p|x-y|^{\alpha-n}dy\right) \\
\int_\Omega |I_\alpha f(x)|^p dx &\leq C^{p-1}\int_\Omega\left(\int_\Omega |f(y)|^p|x-y|^{\alpha-n}dy\right)dx \\
&= C^{p-1}\int_\Omega |f(y)|^p dy\int_\Omega \left(|x-y|^{\alpha-n}dx\right) \\
&\leq C^p\int_\Omega |f(y)|^p dy.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\|I_\alpha f\|_{L_{p(\Omega)}} \leq C\|f\|_{L_{p(\Omega)}}.
$$

□

Ahora, estimaremos la norma del potencial de Riesz de manera más general.

Teorema 6.10. Si $0<\alpha<n$, $\beta>0$ y $\delta>0$, entonces para $x\in\mathbb{R}^n$

$$
\int_{B(x,\delta)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \leq C_\alpha\delta^\alpha Mf(x),
$$

donde $C_\alpha=\frac{n}{\alpha}|B(0,1)|$.

Demostración. para $x\in\mathbb{R}^n$ y $\delta>0$ empleamos el Lema 6.8, así obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(x,\delta)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\
&= (n-\alpha)\int_0^\infty\left(\int_{B(x,r)\cap B(x,\delta)}|f(y)|dy\right)\frac{dr}{r^{n-\alpha+1}} \\
&\leq (n-\alpha)\left(|B(0,1)|\int_0^\delta Mf(x)r^n\frac{dr}{r^{n-\alpha+1}}+|B(0,1)|\int_\delta^\infty Mf(x)\delta^n\frac{dr}{r^{n-\alpha+1}}\right) \\
&= \frac{n}{\alpha}|B(0,1)|Mf(x)\delta^\alpha.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 6.11 (Desigualdad de Hedberg)**.** Sea $0 < \alpha < n$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, entonces para $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ se tiene la siguiente desigualdad

$$|I_\alpha f(x)| \leq \|f\|_p^{\frac{p\alpha}{n}} (Mf(x))^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Demostración. Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ se tiene que

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int\limits_{B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

por el Teorema 6.10, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy &= (n-\alpha) \int_0^\infty \left(\int\limits_{B(x,r)\cap B(x,\delta)} |f(y)| dy \right) \frac{dr}{r^{n-\alpha+1}} \\
&\leq (n-\alpha) \left(m(B(0,1)) \int_0^\delta Mf(x) r^n \frac{dr}{r^{n-\alpha+1}} \right) \\
&\quad + m(B(0,1)) \int_0^\infty Mf(x) \delta^n \frac{dr}{r^{n-\alpha+1}} \\
&= \frac{n}{\alpha} m(B(0,1)) Mf(x) \delta^\alpha. \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Ahora bien, para $\delta > 0$ la desigualdad de Hölder implica que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy &\leq \|f\|_p \left(\int\limits_{B(x,\delta)} |x-y|^{(\alpha-n)q}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(nm(B(0,1)) \int_\delta^\infty r^{n-1-q(n-\alpha)}\, dr \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{nm(B(0,1))}{n-q(n-\alpha)} \|f\|_p \delta^{\alpha-\frac{n}{p}}. \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

Finalmente de (6.10) y (6.11), se tiene que

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \right| \leq \frac{nm(B(0,1))}{n-q(n-\alpha)} \left(\delta^\alpha Mf(x) + \|f\|_p \delta^{\alpha-\frac{n}{p}} \right). \qquad (6.12)$$

Si escogemos $\delta = \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p} \right)^{-\frac{p}{n}}$, entonces (6.12) se transforma en

$$|I_\alpha f(x)| \leq \frac{nm(B(0,1))}{n-q(n-\alpha)} (Mf(x))^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}.$$

$\square$

Teorema 6.12. Sea $0 < \alpha < n$.

(a) Si $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $q = \frac{np}{n-\alpha p}$, entonces

$$I_\alpha : L_p \longrightarrow L_q;$$

es decir, $\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p$.

(b) Si $q = \frac{n}{n-\alpha}$, entonces

$$I_\alpha : L_1 \longrightarrow L_{(1,\frac{n}{n-\alpha})}$$

esto es,

$$m(\{x : I_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq c\left(\frac{\|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Demostración. (a) Observe que la desigualdad de Hedberg junto con el Teorema 4.8, implica que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^{q(1-\frac{\alpha p}{n})}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\|f\|_p.\end{aligned}$$

(b) Para el caso $p = 1$ la desigualdad de Hedberg se transforma en

$$|I_\alpha f(x)| \leq \|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}(Mf(x))^{1-\frac{\alpha}{n}}. \tag{6.13}$$

Observe que por el Teorema 4.6 y (6.13) se tiene

$$\begin{aligned}m(\{x : I_\alpha f(x) > \lambda\}) &\leq m\left(\left\{x : Mf(x) > \left(\frac{\lambda}{c\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}\right)\\ &\leq c\left(\frac{\|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}},\end{aligned}$$

así

$$m(\{x : I_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq c\left(\frac{\|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

□

Ejercicios

1. La integral de Poisson y la integral de Gauss-Weierstrass vienen dadas respectivamente por:

   a) $P_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(y,t)\varphi(x-y)\,dy$ $t > 0$.

   b) $W_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} W(y,t)\varphi(x-y)\,dy$.

   Donde

$$P(y,t) = \frac{C_n t}{\left(|y|^2 + t^2\right)^{(n+1)/2}}$$
$$C_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

   y

$$W(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

   Sea $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ con $1 < p < n/\alpha$. Demostrar que

$$\begin{aligned} I_\alpha\varphi(x) &= \frac{1}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} P_t\varphi(x)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\alpha/2-1} W_t\varphi(x)\,dt. \end{aligned}$$

Capítulo 7

Espacios $L_p(\mu)$ con $0 < p < 1$

7.1. Nociones básicas

Teorema 7.1. *$L_p(\mu)$ con $0 < p < 1$ es un espacio completo*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(\mu)$ con $0 < p < 1$, entonces

$$d(f_n, f_m) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p \, d\mu = 0,$$

de aquí se sigue que para cada número natural k existe un menor número natural n_k tal que

$$\int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p \, d\mu < \frac{1}{3^k} \quad \text{para } m \geq n_k,\ n \geq n_k,$$

en particular, podemos tomar $n = n_{k+1}$ y $m = n_k$ de modo que

$$\int_X |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)|^p \, d\mu < \frac{1}{3^k} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.1}$$

Definamos

$$E_k = \left\{ x \in X : |f_{n_k+1} - f_{n_k}(x)| > \frac{1}{2^{k/p}} \right\},$$

entonces,

$$\int_{E_k} |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)|^p \, d\mu \geq \int_{E_k} \left(\frac{1}{2^{k/p}} \right)^p d\mu = \frac{1}{2^k} \mu(E_k)$$

luego por (7.1) se tiene que

$$\frac{1}{2^k} \mu(E_k) < \frac{1}{3^k}$$

es decir,

$$\mu(E_k) < \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

Consideremos ahora

$$\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_{n_k+1} - f_{n_k}(x)| > \frac{1}{2^{k/p}} \right\}. \tag{7.2}$$

Si x no pertenece a este conjunto es claro que

$$|f_{n_N+1} - f_{n_N}(x)| \leq \frac{1}{2^{N/p}},$$

$$|f_{n_N+2} - f_{n_N+1}(x)| \leq \frac{1}{2^{(N+1)/p}},$$

$$\vdots$$

de modo que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)| \tag{7.3}$$

converge, pero la medida de (7.2) es

$$\sum_{k=N}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left(\frac{2}{3}\right)^N$$

la cual tiende a cero cuando N tiende a infinito. Esto muestra que el conjunto de todas la x para las cuales (7.3) no converge es de medida cero, es decir, la serie (7.3) converge casi en todas partes, entonces también lo hace la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x))$$

ya que una serie absolutamente convergente es convergente. Escribiendo

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_j+1}(x) - f_{n_j}(x))$$

se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_j+1}(x) - f_{n_j}(x))$$

existe, denotando este límite por $f(x)$ vemos que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f(x) \text{ casi en todas partes.}$$

A demostrar que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f. Para ello observamos que por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned}\int_X |f_{n_k}(x)-f(x)|^p\,d\mu &= \int_X \liminf_{j\to\infty} |f_{n_k}(x)-f_{n_j}(x)|^p\,d\mu\\ &\leq \liminf_{j\to\infty}\int_X |f_{n_k}(x)-f_{n_j}(x)|^p\,d\mu\\ &< \epsilon^p/2.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_X |f_{n_k}(x)-f(x)|^p\,d\mu &\leq \int_X |f_n(x)-f_{n_k}(x)|^p\,d\mu + \int_X |f_{n_k}(x)-f(x)|^p\,d\mu\\ &< \epsilon^p\end{aligned}$$

así, $(f_n - f)\in L_p(\mu)$ y $f=(f-f_n)+f_n\in L_p(\mu)$. □

Proposición 7.2. *Sea*

$$L_p = \left\{ f:[0,1]\to\mathbb{R} : f \textit{ es } \mathscr{L}-\textit{medible y } \int_0^1 |f(t)|^p\,dt<\infty\right\}.$$

Entonces,

a) $d(f,g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p\,dt$ *es una métrica en* L_p.

b) d *es invariante por traslación y así* (L_p,d) *es un espacio vectorial topológico.*

c) Si A *es convexo abierto no vacío, entonces* $A=L_p$.

d) $f:L_p\to Y$ *es lineal e* Y *es localmente convexo. Entonces* f *es constante.*

e) $(L_p)^*=\{0\}$.

Demostración. $|f-g|^p\geq 0$ para toda $f,g\in L_p$ así,

$$\int_0^1 |f-g|^p\,dt\geq 0,$$

entonces $d(f,g)\geq 0$.

Si $d(f,g)=0$, entonces

$$\int_0^1 |f-g|^p\,dt=0,$$

luego $|f-g|^p = 0$ c.t.p, lo que implica que $|f-g| = 0$ c.t.p, de donde $f = g$ c.t.p.

Por otra parte si $f = g$ para $f, g \in L_p$, entonces $f - g = 0$ de donde $|f-g|^p = 0$ y así,

$$\int_0^1 |f-g|^p \, dt = 0,$$

es decir, $d(f,g) = 0$.

Para f y g en L_p notemos que

$$d(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p \, dt = \int_0^1 |g-f|^p \, dt = d(g,f)$$

es decir,

$$d(f,g) = d(g,f).$$

Finalmente, si a y b son reales positivos, entonces $a + b \geq b$ y $a + b \geq a$, como $0 < p < 1$, entonces $p - 1 < 0$, luego

$$(a+b)^{p-1} \leq b^{p-1}$$

y

$$(a+b)^{p-1} \leq a^{p-1}$$

de donde,

$$b(a+b)^{p-1} \leq b^p$$

y

$$a(a+b)^{p-1} \leq a^p,$$

sumando

$$\begin{aligned} a(a+b)^{p-1} + b(a+b)^{p-1} &\leq a^p + b^p \\ (a+b)(a+b)^{p-1} &\leq a^p + b^p \\ (a+b)^p &\leq a^p + b^p \end{aligned}$$

Ahora, apoyándonos en esta última desigualdad, podemos demostrar la desigualdad triangular. Sean f, g y h en L_p, entonces

$$|f-g|^p = |f-h+h-g|^p \leq |f-h|^p + |h-g|^p$$

para $0 < p < 1$, luego

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_0^1 |f-g|\,dt \\ &\leq \int_0^1 |f-h|^p\,dt + \int_0^1 |h-g|^p\,dt \\ &= d(f,h) + d(h,g), \end{aligned}$$

es decir, $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.

Ahora queremos exhibir que d es invariante por traslación. En efecto,

$$\begin{aligned} d(f+h, g+h) &= \int_0^1 |f+h-(g+h)|^p\,dt \\ &= \int_0^1 |f-g|\,dt \\ &= d(f,g). \end{aligned}$$

Antes de continuar, recordemos la definición de base local.

Definición 7.3. *Sea p un punto arbitrario de un espacio topológico $\mathcal{X}$, una clase $\mathcal{B}_p$ de conjuntos abiertos que contienen a p es una base local en p, si y sólo si para cada abierto O que contiene a p existe un abierto O_p con centro en p tal que $O_p \subset O$.*

Continuando, sea V una vecindad abierta, convexa y no vacía del origen de $L_p[0,1]$. Sea $f \in L_p[0,1]$. Dado que V es abierta, existe una bola B_r $(r > 0)$ centrada en el origen tal que $B_r \subset V$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $nf \in B_{nr}$ donde

$$B_{nr} = \{f \in L_p : \|f\|_p^p < nr\}$$

luego,

$$\|nf\|_p^p = \int_0^1 |nf(t)|^p\,dt < nr$$

es decir,

$$\|nf\|_p^p = \frac{1}{n^{1-p}} \int_0^1 |f(t)|^p\,dt < r$$

Ahora, para $s \in [0,1]$ definamos $g_s = \chi_{[0,s]} f$ y $\varphi(s) = \|g_s\|_p^p$. Sea $s, s_0 \in [0,1]$ tal que $s \geq s_0$, entonces

$$\begin{aligned}
|\varphi(s) - \varphi(s_0)| &= |\|g_s\|_p^p - \|g_{s_0}\|_p^p| \\
&\leq \|g_s - g_{s_0}\|_p^p \\
&= \|(\chi_{[0,s]} - \chi_{[0,s_0]})f\|_p^p \\
&= \|\chi_{[0,s]\setminus[0,s_0]} f\|_p^p \\
&= \|\chi_{[s_0,s]} f\|_p^p \\
&= \int_0^1 |\chi_{[s_0,s]}(t) f(t)|^p \, dt.
\end{aligned}$$

$$\lim_{s \to s_0} |\varphi(s) - \varphi(s_0)| = \lim_{s \to s_0} \int_{s_0}^{s} |f(t)|^p \, dt \to 0$$

Así, φ es continua en $[0,1]$.

Dado que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = \|f\|_p^p$, por el teorema del valor intermedio existe $\lambda_j \in (0,1)$ $j = 1, 2, \ldots, n$ tal que

$$\varphi(0) \leq \frac{\varphi(1)}{n} \leq \varphi(1),$$

$$0 \leq \frac{\|f\|_p^p}{n} \leq \|f\|_p^p,$$

$$\|g_{\lambda_j}\|_p^p = \varphi(\lambda_j) = \frac{1}{n}\|f\|_p^p,$$

$$\int_0^{\lambda_j} |f(x)|^p \, dx = \frac{1}{n} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx.$$

Definamos

$$h_{\lambda_j}(x) = \begin{cases} nf & \text{si } 0 \leq x \leq \lambda_j; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |h_{\lambda_j}(x)|^p \, dx &= \int_0^{\lambda} |nf(x)|^p \, dx \\
&= n^{p-1} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \\
&= \frac{1}{n^{1-p}} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \\
&< r,
\end{aligned}$$

por lo tanto $h_{\lambda_j} \in B_r$ y así, $h_{\lambda_j} \in V$.

Note que $f = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty} h_{\lambda_j}$, de la convexidad de V se concluye que $f \in V$, es decir $L_p[0,1] \subset V$, pero $V \subset L_p[0,1]$ así, $V = L_p[0,1]$.

Para demostrar la parte d), sea $f : L_p \to Y$ una aplicación lineal y continua, de donde Y es localmente convexo, entonces existe una base local $\mathcal{B}$ cuyos elementos son convexos. Sea $\mathcal{B}$ esta base local convexa de Y. Si $B_\epsilon(0) \in \mathcal{B}$, entonces $f^{-1}(B_\epsilon(0))$ es abierta, convexa y no vacía (ϵ arbitrariamente pequeño). Por lo tanto,

$$f^{-1}(B_\epsilon(0)) = L_p[0,1],$$

en consecuencia

$$f(L_p[0,1]) \subset B_\epsilon(0),$$

entonces

$$f(h) \subset B_\epsilon(0)$$

para todo $h \in L_p[0,1]$, por lo tanto

$$|f(h)| < \epsilon$$

luego,

$$\lim_{\epsilon \to 0} |f(h)| < \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon = 0,$$

así $|f(h)| = 0$, es decir $f(h) = 0$ para todo $h \in L_p[0,1]$. En consecuencia el único funcional lineal continuo de $L_p[0,1]$ es $f \equiv 0$.

De la parte d) es claro que $(L_p[0,1])^* = \{0\}$, con lo cual se obtiene e). □

Observación 7.4. *Después de analizada esta situación, podemos preguntarnos: ¿El espacio $L_p([0,1],\mathcal{L},m)$ será normable?*

El siguiente resultado desafortunadamente nos dice que esto no es posible.

Proposición 7.5. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L_p([0,1],\mathcal{L},m)$. Entonces no existe una norma $\|\cdot\|$ en $L_p(m)$ tal que si $f_n \to 0$ en $L_p(m)$ implica que $\|f_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, para cualquier sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_p(m)$.*

Demostración. Supongamos que tal norma $\|\cdot\|$ existe. Afirmamos que existe una constante positiva $C < \infty$ tal que $\|f\| \leq C\|f\|_p$ $\forall f \in L_p(m)$. Dado que la aplicación $f \mapsto \|f\|$ es continua, podemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $\|f\|_p < \delta$, entonces $\|f\| \leq 1$, luego, para todo $f \in L_p(m)$ se tiene que

$\frac{\alpha\delta f}{\|f\|_p} \in B(0,\delta)$ con $0 < |\alpha| < 1$, donde $B(0,\delta)$ es la bola de centro 0 y radio δ. Por lo tanto

$$\left\| \frac{\alpha\delta f}{\|f\|_p} \right\| \leq 1$$

implica que

$$\|f\| \leq \frac{1}{\alpha\delta}\|f\|_p \tag{7.4}$$

Si $\alpha \to 1$, entonces (7.4) se cumple para $C = \frac{1}{\delta}$. Escojamos

$$C = \text{ínf}\left\{K : \|f\| \leq K\|f\|_p \forall f \in L_p(m)\right\}$$

(Nótese que no excluimos la posibilidad de que $C = 0$). Por el Teorema del valor intermedio existe $c \in (0,1)$ tal que

$$\int_0^c |f|^p dm = \int_c^1 |f|^p dm = \frac{1}{2}\int_0^1 |f|^p dm.$$

Ahora, para $g = f\chi_{[0,c)}$ y $h = f\chi_{(c,1]}$, tenemos que $f = g+h$ y $\|g\|_p = \|h\|_p = 2^{\frac{-1}{p}}\|f\|_p$, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \|g\| + \|h\| \\ &\leq C(\|g\|_p + \|h\|_p) \\ &= \frac{C}{2^{1/p-1}}\|f\|_p. \end{aligned}$$

Como $p \in (0,1)$, entonces

$$\frac{C}{2^{1/p-1}} \leq C,$$

de donde $C = 0$, así $\|f\| = 0 \quad \forall f \in L_p(m)$ lo que contradice el hecho que $\|.\|$ es una norma. $\square$

Observación 7.6. *Si $L_p(m)$ fuera normable, entonces el Teorema de Hahn-Banach es cierto en $L_p(m)$, pero $(L_p(m))^* = \{0\}$. Contradicción.*

Teorema 7.7. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible y p un número real tal que $0 < p < 1$. Sean f y g funciones de $L_p(X)$, tal que $g \neq 0$, entonces*

$$\|f+g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p). \tag{7.5}$$

Demostración. Sea $0 \leq t < \infty$ y $0 < p < 1$, entonces $p - 1 < 0$ y es claro que $1 + t \geq t$ y $1 + t \geq 1$, por lo cual

$$(1+t)^{p-1} \leq t^{p-1}$$

y

$$(1+t)^{p-1} \leq 1. \tag{7.6}$$

De (7.6) obtenemos

$$t(1+t)^{p-1} \leq t^p, \tag{7.7}$$

sumando (7.6) y (7.7) se tiene que

$$(1+t^p) \leq 1 + t^p. \tag{7.8}$$

Definamos $t = \frac{|f|}{|g|}$, sustituyendo en (7.8) resulta

$$(|f| + |g|)^p \leq |f|^p + |g|^p,$$

pero $|f+g| \leq |f| + |g|$ y $0 < p < 1$, entonces

$$|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p, . \tag{7.9}$$

Ahora, dado que la función $f(t) = t^{\frac{1}{p}}$ es convexa en $[0, \infty]$, entonces en virtud de (7.9) se tiene

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{2} = \frac{\int |f+g|^p d\mu}{2} \leq \frac{\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|f+g\|_p}{2^{\frac{1}{p}}} &= \left(\frac{\int |f+g|^p d\mu}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right] \end{aligned}$$

y esto demuestra (7.5). □

Observación 7.8. *Este último resultado nos indica que*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

no es norma en $L_p(X)$ con $0 < p < 1$ el resultado que sigue nos garantiza con más precisión esta última afirmación.

Teorema 7.9. *Sean p y q dos números reales con $0 < p < 1$ y $-\infty < q < 0$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

sean f y g funciones positivas tales que f^p y g^q son integrables y, además, supongamos que fg es integrable, entonces

$$\|f\|_p \|g\|_q \leq \int_X fg\, d\mu.$$

Demostración. Definamos $r = 1/p$ y $s = -q/p$, verifiquemos que r y s son conjugados

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1,$$

además, observe que $s > 1$, ahora escribamos

$$f^p = f^p g^p g^{-p} = (fg)^p g^{-p},$$

a demostrar que $(fg)^p \in L_r(X)$ y $g^{-p} \in L_s(X)$, en efecto

$$\int_X [(fg)^p]^r\, d\mu = \int_X [(fg)^p]^{1/p}\, d\mu = \int_X fg\, d\mu < \infty,$$

lo que prueba que $(fg)^p \in L_r(X)$. Por otra parte,

$$\int_X (g^{-p})^s\, d\mu = \int_X (g^{-p})^{-q/p}\, d\mu = \int_X g^q\, d\mu < \infty,$$

así $g^{-p} \in L_s(X)$, luego en virtud de la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X f^p\, d\mu &\leq \left(\int_X [(fg)^p]^r\, d\mu\right)^{1/r} \left(\int_X (g^{-p})^s\, d\mu\right)^{1/s} \\
&= \left(\int_X [(fg)^p]^{1/p}\, d\mu\right)^{p} \left(\int_X (g^{-p})^{-q/p}\, d\mu\right)^{-p/q} \\
&= \left(\int_X fg\, d\mu\right)^{p} \left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{-p/q},
\end{aligned}$$

de donde

$$\left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X fg\, d\mu\right) \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{-1/q},$$

de aquí

$$\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q} \leq \left(\int_X fg\,d\mu\right),$$

por lo tanto

$$\|f\|_p\|g\|_q \leq \int_X fg\,d\mu.$$

□

Corolario 7.10. *Sea $0 < p < 1$ y sean f y g funciones positivas de $L_p(X)$, entonces $f + g \in L_p(X)$ y*

$$\|f + g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. En virtud del teorema 7.7 $f + g \in L_p(X)$, por otra parte escribamos

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}, \tag{7.10}$$

consideremos ahora

$$\begin{aligned}\left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q &= \left(\int_X |f+g|^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/q}\\ &= \|f+g\|_p^{p/q}\\ &\leq \left[2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)\right]^{p/q},\end{aligned}$$

lo que prueba que $(f+g)^{p-1} \in L_q(X)$. Retomando (7.10) y empleando el Teorema 7.9, resulta

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)^p\,d\mu &\geq \left[\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{1/p}\right]\left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{1/q}\\ &= \left[\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{1/p}\right]\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/q},\end{aligned}$$

de aquí

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \geq \left(\int_x f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

así
$$\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \geq \left(\int_x f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{1/p},$$
finalmente,
$$\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Observación 7.11. *El resultado anterior nos indica que la desigualdad de Minkowski queda sin efecto en $L_p(X)$ cuando $0 < p < 1$, por tal motivo, la función $\|\cdot\|_p$ no define una norma en $L_p(X)$ con $0 < p < 1$.*

Ejercicios

1. Para $0 < p < 1$, demostrar que
$$\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_p \leq N^{\frac{1-p}{p}} \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p,$$
además demuestre que $N^{\frac{1-p}{p}}$ es la mejor constante.

Capítulo 8

L_p es un espacio uniformemente convexo

8.1. Convexidad Uniforme

Definición 8.1. *Un espacio de Banach* $(\mathbb{R}, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *se dice que es uniformemente convexo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x, y \in V$ *las condiciones*

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \|x - y\| \geq \epsilon$$

implican

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

El número

$$\delta(\epsilon) = \operatorname{ínf}\left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}$$

se le llamará el módulo de convexidad. Nótese que si $\epsilon_1 < \epsilon_2$*, entonces* $\delta(\epsilon_1) < \delta(\epsilon_2)$ *y* $\delta(0) = 0$ *pues* $x = y$ *si* $\epsilon = 0$.

El ejemplo más inmediato de un espacio uniformemente convexo es un espacio de Hilbert ya que su norma satisface la ley del paralelogramo, es decir,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2,$$

en tal sentido si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$, entonces

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4},$$

de aquí obtenemos

$$1-\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\leq 1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|,$$

de donde

$$\delta(\epsilon)\geq 1-\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Lema 8.2. *Si* $p\geq 2$ *entonces*

$$(|a+b|^p+|a-b|^p)^{1/p}\leq\left(|a+b|^2+|a-b|^2\right)^{1/2}$$

para todo $a,b\in\mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos la función

$$f(t)=(1+t^p)^{1/p}(1+t^2)^{-1/2}$$

para todo $t\in[-1,1]$; es claro que f es derivable en $[-1,1]$, calculemos la primera derivada de f

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{1}{p}(1+t^p)^{\frac{1}{p}-1}pt^{p-1}(1+t^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}(1+t^2)^{-3/2}2t(1+t^p)^{1/p}\\&=(1+t^p)^{\frac{1}{p}-1}(1+t^2)^{-3/2}t\left[t^{p-2}(1+t^2)-(1+t^p)\right]\\&=(1+t^p)^{\frac{1}{p}-1}(1+t^2)^{-3/2}t(t^{p-2}-1),\end{aligned}$$

de aquí se tiene que $f'(1)=0$, $f'(0)=0$, también observamos que $f'(t)<0$ si $t\in(0,1)$ y $f'(t)>0$ si $t\in(-1,0)$, lo que significa que la función f alcanza un máximo en $t=0$. Sea $t\neq 0$, entonces

$$f(t)\leq f(0),$$

es decir, $f(t)\leq 1$ pues $f(0)=1$, en consecuencia

$$(1+t^p)^{1/p}(1+t^2)^{-1/2}\leq 1,$$

así

$$(1+t^p)^{1/p}\leq(1+t^2)^{1/2},$$

escojamos

$$t=\frac{|a-b|}{|a+b|},$$

entonces

$$(|a+b|^p+|a-b|^p)^{1/p}\leq\left(|a+b|^2+|a-b|^2\right)^{1/2}.$$

□

Lema 8.3. *Si $p \geq 2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Demostración. En virtud del Lema 8.2 y la ley del paralelogramo podemos escribir

$$\begin{aligned}(|a+b|^p + |a-b|^p)^{1/p} &\leq (|a+b|^2 + |a-b|^2)^{1/2} \\ &= [2(|a|^2 + |b|^2)]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Por la desigualdad de Hölder para

$$\frac{2}{p} + \frac{p-2}{p} = 1,$$

tenemos

$$\begin{aligned}|a|^2 + |b|^2 &\leq (|a|^p + |b|^p)^{2/p}(1+1)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{p-2}{p}}(|a|^p + |b|^p)^{2/p},\end{aligned}$$

de aquí obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{p-2}{2p}}(|a|^p + |b|^p)^{1/p} \\ &= 2^{\frac{p-1}{p}}(|a|^p + |b|^p)^{1/p},\end{aligned}$$

por (8.1) tenemos

$$(|a+b|^p + |a-b|^p)^{1/p} \leq 2^{\frac{p-1}{p}}(|a|^p + |b|^p)^{1/p},$$

por lo tanto

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

□

Lema 8.4. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 < p < \infty$ y $q \geq 2$, entonces para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\left(\frac{|a+b|^q}{2} + \frac{|a-b|^q}{2}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{|a|^p + |b|^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Demostración. Consideremos la función

$$f(t) = \left(\frac{1+|t|^p}{2}\right)^{q/p} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^q - \left(\frac{1-t}{2}\right)^q$$

con $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{q}{p}p|t|^{p-1}\frac{t}{2|t|}\left(\frac{1+|t|^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}-1} - \frac{q}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{q-1} + \frac{q}{2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{q-1} \\ &= \frac{q}{2}\left[t|t|^{p-2}\left(\frac{1+|t|^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}-1} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^{q-1} + \left(\frac{1-t}{2}\right)^{q-1}\right]. \end{aligned}$$

Notese que

$$f'(0) = f'(1) = f(0) = f(1) = 0$$

y que $f'(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$, lo que significa que f es creciente en $[0,1]$, luego si $0 \leq t$, entonces $f(0) \leq f(t)$, de donde

$$0 \leq \left(\frac{1+|t|^p}{2}\right)^{q/p} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^q - \left(\frac{1-t}{2}\right)^q,$$

de aquí

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^q + \left(\frac{1-t}{2}\right)^q \leq \left(\frac{1+|t|^p}{2}\right)^{q/p},$$

por lo cual

$$\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^q + \left(\frac{1-t}{2}\right)^q\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1+|t|^p}{2}\right)^{1/p}, \tag{8.2}$$

hacemos $t = b/a$, entonces $0 \leq b/a \leq 1$, reemplazando t en (8.2) resulta

$$\left(\frac{|a+b|^q}{2} + \frac{|a-b|^q}{2}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{|a|^p + |b|^p}{2}\right)^{1/p}.$$

□

Teorema 8.5. *Si* $1 < p < \infty$. *El espacio* L_p *es uniformemente convexo.*

Demostración. Distingamos dos casos:

Caso 1 $p \geq 2$. En virtud del Lema 8.3 tenemos que

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

para $a, b \in \mathbb{R}$. Ahora bien, sean f y g funciones de L_p, entonces

$$|f+g|^p + |f-g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p),$$

integrando tenemos

$$\int |f+g|^p \, d\mu + \int |f-g|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right),$$

es decir,

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Ahora bien, si $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ y $\|f-g\|_p \geq \epsilon$, entonces

$$\|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) - \|f-g\|_p^p$$

implica que

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &\leq 2^{p-1}2 - \epsilon^p \\ &= 2^p - \epsilon^p, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right),$$

de donde

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \right)^{1/p} \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p,$$

de esto último obtenemos que

$$\left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p \leq 1 - \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p,$$

así

$$\delta_{L_p}(\epsilon) \geq \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p.$$

Caso 2 $1 < p < 2$. Del Lema 8.3 tenemos

$$\left(\frac{|a+b|^q}{2}+\frac{|a-b|^q}{2}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{|a|^p+|b|^p}{2}\right)^{1/p}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, $q \geq 2$ y $1 < p < \infty$. Escojamos $q = 2$ y sean $f, g \in L_p$ con $1 < p < \infty$, entonces

$$\left(\frac{|f+g|^2}{2}+\frac{|f-g|^2}{2}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{|f|^p+|g|^p}{2}\right)^{1/p},$$

de aquí

$$\left[\left(\frac{|f+g|^2}{2}+\frac{|f-g|^2}{2}\right)^{1/2}\right]^p \leq \frac{|f|^p+|g|^p}{2}$$

e integrando

$$\int \left[\left(\frac{|f+g|^2}{2}+\frac{|f-g|^2}{2}\right)^{1/2}\right]^p d\mu \leq \int \left(\frac{|f|^p+|g|^p}{2}\right) d\mu,$$

así

$$\left\|\left(\frac{|f+g|^2}{2}+\frac{|f-g|^2}{2}\right)^{1/2}\right\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2},$$

de donde

$$\left\|\left(\frac{|f+g|^2}{2}+\frac{|f-g|^2}{2}\right)^{1/2}\right\|_p \leq 1.$$

En virtud de la observación 7.8 tenemos

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2 \leq \left\|\left(\frac{f+g}{2}+\frac{f-g}{2}\right)^{1/2}\right\|_p \leq 1,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^2 &\leq 1 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2\\ &\leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^2 \leq \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \leq 1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2.$$

$\square$

Observación 8.6. *La convexidad uniforme es una propiedad geométrica de la norma, una norma equivalente no necesariamente es uniformemente convexa. Por otra parte, la reflexividad es una propiedad topológica, es decir, un espacio reflexivo sigue siendo reflexivo para sus normas equivalentes. El Teorema de Milman-Pettis (ver Brezis) nos provee de una herramienta inusual, nos dice que una propiedad geométrica implica una propiedad topológica. En otras palabras, todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. Antes de hablar del recíproco de este resultado analicemos el siguiente ejemplo. Consideremos en* $\mathbb{R}^2$ *las normas Euclídea* $\|(x,y)\|_2 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$ *y la norma* l_1 $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$*, no es difícil demostrar que*

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_1$$

es decir, las normas $\|(x,y)\|_1$ *y* $\|(x,y)\|_2$ *son equivalentes, además* $\mathbb{R}^2$ *con la norma Euclídea es uniformemente convexo mientras que con la norma* l_1 *no lo es, sin embargo* $\mathbb{R}^2$ *es reflexivo con respecto a ambas normas. El siguiente resultado nos dice que el recíproco del Teorema de Milman-Petti no es cierto.*

Teorema 8.7 (M.M. Day)**.** *Existen espacios de Banach los cuales son separables, reflexivos y estrictamente convexos, pero no son isomorfos a ningún espacio uniformemente convexo.*

M.M. Day, Reflexive Banach space not isomorphic to uniformly convex spaces, Bull. Amer. Math. Soc. volume 47, n4 (1941), 313-317.

Ejercicios

1. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ las normas $\|(x,y)\|_2 = (|x|^2+|y|^2)^{1/2}$ y $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. Demuestre que estas normas son equivalentes, es decir

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_1.$$

Capítulo 9

Isometría en L_p

Definición 9.1. *El operador lineal $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ se dice que es una isometría si y sólo si*

$$\|T(f)\|_p = \|f\|_p \quad (f \in L_p(\mu)).$$

Lema 9.2. *Sean ξ y ν dos números reales. Entonces si $2 \le p < \infty$*

$$|\xi + \nu|^p + |\xi - \nu|^p \le 2(|\xi|^p + |\nu|^p),$$

y

$$|\xi + \nu|^p + |\xi - \nu|^p \ge 2(|\xi|^p + |\nu|^p).$$

para $p < 2$. Si $p \neq 2$, la igualdad ocurre si ξ o ν es cero.

Demostración. Si $p = 2$, tenemos la igualdad para todo ξ y ν. Si $2 < p < \infty$, entonces $1 \le p/2$, luego con los exponentes conjugados $p/2$ y $p/(p-2)$ aplicamos la desigualdad de Hölder a $\alpha^2 + \beta^2$ (ver Lema 2.33) así

$$\alpha^2 + \beta^2 \le (\alpha^p + \beta^r)^{\frac{2}{p}} (1+1)^{\frac{p-2}{p}}$$

de donde se obtiene que

$$\alpha^p + \beta^p \ge 2^{\frac{2-p}{2}} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}. \tag{9.1}$$

Si $0 < p < 2$, reemplazamos p por $4/p$ en (9.1), se tiene que

$$\alpha^{\frac{4}{p}} + \beta^{\frac{4}{p}} \ge 2^{\frac{p-2}{p}} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{2}{p}}.$$

Si reemplazamos α por $\alpha^{\frac{p}{2}}$ y β por $\beta^{\frac{p}{2}}$ esta última desigualdad se transforma en

$$\alpha^2 + \beta^2 \ge 2^{\frac{p-2}{p}} (\alpha^p + \beta^p)^{\frac{2}{p}}$$

o

$$\alpha^p + \beta^p \leq 2^{\frac{2-p}{2}} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}. \tag{9.2}$$

Dado que

$$0 \leq \frac{\xi^2}{\xi^2 + \nu^2} \leq 1$$

y

$$0 \leq \frac{\nu^2}{\xi^2 + \nu^2} \leq 1$$

para $2 < p$ resulta

$$0 \leq \frac{|\xi|^{2(p-2)}}{(\xi^2 + \nu^2)^{p-2}} \leq 1$$

y

$$0 \leq \frac{|\nu|^{2(p-2)}}{(\xi^2 + \nu^2)^{p-2}} \leq 1$$

lo que es equivalente a

$$0 \leq \frac{|\xi|^{p-2}}{(\xi^2 + \nu^2)^{\frac{p-2}{2}}} \leq 1$$

y

$$0 \leq \frac{|\nu|^{p-2}}{(\xi^2 + \nu^2)^{\frac{p-2}{2}}} \leq 1.$$

Así,

$$0 \leq \frac{|\xi|^p}{(\xi^2 + \nu^2)^{\frac{p}{2}}} \leq \frac{|\xi|^1}{\xi^2 + \nu^2}$$

y

$$0 \leq \frac{|\nu|^p}{(\xi^2 + \nu^2)^{\frac{p}{2}}} \leq \frac{|\nu|^1}{\xi^2 + \nu^2}.$$

Sumando estas dos últimas desigualdades obtenemos

$$|\xi|^p + |\nu|^p \leq (\xi^2 + \nu^2)^{\frac{p}{2}} \quad \text{si } 2 < p. \tag{9.3}$$

De manera similar se obtiene

$$|\xi|^p + |\nu|^p \geq (\xi^2 + \nu^2)^{\frac{p}{2}} \quad \text{si } p < 2. \tag{9.4}$$

Note que la igualdad se da en (9.3) y (9.4) si y sólo si $\xi = 0$ ó $\nu = 0$. Finalmente si $p > 2$, reemplazamos α y β en (9.1) por $|\xi + \nu|$ y $\xi - \nu$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\xi+\nu|^p + |\xi-\nu|^p &\geq 2^{\frac{2-p}{p}}(|\xi+\nu|^2 + |\xi-\nu|^2)^{\frac{p}{2}} \\
&= 2^{\frac{2-p}{p}}(2[|\xi|^2 + |\nu|^2])^{\frac{p}{2}} \\
&= 2(\xi^2+\nu^2)^{\frac{p}{2}} \\
&\geq 2(|\xi|^p + |\nu|^p).
\end{aligned}$$

Así, obtenemos la primera desigualdad. La segunda desigualdad se obtiene de manera similar usando (9.2) y (9.4). Observamos que en cualquier caso la igualdad ocurre si $\xi = 0$ ó $\nu = 0$. □

Como una consecuencia del lema anterior la siguiente versión integral.

Lema 9.3. *Sea $1 \leq p < \infty$, $p \neq$ y supongamos que $f, g \in L_p(\mu)$. Entonces*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p = 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

si y sólo si $fg = 0$ c.t.p. $[\mu]$.

Demostración. Si $f.g = 0$ c.t.p. $[\mu]$, entonces $\mu(\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_{\operatorname{supp}(g)} |f+g|^p d\mu + \int_{\operatorname{supp} g} |f+g|^p d\mu + \int_{X\setminus(\operatorname{supp} f\cap \operatorname{supp} g)} |f+g|^p d\mu \\
&= \|f\|_p^p + \|g\|_p^p
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Similarmente obtenemos

$$\|f-g\|_p^p = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \tag{9.6}$$

Sumando (9.5) y (9.6) se tiene

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p = 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

$\Rightarrow$) Ahora, si $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p = 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$, entonces

$$\int_X |f+g|^p d\mu + \int_X |f-g|^p d\mu - 2\left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu\right) = 0$$

luego

$$\int_X [|f+g|^p + |f-g|^p - 2(|f|^p + |g|^p)]\, d\mu = 0.$$

Ahora bien en virtud del Lema 9.2 tenemos

$$|f+g|^p + |f-g|^p - 2(|f|^p + |g|^p) \geq 0$$

o

$$|f+g|^p + |f-g|^p - 2(|f|^p + |g|^p) \leq 0.$$

En ambos casos, por un resultado conocido de la teoría de integración de Lebesgue resulta

$$|f+g|^p + |f-g|^p - 2(|f|^p + |g|^p) = 0$$

c.t.p.$[\mu]$. Esto claramente implica que para casi todo $x \in X$, $f(x) = 0$ cuando $g(x) \neq 0$ y $g(x) = 0$ cuando $f(x) \neq 0$, o alternativamente $\mu(\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(g)) = 0$. $\square$

Teorema 9.4 (Lamberti). *Sea el operador lineal $T : L_p(m) \to L_p(m)$ una isometría en $L_p(m)$ donde $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. Entonces existe una función Lebesgue medible $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y una única función Lebesgue medible h definida c.t.p. $[m]$ tal que*

$$T(f)(x) = h(x)f(\phi(x)).$$

La función ϕ está definida c.t.p.$[m]$ en $\mathrm{supp}(h)$ *y para cada conjunto E Lebesgue medible con $m(E) < \infty$, se tiene*

$$m(E) = \int_{\phi^{-1}(E)} |h(t)|^p dt.$$

Demostración. Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue medible tal que $m(A) < \infty$, definimos $\varphi(A)$ por

$$\varphi(A) = \mathrm{supp}(T(\chi_A)).$$

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces por el Lema 9.3

$$\|\chi_A + \chi_B\|_p^p + \|\chi_A - \chi_B\|_p^p = 2(\|\chi_A\|_p^p + \|\chi_B\|_p^p).$$

Del hecho que T es una isometría en $L_p(m)$ y en virtud del Lema 9.3 se sigue que

$$T(\chi_A) \cdot T(\chi_B) = 0, \quad \text{c.t.p.}[\mu] \text{ en } \mathbb{R}.$$

Además $\chi_{A \bigcup B} = \chi_A + \chi_B$ y $T(\chi_{A \bigcup B}) = T(\chi_A) + T(\chi_B)$, luego

$$\varphi(A \bigcup B) = \varphi(A) \bigcup \varphi(B), \quad \text{si } A \cap B = \emptyset.$$

Dado que para todo conjunto A y B se tiene que

$$\varphi(A) = \varphi(A \backslash (A \cap B)) \bigcup \varphi(A \cap B),$$

y

$$\varphi(A \bigcup B) = \varphi(A \backslash (A \cap B)) \bigcup \varphi(B)$$

es claro que para conjuntos A y B Lebesgue medibles tal que $m(A) < \infty$ y $m(B) < \infty$

$$\varphi(A \bigcup B) \bigcup \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B).$$

Por otra parte, sea $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $m(X_j) < \infty$ para $j = 1, 2, \ldots$ y $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, además sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(X_j)$. Entonces φ envía subconjuntos medibles en $\mathbb{R}$ en subconjuntos medibles de E y $\varphi(\mathbb{R}\backslash A) = E \backslash \varphi(A)$.

También, si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ Lebesgue medibles con $m(A_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$ y si $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ entonces $\chi_A = \text{lím}_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j}$, de la continuidad y acotamiento de T, se tiene que

$$T(\chi_A) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} T(\chi_{A_j}).$$

Sin embargo, la sucesión $\{\operatorname{supp} T(\chi_{A_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una clase disjunta, así

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Esto nos muestra que φ es un σ-homomorfismo, ahora, invocando el Teorema B.2 podemos hallar una función $\phi : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible tal que

$$\varphi(A) = \phi^{-1}(A)$$

para cualquier conjunto de Borel A. Luego, dado que el conjunto $\varphi(A)$ es único c.t.p.$[\mu]$, entonces la función ϕ es única c.t.p.$[m]$. Dado un conjunto C Lebesgue medible con $m(C) < \infty$, definamos

$$h_C = T(\chi_X),$$

así

$$\|T(\chi_c)\|_p = \|h_C\|_p = (m(C))^{\frac{1}{p}},$$

luego, para cada conjunto medible A, tenemos

$$\chi_C = \chi_{C\cap A} + \chi_{C\cap A^c},$$

de aquí, resulta

$$h_C = T(\chi_{C\cap A}) + T(\chi_{C\cap A^c}).$$

Sin embargo, arriba hemos demostrado que

$$(\operatorname{supp}(T(\chi_{A\cap C})) \cap (\operatorname{supp} T(\chi_{C\cap A^c}))) = \emptyset.$$

Así,

$$\begin{aligned} T(\chi_{C\cap A}) &= h_C \chi_{\varphi(C\cap A)} \\ &= h_C \chi_{C\cap A}(\phi(\cdot)). \end{aligned}$$

Para la sucesión $\{X_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ considerada una linea arriba, definamos una función h Lebesgue medible dada por

$$h = \lim_{j\to\infty} h_{X_j}.$$

Entonces, dado cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ medible con $m(A) < \infty$, se sigue de la acotación y continuidad de T que

$$\begin{aligned} T(\chi_A) &= \lim_{j\to\infty} T(\chi_{X_j\cap A}) \\ &= h\chi_A(\phi(\cdot)). \end{aligned}$$

Así, para cada función f simple y medible se tiene que

$$T(f) = hf(\phi(\cdot)).$$

Sea $f \in L_p(m)$, entonces en virtud del Lema 2.47 existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que

$$\|f - s_n\|_p \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ahora

$$\|T(f) - hS_n(\phi(\cdot))\|_p = \|T(f - S_n)\|_p = \|f - S_n\|_p$$

Entonces por el Lema 2.28 con $g(\varepsilon) = \varepsilon^p$ resulta

$$\begin{aligned} m(\{x \in \mathbb{R} \mid |T(f)(x) - hS_n(\phi(x))| > \varepsilon\}) &\leq \varepsilon^{-p}\|T(f) - hS_n(\phi(\cdot))\|_p^p \\ &= \varepsilon^{-p}\|f - S_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Así, que $m(\{x \in \mathbb{R} \mid |T(f)(x) - hS_n(\phi(x))| > \varepsilon\}) \to 0$ cuando $n \to \infty$ $(\varepsilon > 0)$, de esto último se deduce que existe una subsucesión $\{S_{n_k}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \lim_{j\to\infty} h(x)S_{n_k}(\phi(x)) \\ &= h(x)f(\phi(x)). \end{aligned}$$

Finalmente, para cada conjunto A Lebesgue medible con $m(a) < \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{\mathbb{R}} (\chi_A(x))^p dm = \int_{\mathbb{R}} |T(\chi_A)(x)|^p dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^p \chi_A(\phi(x)) dm \\ &= \int_{\phi^{-1}(A)} |h(x)|^p dm. \end{aligned}$$

La función ϕ es única c.t.p.$[m]$, en efecto sea h^0 otra función tal que $T(f) = h^0 f(\phi(\cdot))$ dado que f es arbitraria tenemos $h = h^0$ c.t.p.$[m]$. $\square$

Apéndice A

El teorema del residuo

Teorema A.1 (Teorema del residuo)**.** *Sea f una función analítica dentro y sobre una curva simple cerrada γ excepto en los puntos $z_1, \ldots, z_n$ que se encuentra en el interior de ésta. Entonces*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z = z_k).$$

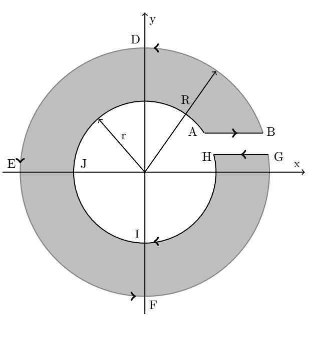
Lema A.2. *Sea $p > 1$, entonces*

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}.$$

Demostración. Consideremos la integral de variable compleja dada por

$$\oint_C \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z}dz$$

donde C es la región compuesta de la siguiente manera



Los segmentos AB y GH son paralelos entre si y con el eje real positivo. Sea

$$f(z) = \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z}.$$

No es difícil deducir que f posee un polo simple en $z = -1$ dentro de la región C.

Si $z = -1$, entonces

$$z = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = e^{\pi i}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z = -1) &= \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) \\
&= \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z} \\
&= \lim_{z\to -1} z^{-\frac{1}{p}} \\
&= e^{-\frac{\pi i}{p}}.
\end{aligned}$$

En virtud del teorema del residuo se tiene que

$$\oint_C \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z}dz = 2\pi i e^{-\frac{\pi i}{p}}.$$

Por otra parte, de acuerdo a las integrales de caminos se tiene que

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\pi i}{p}} &= \int_{AB} f(z)dz + \int_{BDEFG} f(z)dz + \int_{GH} f(z)dz + \int_{HJA} f(z)dz \\
&= \int_r^R \frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}} iRe^{\theta i}d\theta \\
&\qquad + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{-\frac{1}{p}}}{1+xe^{2\pi i}}dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}} iRe^{\theta i}d\theta.
\end{aligned}$$

Esto último se obtuvo al hacer el cambio $z = xe^{2\pi i}$ en la tercera integral, además se debe tener presente que el argumento de z aumenta 2π al dar una vuelta alrededor del círculo $BDEFG$.

Ahora bien, si $r \to 0$ y $R \to \infty$ podemos observar que la segunda y tercera integral del resultado anterior se anulan.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{2\pi}\frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}}iRe^{\theta i}d\theta\right) &= \int_0^{2\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}}iRe^{\theta i}d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{iRe^{\theta i}}{(Re^{\theta i})^{\frac{1}{p}}(1+Re^{\theta i})}d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{i}{(Re^{\theta i})^{\frac{1}{p}}}d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}0d\theta\\
&=0.
\end{aligned}$$

Para calcular el otro límite se procederá de manera similar, previo a ello, hacemos el siguiente cambio de variable $u = r^{\frac{1}{p}}$ donde $u \to 0$. Así

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\left(\int_{2\pi}^{0}\frac{(re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+re^{\theta i}}ire^{\theta i}d\theta\right) &= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}\left(\lim_{r\to 0}\frac{r}{r^{\frac{1}{p}}(1+re^{\theta i})}\right)d\theta\\
&= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}\left(\lim_{u\to 0}\frac{u^p}{u(1+ue^{\theta i})}\right)d\theta\\
&= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}(0)d\theta\\
&=0.
\end{aligned}$$

Finalmente, resulta

$$\begin{aligned}
2\pi ie^{-\frac{\pi i}{p}} &= \int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx + \int_{\infty}^{0}\frac{(xe^{2\pi i})^{-frac1p}}{1+xe^{2\pi i}}dx\\
&= \int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx - \int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}e^{-\frac{2\pi i}{p}}}{1+xe^{2\pi i}}dx\\
&= \int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx - e^{-\frac{2\pi i}{p}}\int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi))}dx\\
&=(1-e^{-\frac{2\pi i}{p}})\int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx =& \frac{2\pi i e^{-\frac{\pi i}{p}}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{p}}} \\
=& \frac{2\pi i}{e^{\frac{\pi i}{p}}}\left(1-\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{p}}}\right) \\
=& \frac{\pi}{\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{p}}-e^{-\frac{\pi i}{p}}}{2i}\right)} \\
=& \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Apéndice B

σ-homomorfismo

Definición B.1. *Sea* $(X, \mathcal{A})$ *un espacio medible. Si* f *es una función real* $\mathcal{A}$*-medible en* X*. Entonces la función de conjuntos* φ *definida por*

$$\varphi(A) = f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

es una función definida de la σ*-álgebra* $\mathcal{L}$ *de* $\mathbb{R}$ *en la* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *tal que*

$$\varphi(A \bigcup B) = \varphi(A) \bigcup \varphi(B) \quad si\ A \cap B = \emptyset \tag{B.1}$$

y

$$\varphi(A \backslash B) = \varphi(A) \backslash \varphi(B) \quad A, B \in \mathcal{L}. \tag{B.2}$$

Una función φ *que satisface las condiciones* (B.1) *y* (B.2) *se dice que es un homomorfismo de* $\mathcal{L}$ *en* $\mathcal{A}$*. El homomorfismo se dice que es un* σ*-homomorfismo si* $\varphi(\mathbb{R}) = X$ *y para toda sucesión* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de conjuntos disjuntos en* $\mathcal{L}$ *se cumple que*

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Teorema B.2 (Sikorki)**.** *Sea* $(X, \mathcal{A})$ *un espacio de medida y* φ *un* σ*-homomorfismo definido de la* σ*-álgebra de Borel en* $\mathcal{A}$*. Entonces existe una única función* f $\mathcal{A}$*-medible tal que* $\varphi(A) = f^{-1}(A)$ *para cualquier conjunto de Borel* A*.*

Demostración. Para cada número real r, sea $A_r = \varphi([-\infty, r])$, note que $A_\infty = X$ y $A_{r_1} \subset A_{r_2}$ si $r1 \geq r_2$.i

Ahora bien, para cada $x \in X$ definamos

$$f(x) = \text{ínf}\{r \in \mathbb{R} \mid x \in A_r\}.$$

Note que $f : X \to \mathbb{R}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X \mid f(x) \leq t\} = \bigcup_{r \leq t} A_r = \bigcup \{A_S \mid s \leq t, s \in \mathbb{Q}\}$$

donde $\mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números racionales. Así es claro que f es $\mathcal{A}$-medible, dado que todo conjunto de Borel puede expresarse como unión e intersección contable de subintervalos de $\mathbb{R}$ abiertos y cerrados, entonces

$$A_r = f^{-1}\left([-\infty, r]\right).$$

Finalmente, en virtud que φ es un σ-homomorfismo es fácil ver que $\varphi(A) = f^{-1}(A)$. $\square$

Apéndice C

Alfabeto griego

1. α-alpha
2. β-beta
3. γ, Γ-gamma
4. δ, Δ-delta
5. ε-epsilon
6. ζ-zeta
7. η-eta
8. θ, Θ-theta
9. ι-iota
10. κ-kappa
11. λ, Λ-lambda
12. μ-mu
13. ν-nu
14. ξ, Ξ-xi
15. o-omicron
16. π, Π-pi
17. ρ-rho

18. σ, Σ-sigma
19. τ-tau
20. υ, Υ-upsilon
21. φ, Φ-phi
22. χ-chi
23. ψ, Ψ-psi
24. ω, Ω-omega

Bibliografía

[1] Y.A. Abramovich and C.D. Aliprantis. *An Invitation to Operator Theory*, volume 50 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, USA, 2002.

[2] Charalambos D. Aliprantis and Burkinshaw. *Principles of Real Analysis*. Academic Press, New York, third edition, 1998.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2010.

[4] Emmanuelle DiBenedetto. *Real Analysis*. Birkhäuser Advanced Texts, Boston, 2002.

[5] Gerald Folland. *Real Analysis, Modern Tecniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, Inc., New York, second edition, 1999.

[6] Frank Jones. *Lebesgue integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts, revised edition, 2001.

[7] Serge Lang. *Real Analysis*. Addison-Wesley Publising Company, Reading, Massachusetts, 1983.

[8] John McDonald and Neil Weiss. *A Course in Real Analysis*. Academic Press, New York, 1999.

[9] Ole A. Nielsen. *An Introduction to Integration and Measure Theory*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced text, A Wiley-Interscience publication, Jhon Wiley and Sons, Inc., New York, 1996.

[10] George Okikiolu. *Aspect of the theory of Bounded Integral Operators in L_p-spaces*. Academic Press, New York, 1971.

[11] H.L. Royden. *Real Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, third edition, 1988.

[12] Walter Rudin. *Real and complex analysis*, volume 693. Mc Graw-Hill Book Company, New York, second edition, 1987.

[13] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 30 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, USA, 1970.

[14] Alberto Torchinski. *Real Variables*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1988.

Índice alfabético

Aplicación lineal conjugada, 121

Cantor
  diagonalización de, 94
Complemento ortogonal, 119
Conjunto
  de Borel, 100
Convergencia
  débil, 89
Convexidad Uniforme, 209
Convolución, 157, 162
  propiedades, 162

Desigualdad
  de Cauchy-Schwarz, 120, 125
  de Hardy, 113
    en l_p, 45
  de Hedberg, 193, 194
  de Hilbert, 112
    en l_p, 47, 49
  de Hölder, 30, 38, 108–110, 112, 163, 191, 193
    generalizada, 32
  de Jensen, 10, 12
  de Kolmogorov, 148
  de Markov, 35, 147
  de Minkowski, 28, 39, 41, 109
  de Paley-Zygmund, 126
  de Rogers, 54
  de Young, 16
  integral de Minkowski, 109, 114
Dimensión
  finita, 102
Distribuciones, 180

Espacio
  completo, 119
  de Banach, 36, 42, 102
  de Hilbert, 118–121
  de las funciones localmente integrables, 137
  dual, 86, 115, 155
  dual del espacio de Schwartz, 180
  métrico
    σ-compacto, 107
  normado, 116
  reflexivo, 117, 121
  separable, 43, 44
  σ-finito, 124
  uniformemente convexo, 209, 213
    módulo de convexidad, 209
  vectorial, 118
Espacios
  isométricamente isomorfos, 115, 117

Fatou
  lema de, 72, 188, 190
Función
  Borel medible, 101
  convexa, 5, 6, 9
  delta, 184
  escalonada, 63
  esencialmente acotada, 52
  gamma, 131
  localmente integrable, 137
  maximal de Hardy-Littlewood, 138, 146, 156
  medible, 111

semicontinua inferiormente, 139
simple, 57, 58, 96
Funcional
acotado, 67, 114
continuo, 120
lineal, 67, 120–122

Identidad de aproximación, 184
Inmersión natural, 117
Integral
de Gauss-Weierstrass, 195
de Lebesgue-Stieltjes, 99
de Poisson, 195
Isometría, 121
en L_p, 217
Isomorfismo, 115
isométrico, 117

l_∞, 50
Laplaciano, 179
fraccional, 180
Ley del paralelogramo, 118, 119, 126, 209, 211
Localmente uniformemente integrable, 181
L_p, 21
aproximaciones en, 57
débil, 141
es separable, 64
L_2, 118
norma en, 21, 27
l_p, 38
L_p con $0 < p < 1$, 197

M.M. Day, 215
Medida
de Borel, 99
de Lebesgue, 104, 191
de Radon, 191
con signo, 190
σ-finita, 124

Norma
del supremo, 102
en l_p, 41

Operador
acotado, 127
acotado cerca del origen, 189
adjunto del operador de Hardy, 114
compacto, 107, 109
de Hardy, 113, 128, 164, 165
de Volterra, 133
dilatación, 186
espectro de un, 127
identidad, 127
integral, 107, 108
maximal, 137
no compacto, 128
no invertible, 127
semicontinuo, 190
sublineal, 147, 150, 151
débil (p, q), 147
de tipo fuerte (p, q), 147

Potencial
de Riesz, 179, 181, 186
norma del, 192
Potenciales, 179
en L_p, 186
Producto interior, 118–120

Semigrupo de Gauss-Weierstrass, 164
σ-homomorfismo, 229
Subconjunto
denso, 44
Subespacio
cerrado, 120
propio, 120
Supremo esencial, 22

Teorema
de Arzela-Ascoli, 107, 109

de Bolzano-Weierstrass, 93
de Cotlar, 154
de cubrimiento de Vitali, 138
de descomposición de Hahn, 121
de diferenciación de Lebesgue, 142
de Fubini, 108–110, 112, 114, 180
de Hahn-Banach, 115
de la convergencia dominada, 86
de Lamberti, 220
de Radon-Nikodym, 121, 124
de representación de Riesz, 74, 79
de Riesz, 120–122
de Sikorki, 229
de Tonelli, 159, 163
de W.H. Young, 166
del residuo, 225
cálculo, 129
Interpolación de Marcinkiewick, 151
Transformada
de Fourier, 179
inversa de Fourier, 180
Traslación
continuidad de, 103

Urysohn
lema de, 59

Valor propio, 127
Von Neumann, 121

Young, 18, 19