Teoría de la decisión

Teoría de la decisión

Luis G. Moreno Osorio

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

TEORÍA DE LA DECISIÓN

Primera edición, 2010
ISBN : 978-958-719-512-5

Preparación editorial e impresión:
Editorial Universidad Nacional de Colombia
direditorial@unal.edu.co
Bogotá, Colombia

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Moreno Osorio, Luis Gildardo, 1941-
Teoría de la decisión / Luis G. Moreno Osorio. - Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2010
xii, 151p. : il. – (Colección monografías)

Incluye referencias bibliográficas

ISBN : 978-958-719-512-5

1. Toma de decisiones 2. Procesos de Markov 3. Decisiones estadísticas 4. Teoría de la estimación I. Tít.

CDD-21 519.542 / 2010

A mis padres

Contenido

Prólogo

La base fundamental de la teoría de la decisión la componen las acciones que tiene a su disposición un decisor y los eventos que se pueden presentar como consecuencia de la adopción de estas acciones.

Este libro contiene la revisión del texto Teoría de la decisión, editado por la Universidad Nacional de Colombia y que recopiló las notas empleadas en la enseñanza del curso del mismo nombre. Como en la edición anterior, los temas tratados se desarrollan de manera que sean fáciles de comprender por los lectores con conocimientos elementales de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, cálculo de probabilidades y procesos de Markov.

En los tres primeros capítulos se analizan los resultados provenientes de las combinaciones de las acciones y los eventos. Además se discuten los criterios más simples para tomar decisiones y se muestra la forma en que se establece la máxima cantidad que un decisor podría pagar por una información que le permita seleccionar la mejor acción entre las que tiene a su disposición.

En los cuatro capítulos siguientes se analizan los problemas de decisión mediante el uso de un diagrama de árbol y las situaciones en que el decisor puede buscar información adicional proveniente de un muestreo. También se indica la forma en que se resuelven los problemas de decisión, mediante el empleo de funciones de decisión y de riesgo.

En el capítulo VIII se introduce el uso de la función de utilidad, diseñada para tener en cuenta la experiencia del decisor y sus preferencias. Finalmente en el capítulo IX se analizan los problemas de decisiones que involucran el uso de los procesos de Markov.

Los ejemplos que se presentan en cada capítulo sirven para complementar la teoría. Por otra parte, los ejercicios al final de cada capítulo se distribuyen por secciones para que el estudiante pueda consolidar sus conocimientos a medida que los vaya adquiriendo.

Agradezco al ingeniero Jorge E. Gómez M. la dedicación y el esmero que puso en la trascripción del manuscrito nuevo. También manifiesto mi gratitud a Edgard Rincón por su colaboración en la primera edición del texto.

Finalmente, mis agradecimientos al profesor Gustavo Rubiano, director de la oficina de publicaciones de la Facultad de Ciencias, por el apoyo brindado para la publicación del texto.

El autor

CAPÍTULO 1

Elementos básicos en la toma de decisiones

1.1 Introducción

Cuando un decisor enfrenta un problema, debe tener en cuenta las acciones que puede adoptar, los eventos que se pueden presentar, relacionados con el problema, y las consecuencias provenientes de la escogencia de cada acción y de la ocurrencia de cada evento.

En este capítulo veremos inicialmente las características que distinguen a todo problema de decisión, como son las acciones, los eventos y las consecuencias o resultados que provienen de las combinaciones entre las acciones y los eventos. Posteriormente trataremos con estos resultados los que se colocan en las llamadas tablas de decisión que se convierten en matrices o tablas de pago, cuando a ellos se les asignan valores numéricos para representar ganancias o costos. Al final del capítulo veremos los problemas de decisión en los cuales, no es procedente el uso de la tabla de pagos.

1.2 Acciones y eventos

En la teoría de las decisiones se asume que cada actividad posible es conocida por el decisor (una persona u organización) y que solo una de estas puede seleccionarse. Las actividades potenciales del decisor se conocen con el nombre de "acciones" y se designan con la letra a. Al adoptar una acción, quien lo hace debe tener en cuenta sus consecuencias o resultados, los cuales también dependen del "estado de la naturaleza". Un "evento" o "estado de la naturaleza", indicado por θ, es una representación de la situación del mundo real a la cual se aplica la acción. Vemos así que todas las decisiones implican la escogencia de una acción, pero los resultados provenientes de cada acción son inciertos, porque un resultado es determinado parcialmente por la escogencia y parcialmente por el azar.

Con el fin de medir las consecuencias de una acción, por parte del decisor, se emplea una "Función de pagos" $l(a, \theta)$ para reflejar el resultado que se obtiene al adoptar la acción a, cuando el estado de la naturaleza es θ.

Ejemplo 1.1. Considere la alternativa de llevar o no un paraguas durante un día determinado. Describa las acciones que se pueden adoptar, los eventos que se pueden presentar y los resultados que se pueden obtener.

Solución. Aquí hay dos posibilidades: llevar un artículo que puede, en caso de lluvia, favorecer el vestido, o desafiar los elementos con las manos libres, esperando que no llueva. La falta de habilidad para predecir el tiempo causa incertidumbre sobre si va o no a llover. No obstante, se debe tomar una decisión a pesar de la incertidumbre.

De acuerdo con las alternativas anteriores, las acciones que se tienen en cuenta son a_1: llevar el paraguas y a_2: dejar el paraguas en casa. Por otra parte, los eventos son θ_1: llueve y θ_2: no llueve. De esta manera se tienen los resultados $l(a_1, \theta_1)$: permanecer protegido, $l(a_1, \theta_2)$: llevar una carga innecesaria, $l(a_2, \theta_1)$: mojarse y $l(a_2, \theta_2)$: permanecer seco y sin molestias. □

1.3 Tabla de decisiones

Para facilitar su análisis, un problema de decisión puede resumirse en una “tabla de decisiones”, en la cual se indican los resultados obtenidos al adoptar las distintas acciones en cada uno de los eventos. En el ejemplo siguiente se ilustra la forma en que se presenta una tabla de decisiones.

Ejemplo 1.2. Construya la tabla de decisiones para el problema descrito en el ejemplo 1.1.

Solución. La tabla de decisiones para el problema descrito en el ejemplo 1.1 es la 1.1. Cada fila corresponde a un evento y cada columna corresponde a una acción. Los resultados aparecen como entradas en la tabla. □

TABLA 1.1. Decisiones para el ejemplo del paraguas.

	Acciones	
Eventos	a_1: llevar el paraguas	a_2: dejar el paraguas en casa
θ_1: llueve	$l(a_1, \theta_1)$: permanecer protegido	$l(a_2, \theta_1)$: mojarse
θ_2: no llueve	$l(a_1, \theta_2)$: llevar una carga innecesaria	$l(a_2, \theta_2)$: permanecer seco y sin molestias

Debe tenerse en cuenta que las acciones incluidas en la tabla de decisiones son sólo las que desea considerar el decisor. En el ejemplo anterior, “permanecer en casa” es otra acción posible, que excluimos porque no se ha contemplado.

1.4 Tabla de pagos

Generalmente, la función de pagos se mide en términos monetarios, para reflejar una ganancia o un costo. Si el problema se plantea en términos de pérdidas, estas se pueden mencionar como ganancias negativas. Debe notarse que $l(a, \theta)$ es una función únicamente de la acción a y del evento θ. De esta manera cada resultado, esto es, cada combinación evento-acción, tiene asociado a él un pago.

En la determinación de los pagos asignados a los resultados se asume que el decisor desea seleccionar una acción que lo acerque más a un objetivo. Por ejemplo, si la meta es asegurar un nivel elevado de ganancias, entonces un pago natural para cada resultado sería su ganancia.

Quienes toman las decisiones con metas diferentes pueden asignar pagos distintos a los resultados aun cuando consideren el mismo conjunto de alternativas. La asignación de los pagos debe hacerse de acuerdo con el grado de importancia que el decisor asigne a los resultados.

En general, en los problemas de la teoría de las decisiones, el decisor debe conocer todas las acciones potenciales a su disposición, los eventos mutuamente excluyentes que se pueden presentar y los valores numéricos que representan las consecuencias originadas por las ocurrencias de los eventos, cuando se han seleccionado las diversas acciones.

Puesto que, después de haberse escogido una acción, los pagos dependen del evento que ocurre, se mencionan algunas veces como “valores condicionales”. Estos valores pueden arreglarse convenientemente en una “tabla de pagos” o “matriz de pagos”. En el ejemplo 1.3 se ilustra la forma en que se presenta esta tabla.

Ejemplo 1.3. Una compañía petrolera, propietaria de un terreno en el que se cree hay petróleo, clasifica este terreno en términos del número de barriles que se espera obtener: 500.000 barriles, 200.000, 50.000 o ninguno. La compañía enfrenta el problema al decidir si realiza la perforación, alquila incondicionalmente el terreno a un perforador independiente o alquila condicionalmente el terreno por un valor que dependa de la cantidad de petróleo que se obtenga. El costo de perforación de un pozo productor es de 150.000 y el costo de perforación de un pozo seco es de 100.000. Para los pozos productores, el precio de venta por barril de petróleo es de 2. Bajo el acuerdo de un alquiler incondicional, la compañía recibe 50.000 por el terreno, mientras que, bajo el acuerdo de un alquiler condicional, recibe 0,80 por cada barril de petróleo extraído, siempre que el terreno rinda al menos 200.000 barriles; en caso contrario, no hay retribución alguna. Construya la tabla de ganancias para la compañía petrolera.

Solución. Las acciones a disposición de la compañía petrolera son a_1: realizar la perforación, a_2: alquilar incondicionalmente el terreno y a_3: alquilar condicionalmente el terreno. Por otra parte, el estado θ de la naturaleza indica que el número de barriles que es: θ_1: 500.000 barriles, θ_2: 200.000, θ_3: 50.000 y θ_4: 0.

Cuando la compañía realiza la perforación, la función de pagos (ganancias) tiene la forma siguiente:

$$l(a_1, \theta) = \begin{cases} 2\theta - 150.000 & \text{si} \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3 \\ -100.000 & \text{si} \quad \theta = \theta_4 \end{cases}$$

Cuando la compañía alquila incondicionalmente el terreno, recibe la suma de 50.000, cualquiera sea el número de barriles que obtenga el perforador independiente. Por esta razón, la función de pagos viene a ser:

$$l(a_2, \theta) = 50.000 \quad \text{si} \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4.$$

Finalmente, cuando la compañía alquila condicionalmente el terreno, la función de pagos es:

$$l(a_3, \theta) = \begin{cases} 0{,}80 & \text{si} \quad \theta = \theta_1, \theta_2 \\ 0 & \text{si} \quad \theta = \theta_3, \theta_4 \end{cases}$$

La tabla de pagos (ganancias) es la 1.2. □

Tabla 1.2. Ganancias para la compañía petrolera.

Número de barriles obtenidos	Acciones: Perforación	Alquiler incondicional	Alquiler condicional
500.000	850.000	50.000	400.000
200.000	250.000	50.000	160.000
50.000	−50.000	50.000	0
0	−100.000	50.000	0

Ejemplo 1.4. Un fabricante tiene la posibilidad de adquirir una máquina cuyo costo es de 50, produce ingresos anuales de 60 durante tres años y el costo anual de operación es de 24. Si compra la máquina, el fabricante puede venderla al final del primer año en 30 o seguir con ella y hacerle mantenimiento a un costo de 10. Al final del segundo año puede venderla en 15 o continuar con ella y hacerle mantenimiento a un costo de 25. Al final del tercer año, la máquina concluye su vida útil y carece

de valor. Si la máquina se vuelve obsoleta tecnológicamente, no tendrá valor de rescate y el fabricante no obtendrá ganancia alguna en el año en que se presente la obsolescencia. Construya la tabla de ganancias del fabricante.

Solución. Como el fabricante no tiene la obligación de adquirir la máquina, una de las acciones que él podría adoptar sería a_1: no comprar la máquina. Las otras acciones que podría adoptar el fabricante serían a_2: comprar la máquina y venderla al final del primer año, a_3: comprar la máquina y venderla al final del segundo año y a_4: comprar la máquina y seguir con ella durante los tres años de vida útil.

En cuanto a los eventos se refiere, se pueden presentar: θ_i: la obsolescencia tecnológica ocurre en el i-ésimo año ($i = 1, 2, 3$) y θ_4: la obsolescencia tecnológica no se presenta durante el periodo útil de la máquina.

Cuando el fabricante no compra la máquina, asumimos que no tiene ganancias ni pérdidas puesto que podría invertir su capital en otra actividad económica. Así, la función de pagos (ganancias) sería

$$l(a_1, \theta_i) = 0 \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Cuando la obsolescencia tecnológica tiene lugar en el primer año, el fabricante pierde la cantidad que invierte en la compra de la máquina. En este caso,

$$l(a_j, \theta_1) = -50 \quad j = 2, 3, 4$$

Si el fabricante vende la máquina al final del primer año, obtiene ingresos provenientes de la producción y la venta de aquella, mientras que sus egresos son causados por la compra de la máquina y por el costo de operación. En esta forma la ganancia obtenida es:

$$\begin{aligned} l(a_2, \theta_i) &= 60 + 30 - 50 - 24 \\ &= 16, \quad i = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Cuando el fabricante decide conservar la máquina por un lapso superior a un año y esta se vuelve obsoleta en el segundo año, él obtiene ingresos originados por la producción solo durante el primer año y tiene egresos causados por la compra de la máquina, el costo de operación en el primer año y el costo de mantenimiento al comienzo del segundo año; en otras palabras,

$$\begin{aligned} l(a_j, \theta_2) &= 60 - 50 - 24 - 10 \\ &= -24, \quad j = 3, 4 \end{aligned}$$

Cuando el fabricante vende la máquina al final del segundo año, sus ingresos son 120 y 15, provenientes de la producción y de la venta, mientras que sus egresos son 50, 48 y 10, provenientes de la compra, la operación y el mantenimiento, respectivamente. De esta manera,

$$\begin{aligned} l(a_3, \theta_i) &= 120 + 15 - 50 - 48 - 10 \\ &= 27, \quad i = 3, 4 \end{aligned}$$

Mediante raciocinios similares encontramos las ganancias restantes, cuando el fabricante conserva la máquina durante todo su periodo útil. Así,

$$\begin{aligned} l(a_4, \theta_3) &= -50 + 2(60) - 2(24) - 10 - 25 \\ &= -13 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} l(a_4, \theta_4) &= -50 + 3(60) - 3(24) - 10 - 25 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Cuando la máquina se vuelve obsoleta en el tercer año y cuando no se descompone durante su periodo de utilidad respectivamente. La tabla de ganancias del fabricante es entonces la 1.3. □

TABLA 1.3. Ganancias para el fabricante.

	Acciones			
Eventos	a_1	a_2	a_3	a_4
θ_1	0	-50	-50	-50
θ_2	0	16	-24	-24
θ_3	0	16	27	-13
θ_4	0	16	27	23

1.5 Función de pagos continua

Cuando el evento o estado de la naturaleza, θ, es una variable aleatoria con una distribución absolutamente continua, la función de pagos $l(a, \theta)$ es continua, para cada acción a que se escoja. Puesto que es necesario conocer el pago asociado a cada acción y a cada valor posible del evento, es improcedente en este caso el uso de una tabla de pagos.

Implícitamente se señalan los pagos para cada evento-acción, describiendo una función para cada acción. Las funciones así descritas permiten calcular el pago para cualquier valor particular de θ que se desee especificar.

Ejemplo 1.5. Un fabricante elabora cierta varilla de longitud constante y de diámetro θ, $0 < \theta < 1$. El costo de producción de cada varilla es de 100 y su precio de venta es 5. Describa la función de pagos (ganancias).

Solución. Suponemos que el fabricante adopta solamente las acciones a_1: elaborar la varilla y a_2: no elaborar la varilla, en cuyo caso no obtendría beneficio alguno. La función de pagos (ganancias) puede expresarse entonces en la forma

$$l(a_j, \theta) = \begin{cases} 5 - 10\theta & \text{cuando } j = 1 \\ 0 & \text{cuando } j = 2 \end{cases}$$

Cuando en un problema de decisión el estado θ es una variable discreta que toma un número infinito de valores, también es improcedente el uso de la tabla de pagos, a menos que se requiera solo una parte de ella para analizar el problema.

Ejercicios

1.2 **Acciones y eventos**

1.3 **Tabla de decisiones**

1.1 Una compañía petrolera es propietaria de un terreno en el que se puede encontrar o no petróleo. La compañía se enfrenta al problema de decidir si realiza o no la perforación. Construya la tabla de decisiones de la compañía.

1.2 Al propietario de una casa se le ofreció un seguro contra tornado. Suponga que solo hay dos resultados: la casa se destruye completamente o sale indemne. Construya la tabla de decisiones del propietario de la casa.

1.3 Una persona está indecisa acerca de si emplear sus vacaciones esquiando en la nieve en el lugar A o nadando en la playa en el lugar B. Debe hacer la reservación en cualquiera de estos sitios con anticipación. Le agrada más esquiar que ir a la playa, pero desafortunadamente no tiene la certeza de que en el lugar A haya suficiente nieve para esquiar. Si va al lugar B cuando hay suficiente nieve para esquiar, su viaje se estropeará por el pesar de no esquiar. Construya la tabla de decisiones de esta persona.

1.4 Tabla de pagos

1.4 Una cámara valorada en 300 puede ser asegurada contra pérdida por un valor de 3. Construya la tabla de pagos del propietario de la cámara.

1.5 Un fabricante desea seleccionar uno de tres diseños para una lámpara nueva. La fabricación de la lámpara A tiene un costo fijo de 50.000 más un costo adicional de 10 por unidad. Los costos fijos y variables para la fabricación de los otros diseños son: 30.000 y 20 para la lámpara B y 120.000 y 5 para la lámpara C. Cualquier tipo de lámpara se venderá por 30. Hay tres niveles de ventas al detal, que son independientes del diseño escogido, a saber, 4.000, 7.000 y 10.000 unidades. Para la decisión del fabricante, la ganancia será usada como pago. Construya la tabla de pagos.

1.6 Una persona considera vender helados o perros calientes en un día específico que podría ser soleado o nublado. Construya una tabla de pagos para esta persona.

1.7 Un fabricante revisó sus registros de ventas de un producto y halló que la demanda de este es de 9, 10 u 11 unidades. La ganancia y el costo unitarios del producto son 4 y 5 respectivamente. Cualquier unidad que no se venda durante el mes en que se elabora, pierde su valor. Construya la tabla de pagos (ganancias) para el fabricante.

1.8 Suponga que hoy el propietario de un almacén se enfrenta con el problema de determinar cuántas libras de un producto particular son necesarias para satisfacer la demanda mañana. Asuma que cualquier porción del producto no vendida mañana, se daña y tiene que botarse. Asuma también que el costo de producción y el precio de una libra del producto son 50 y 150 respectivamente y que, con base en el registro pasado de las ventas, el propietario establece que la demanda del producto no supera las tres unidades. Construya la tabla de pagos (ganancias) para el propietario del almacén.

1.9 La compañía A, que elabora partes para máquinas, con frecuencia alquila de la compañía B una máquina durante la temporada alta. Hay dos máquinas disponibles, a saber, tipo 1 y tipo 2. El alquiler de la máquina tipo 1 cuesta 2.000 y el costo de corregir las partes defectuosas producidas será pagado por la compañía B. Por otra parte, el alquiler de la máquina tipo 2 cuesta 1.800, pero el costo de corregir las partes defectuosas (5 por unidad) debe ser cubierto por el usuario de la máquina. Con base en la experiencia se sabe que el porcentaje de partes defectuosas producidas por la máquina tipo 2 es el 1 %, el 5 % o el 10 %. Asumiendo que la compañía A produce 1.000 partes, construya la tabla de pagos (costos) para la compañía A.

1.5 Función de pagos continua

1.10 Un fabricante revisó sus registros de ventas de un producto y halló que la demanda es ilimitada. La ganancia y el costo unitarios del producto son 2 y 5 respectivamente. Cualquier unidad que no se venda durante el mes en que se elabora, pierde su valor. Establezca la función de pagos (ganancias) para el fabricante.

1.11 Establezca la función de ganancias para la compañía petrolera (ejemplo 1.3), cuando el número θ de barriles que se pueden obtener es cualquier número entre 0 y 500.000.

CAPÍTULO 2

Criterios de decisión

2.1 Introducción

Luego de construir la tabla de pagos, el paso siguiente consiste en examinar los criterios que el decisor tiene a su disposición para seleccionar la acción óptima.

En este capítulo se discutirán los criterios más simples para tomar decisiones. Inicialmente analizaremos dos criterios en que los problemas pueden resolverse sin recurrir a las probabilidades de los eventos. En los criterios que siguen se hará uso de estas probabilidades, con el fin de hallar el pago esperado para cada acción en el criterio de Bayes y tener en cuenta el evento con mayor probabilidad bajo el criterio de máxima verosimilitud.

En el estudio de todos los criterios asumiremos que el decisor dispone de n acciones: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y que se pueden presentar m eventos: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Por otra parte, los ejemplos que se desarrollan sirven para mostrar, una vez más, la forma en que se construye la matriz de pagos.

2.2 Acciones dominadas

En los problemas de decisión con muchas acciones, es conveniente reducir los problemas tanto como sea posible. Para lograr esta reducción se comparan las diversas acciones entre sí y se descartan las que sean dominadas por otra u otras. Decimos que la acción a' es dominada por una acción a, si los pagos para esta son mejores que los pagos para aquella, sin importar el evento que se presente. En otras palabras, la acción a domina a la acción a' si

$$l(a, \theta_i) \geq l(a', \theta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.1}$$

cuando los pagos indican ganancias y

$$l(a, \theta_i) \leq l(a', \theta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.2}$$

cuando los pagos indican costos.

Ejemplo 2.1. Una empresa de construcción está interesada en comprar lotes de 2, 4 o 6 láminas, las cuales debe adquirir antes de conocer el número requerido de ellas. El costo de cada lámina depende de su espesor; si es menor de 5 milímetros, su costo será de 80, mientras que si es de 5 o más milímetros, su costo será de 120. Todas las láminas producidas son de espesor inferior a 5 milímetros o todas son de espesor superior o igual a 5 milímetros. El número de láminas producidas de espesor inferior a 5 milímetros es aproximado por una distribución geométrica con parámetro 0,25 y el número de láminas producidas de espesor mayor o igual a 5 milímetros es aproximado por una distribución geométrica con parámetro 0,40. Cuando la empresa necesita más láminas que las adquiridas, debe comprar las unidades faltantes con un sobrecargo de 30 por lámina. Por el contrario, cuando la empresa emplea menos láminas que las adquiridas, cada unidad sobrante se vende con un descuento de 40 sobre el precio que ha pagado por ella. ¿Cuántas láminas debe comprar la empresa para minimizar el costo de adquisición?

Solución. Con el fin de construir la tabla de pagos (costos) de la empresa constructora, definimos una variable aleatoria Y para representar el costo total de las láminas adquiridas. La variable Y es una función de la demanda D de las láminas, donde D es una variable que sigue la distribución geométrica con parámetro 0,25 o 0,40 según sea su espesor.

De esta manera, la variable Y puede expresarse en la forma general:

$$Y = \begin{cases} (80+40e)a + (110+40e)(D-a) & \text{cuando } D > a \\ (80+40e)a - (40+40e)(a-D) & \text{cuando } D \leq a \end{cases}$$

donde a indica el número de láminas que se adquieren y

$$e = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < 5\ mm \\ 1 & \text{si } \theta \geq 5\ mm \end{cases}$$

donde θ indica el espesor de las láminas.

Entonces, el costo total esperado de las láminas adquiridas viene a ser:

$$l(a,\theta) = EY = (110+40e)\sum_{k=a+1}^{\infty} kP\{D=k\}$$
$$+ (40+40e)\sum_{k=0}^{\infty} kP\{D=k\} - 30aP\{D>a\} + 40aP\{D \leq a\}$$

Luego de algunas operaciones encontramos que

$$l(a,\theta) = (110+40e)ED - 30a + 70aP\{D \leq a\} - 70\sum_{k=0}^{a} kP\{D=k\}$$

Finalmente, dándole a a los valores correspondientes, obtenemos las entradas señaladas en la tabla 2.1

Tabla 2.1. Costos para la empresa de construcción.

	Láminas ordenadas		
Espesor de las láminas	2	4	6
$< 5\ mm$	318,13	346,45	1.489,19
$\geq 5\ mm$	342,80	413,12	1.115,39

En la tabla 2.1 vemos que la acción “comprar lotes de 2 láminas” domina a las otras acciones puesto que los costos esperados por la compra de lotes de 2 láminas son inferiores a los costos esperados por la compra de lotes de 4 y 6 láminas. Por esta razón concluimos que, cualquiera que sea el espesor de las láminas, la compra de lotes de 2 láminas es la mejor acción que tiene a su disposición la empresa de construcción. □

2.3 Criterios mínimax y maximín

Si se conociera con certeza el evento que se puede presentar, sería sencillo hacer la elección de la acción correcta, es decir, la acción que tenga el costo mínimo (o la ganancia máxima). Desafortunadamente, en general, no se conoce con exactitud el evento que pueda ocurrir y no es sencillo elegir la acción adecuada.

Un procedimiento para obtener soluciones a los problemas de la teoría de la decisión es a través del "criterio o principio mínimax". Este principio propone al decisor que encuentre el costo máximo (la pérdida máxima) para cada una de sus acciones y que elija aquella que tenga el menor costo máximo (la menor pérdida máxima). Vemos así que, de acuerdo con el criterio mínimax, el decisor debe escoger la acción a_k para la cual

$$l(a_k, \theta_r) = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} l(a_j, \theta_i) \right\} \tag{2.3}$$

Siendo (a_k, θ_r) la entrada en la tabla de pagos donde se halla el costo mínimax.

El criterio mínimax se puede aplicar a situaciones que involucran ganancias, trocando nuestra regla, esto es, seleccionando la acción que tenga el máximo de las ganancias mínimas. Este criterio, conocido como el "criterio o principio maximín", es idéntico al anterior en el sentido de que la ganancia puede verse como una pérdida negativa. De acuerdo con el criterio maximín, el decisor debe escoger la acción a_k obtenida estableciendo la ganancia maximín.

$$l(a_k, \theta_r) = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} l(a_j, \theta_i) \right\} \tag{2.4}$$

(a_k, θ_r) es la entrada en la tabla de pagos donde se halla la ganancia maximín.

Ejemplo 2.2. Una empresa de transporte aéreo está interesada en adquirir un nuevo tipo de avión y desea eliminar el número de motores de repuesto que acompañarán a la orden. La empresa debe ordenar estos repuestos en lotes de tres unidades y solo se pueden escoger 3, 6 o 9 unidades. El fabricante tiene dos plantas de producción y la empresa debe tomar su decisión antes de conocer qué planta será usada. De la experiencia pasada se sabe que el número de motores de repuesto requeridos, cuando la producción se hace en la planta A, es aproximado por una distribución de Poisson con media 4, mientras que el número de motores de repuesto requeridos cuando la producción se hace en la planta B, es aproximado por una distribución de Poisson con media 8. El costo de un motor de repuesto comprado ahora es 250 y si su compra se hace en fecha posterior su costo será de 400. Los repuestos deben suplirse tan pronto se demanden y los no usados se desecharan cuando el avión se vuelva obsoleto. Determine la acción mínimax de la empresa de transporte aéreo.

Solución. Las acciones que podrá adoptar la empresa transportadora son a_1, a_2 y a_3, que corresponden a ordenar 3, 6 y 9 motores de repuesto, respectivamente. Por otra parte, los eventos vienen a ser las dos plantas disponibles.

El número de motores de repuesto requeridos es una variable aleatoria y por lo tanto los pagos se miden como costos esperados. Con el fin de construir la tabla de pagos (costos) de la empresa de transporte, definimos una variable aleatoria Y para representar el costo total de los motores de repuesto requeridos. La variable Y es una función de la demanda D de motores de repuesto, donde D es una variable que tiene distribución de Poisson con media 4 u 8. De esta manera, la variable Y puede expresarse en la forma general

$$Y = \begin{cases} 250a + 400(D - a) & \text{cuando } D > a \\ 250a & \text{cuando } D \leq a \end{cases}$$

donde a indica el número de motores de repuesto que se ordenan. Entonces el costo total esperado de los motores de repuesto adquiridos viene a ser

$$l(a, \theta) = EY = 400 \sum_{k=a+1}^{\infty} kP\{D = k\} - 150aP\{D > a\} + 250aP\{D \leq a\}$$

Luego de algunas operaciones encontramos que este costo puede expresarse de la manera siguiente:

$$l(a, \theta) = 400\lambda - 150a + 400\,[aP\{D \leq a\} - \lambda P\{D \leq a - 1\}]$$

TABLA 2.2. Costos para la empresa de transporte.

	Motores de repuesto solicitados		
Planta utilizada	3	6	9
A	1.289,20	1.578,17	2.254,91
B	2.756,84	2.440,14	2.533,70

donde $\lambda = ED$. Finalmente, dándoles a a y a λ los valores correspondientes, obtenemos las entradas señaladas en la tabla 2.2.

Cuando la empresa solicita 3, 6 y 9 motores de repuesto, el costo más alto es 2.756,84, 2.440,14 y 2.533,70 respectivamente. Por esta razón la acción mínimax de la empresa de transporte es solicitar 6 motores de repuesto. □

Ejemplo 2.3. Con una ilustración muestre que el criterio maximín es un criterio de decisión muy conservador.

Solución. Consideremos el problema de decisión dado en la tabla 2.3.

TABLA 2.3. Tabla hipotética de ganancias.

	Acciones	
Eventos	a_1	a_2
θ_1	0	-4
θ_2	4	40.000

Aunque a_1 es la acción maximín, observamos que la acción a_2 representa una mejor escogencia si el evento θ_2 tiene una buena posibilidad de ocurrir. Vemos entonces que este problema ilustra una deficiencia del criterio maximín: la de ser un criterio de decisión muy conservador.

En general, las acciones que se adoptan aplicando el principio maximín o el principio mínimax suponen que la naturaleza es un oponente consciente que desea infligir al decisor tanto "daño" como le sea posible. En realidad, la naturaleza no es un oponente malévolo y es improbable que el decisor tenga que cuidarse de ella. □

2.4 Criterio de Bayes

En algunas situaciones el decisor tendrá cierta información sobre los eventos que pueden ocurrir. Evidentemente, el decisor debe tener en cuenta esta información, que por lo general se puede resumir en una distribución de probabilidad, llamada “distribución a priori”. Con frecuencia las distribuciones a priori son subjetivas, en el sentido de que pueden depender de la experiencia o de la intuición de una persona.

El criterio de Bayes es un procedimiento que utiliza la distribución a priori con el fin de ayudar en la selección de una acción. Para cada acción evaluamos el pago esperado con respecto a esta distribución; este pago será representado por

$$l(a_j) = E_\theta \left[l(a_j, \theta) \right] \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.5}$$

Para la acción a_j, E_θ indica que en la obtención del valor esperado se considera θ como la única variable aleatoria. El principio de Bayes indica al decisor que seleccione aquella acción, llamémosla a_k, que dé lugar al pago esperado óptimo. Este pago, indicado por $l^*(a_k)$, viene dado entonces por

$$l^*(a_k) = \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Óptimo}} \left\{ l(a_j) \right\} \tag{2.6}$$

Es de notar que la acción más conveniente, a_k, no necesariamente es única, puesto que el decisor puede tener a su disposición varias acciones que den lugar al pago esperado óptimo.

Ejemplo 2.4. Una empresa considera la contratación de tres personas. El campo principal de cada uno de los empleados probables y sus salarios anuales son:

Persona	Especialidad	Salario
1	Publicidad	12
2	Ventas	15
3	Ventas	18

El beneficio anual bruto (ingreso menos todos los costos excepto sueldos) que aportaría cada uno de ellos a la empresa depende del estado de la economía y aparece en la tabla siguiente:

Estado de la economía	Persona 1	Persona 2	Persona 3
Bueno	18	18	32
Regular	12	16	24
Pobre	10	12	16

La especialidad de la persona 1 se complementa con la especialidad de las personas 2 y 3, razón por la cual, cuando aquella es contratada con una de estas, el beneficio anual bruto que aportaría cada una de ellas sería el 120 % del dado anteriormente.

Por otra parte, como las personas 2 y 3 se desempeñan en el mismo campo, si son contratadas el beneficio bruto para cada una sería solo el 70 % del señalado anteriormente. De acuerdo con la información que tiene a su disposición la empresa, se conoce que, en un año cualquiera, el estado de la economía es bueno, regular y pobre, con probabilidades 0,60, 0,30 y 0,10 respectivamente. Determine la persona o personas que debe contratar la empresa.

Solución. Las acciones que podría adoptar la empresa son a_j: contratar la persona $j(j = 1, 2, 3)$, a_{12}: contratar las personas 1 y 2, a_{13}: contratar las personas 1 y 3, a_{23}: contratar las personas 2 y 3, a_{123}: contratar las tres personas y a_0: no contratar a persona alguna, en cuyo caso el beneficio anual neto para la empresa sería nulo. La tabla de ganancias para la empresa es la 2.4.

Tabla 2.4. Beneficios netos para la empresa.

Estado de la economía	Probabilidad	Personas contratadas							
		a_0	a_1	a_2	a_3	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{123}
Bueno	0,60	0	6	3	14	16,2	30,0	2,0	18,6
Regular	0,30	0	0	1	6	6,6	13,2	$-5{,}0$	3,0
Pobre	0,10	0	-2	-3	-2	$-0{,}6$	1,2	$-13{,}4$	$-9{,}48$
Beneficio esperado		0	3,4	1,8	10,0	11,64	22,08	$-1{,}64$	11,11

En la tabla 2.4 vemos que, de acuerdo con el criterio de Bayes, la empresa debe contratar las personas 1 y 3, obteniendo así un beneficio neto esperado de 22,08.

La tabla 2.4 puede reducirse debido a que se pueden eliminar las acciones a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{23}, y a_{123}, puesto que son dominadas por la acción a_{13}. □

Ejemplo 2.5. Supongamos que el diámetro θ de las varillas mencionadas en el ejemplo 1.5 sigue la distribución beta con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 4$. Según el criterio de Bayes, ¿debe el fabricante elaborar la varilla?

Solución. Cuando el fabricante elabora la varilla, su ganancia esperada es

$$l(a_1) = 5 - 10E\theta = 1$$

Como $l(a_2) = 0$, concluimos que, de acuerdo con el criterio de Bayes, el fabricante debe elaborar la varilla.

2.5 Criterio de máxima verosimilitud

Otra regla de decisión que ha servido como un modelo para el comportamiento del decisor es el "criterio de máxima verosimilitud". Aquí el interés se centra en el evento que tiene la mayor probabilidad, con la exclusión de los otros eventos. De esta manera, de las entradas que corresponden al evento con esta probabilidad, se escoge la acción más conveniente, obteniéndose así la acción de máxima verosimilitud. Formalmente, si $\theta_r (1 \leq r \leq m)$ es el evento más probable, se debe escoger la acción a_k para la cual

$$l(a_k, \theta_r) = \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Óptimo}} \{l(a_j, \theta_r)\} \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.6. Una compañía tiene una máquina que llena frascos con aceite. En un trabajo de producción, sea θ la proporción de frascos que la máquina llena mal. Un trabajo de producción consiste en envasar 5.000 frascos y el costo de llenar mal un frasco es de 4. La compañía tiene la opción de contratar un experto que ajuste la máquina, a un costo de 300 más 2 por cada frasco mal envasado. De experiencias anteriores, la compañía ha encontrado que el valor de θ es 0,01, 0,03, 0,05 o 0,07, con probabilidades 0,1, 0,2, 0,4 y 0,3 respectivamente. Encuentre la acción de máxima verosimilitud para la compañía.

Solución. Las acciones que podría adoptar la compañía son a_1: contratar un experto para ajustar la máquina y a_2: no contratar experto alguno. La función de pagos (costos) puede expresarse en la forma siguiente:

$$l(a_j, \theta) = \begin{cases} 300 + 10.000\theta & \text{cuando } j = 1 \\ 20.000\theta & \text{cuando } j = 2 \end{cases}$$

Ahora, considerando la proporción de frascos que la máquina llena mal, construimos la tabla de costos.

TABLA 2.5. Costos para la compañía.

		Acciones	
Proporción θ	Probabilidad	a_1	a_2
0,01	0,1	400	200
0,03	0,2	600	600
0,05	0,4	800	1.000
0,07	0,3	1.000	1.400

Como es más probable que la máquina envase mal el 5 % de los frascos, vemos que la acción de máxima verosimilitud para la compañía es a_1: contratar un experto para ajustar la máquina y el costo más probable es 800.

Ejemplo 2.7. Consideremos nuevamente al fabricante de varillas mencionado en los ejemplos 1.5 y 2.5. Según el criterio de máxima verosimilitud, determine la ganancia más probable del fabricante.

Solución. Teniendo en cuenta que la moda de una variable aleatoria continua es el punto donde su función de densidad toma un valor máximo, vemos que el diámetro más probable de la varilla es 1/3. Para este valor de θ la función de ganancias sería entonces

$$l(a_j; 1/3) = \begin{cases} 5/3 & \text{cuando } j = 1 \\ 0 & \text{cuando } j = 2 \end{cases}$$

Por tanto, de acuerdo con el criterio de máxima verosimilitud, el fabricante debe elaborar la varilla y su ganancia más probable sería 5/3.

Ejercicios

2.2 Acciones dominadas

2.1 Resuelva el problema planteado en el ejemplo 2.1 cuando el número de láminas producidas de espesor inferior a 5 milímetros es aproximado por una distribución de Poisson con media

2 y el número de láminas producidas de espesor mayor o igual a 5 milímetros es aproximado por una distribución de Poisson con media 3.

2.2 Resuelva el problema tratado en el ejemplo 2.2 cuando el número de motores de repuesto requeridos por la empresa de transporte, en el caso en que la producción se haga en la planta B, es aproximado por una distribución de Poisson con media 5.

2.3 Criterios mínimax y maximín

2.3 Muestre que si en un problema de decisión una acción domina a las restantes, ella será la elegida cuando se sigue el criterio mínimax o el criterio maximín.

2.4 Aplique el criterio maximín para establecer la acción que debe adoptar el propietario del almacén mencionado en el ejercicio 1.8.

2.5 De acuerdo con sus registros anteriores de ventas, un vendedor de revistas sabe que la demanda por una de sus revistas es solamente de 4, 5, 6 o 7 unidades. Cada copia cuesta 100 y se vende por 250. Asuma que el vendedor no puede devolver los ejemplares no vendidos. Establezca la acción que debe adoptar el vendedor de revistas.

2.6 En el ejemplo 2.2 considere solamente el cambio siguiente. Suponga que la demanda D de motores de repuesto tiene distribución geométrica con parámetro 0,40 y 0,25, cuando el avión se fabrica en las plantas A y B respectivamente. ¿Cuántos motores de repuesto debe ordenar la empresa transportadora?

2.4 Criterio de Bayes

2.7 Muestre que si en un problema de decisión una acción domina a las restantes, ella será la elegida cuando se sigue el criterio de Bayes.

2.8 ¿Cuántas copias debe ordenar el vendedor de revistas, mencionado en el ejercicio 2.5, para maximizar su ganancia esperada, cuando la demanda D de la revista considerada tiene una función de frecuencia:

$$P\{D = 4\} = 0{,}20,$$
$$P\{D = 5\} = 0{,}15,$$
$$P\{D = 6\} = 0{,}35$$

y

$$P\{D = 7\} = 0{,}30?$$

¿Cuál es la ganancia esperada máxima?

2.9 Al propietario de una casa valorada en 40.000, una compañía de seguros le ofreció protección contra tornado por una prima anual de 500. Suponga que solo hay dos resultados: la casa se destruye completamente o sale indemne y que la probabilidad de daño por el tornado es de 0,0001. ¿Qué acción debe adoptar el propietario?

2.10 ¿Cuántas libras del producto debe almacenar el propietario, mencionado en el ejercicio 1.8, para maximizar su ganancia esperada, cuando la demanda del producto tiene distribución binomial con parámetros 3 y 0,6? ¿Cuál es su ganancia esperada máxima?

2.11 Suponga que la demanda del producto mencionado en el ejercicio 1.10 sigue la distribución de Poisson con media 2. ¿Qué cantidad del producto debe elaborar el fabricante para maximizar su ganancia esperada? ¿Cuál es esta ganancia?

2.12 Suponga que el diámetro θ de las varillas mencionadas en el ejemplo 1.5 sigue la distribución uniforme sobre el intervalo (0,1). ¿Qué acción debe adoptar el fabricante?

2.5 Criterio de máxima verosimilitud

2.13 Muestre que si en un problema de decisión una acción domina a las restantes, ella será la acción de máxima verosimilitud.

2.14 Halle la acción de máxima verosimilitud para el fabricante mencionado en el ejercicio 2.11. ¿Cuál es su ganancia más probable?

2.15 Suponga que la frecuencia del porcentaje θ de partes defectuosas (ejercicio 1.9) producidas por la máquina de tipo 2 es

$$P\{\theta = 0{,}01\} = 0{,}6 \quad \text{y} \quad P\{\theta = 0{,}05\} = P\{\theta = 0{,}10\} = 0{,}2$$

¿Qué máquina debe tomar en alquiler la compañía A, bajo los criterios mínimax, de Bayes y de máxima verosimilitud?

2.16 Averigüe qué máquina le conviene alquilar a la compañía B (ejercicio 2.15), bajo los criterios maximín, de Bayes y de máxima verosimilitud, cuando la función de frecuencia del porcentaje de las partes defectuosas producidas por la máquina tipo 1 coincide con la respectiva función de frecuencia para la máquina tipo 2.

2.17 En el ejercicio 1.4 asuma que la probabilidad de que la cámara se pierda es 0,005. ¿Qué decisión debe adoptar la compañía de seguros (asegurar o no asegurar) de acuerdo con los criterios maximín, de Bayes y de máxima verosimilitud?

2.8 Un fabricante elabora cierta lámina con un espesor θ, que sigue la distribución normal con media $7/2$ y varianza $1/16$. El costo de producción de la lámina es 30 y el precio de venta es 15 cuando $\theta < 3{,}4$, 60 cuando $3{,}4 \leq \theta \leq 3{,}6$ y 25 cuando $\theta > 3{,}6$. De acuerdo con los criterios maximín, de Bayes y de máxima verosimilitud, ¿debe el fabricante elaborar la lámina?

CAPÍTULO 3

Pérdida de oportunidad e información perfecta

3.1 Introducción

Existe otro punto de vista para analizar los problemas de decisión que se discutieron anteriormente. Esto involucra la utilización de técnicas similares a aquellas para resolver un problema, pero empleando una tabla o matriz de pagos diferente, llamada matriz de pérdidas de oportunidad. Con la ayuda de esta matriz y del criterio de Bayes veremos la forma en que se establece la máxima cantidad que el decisor podría pagar por una información 100 % confiable que le permita seleccionar la mejor acción de las que tiene a su disposición. Como en el capítulo anterior, asumiremos que el decisor dispone de las acciones $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y que se pueden presentar los eventos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

3.2 Pérdida de oportunidad

Para cada evento o estado de la naturaleza, la “pérdida de oportunidad” se define como la diferencia en el pago entre la mejor acción y la acción escogida. De esta manera, el pago es cero cuando se adopta la acción óptima.

Cuando los pagos indican ganancias, la pérdida de oportunidad es la ganancia a la cual renuncia el decisor por no adoptar la acción óptima, y cuando los pagos representan costos, la pérdida de oportunidad es la cantidad que deja de ahorrar el decisor al no adoptar la acción óptima.

Las pérdidas de oportunidad se calculan determinando primero los mejores resultados para cada evento; esto es, el pago óptimo en cada fila de la matriz de pagos. Luego, los pagos en cada fila se restan de los óptimos por filas, si los pagos indican ganancias; mientras que, si los pagos indican costos, el pago óptimo se resta a cada pago de la fila. En otras palabras, si $l^*(a_k, \theta_r)$ representa el pago óptimo cuando ocurre el evento θ_r y a_k es la acción que da lugar a este pago óptimo, entonces la pérdida de oportunidad cuando el decisor adopta la acción a_j y se representa por el evento θ_r viene dada por

$$l_p(a_j, \theta_r) = l^*(a_k, \theta_r) - l(a_j, \theta_r) \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

cuando los pagos indican ganancias y por

$$l_p(a_j, \theta_r) = l(a_j, \theta_r) - l^*(a_k, \theta_r) \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

cuando los pagos indican costos.

Ejemplo 3.1. Un fabricante de juguetes dispone de tres mecanismos para elaborar una nueva muñeca. En la tabla 3.1 se indican las ganancias que obtiene el fabricante cuando escoge cualquiera de los mecanismos y los niveles de demanda que puede tener la nueva muñeca.

Construya la tabla de pérdidas de oportunidad para el fabricante.

Solución. Supongamos que el fabricante escoge el mecanismo a_1. Si luego se presenta una demanda escasa, su pérdida de oportunidad es cero porque no podría asegurar un pago mejor que 30 cuando escoge otro mecanismo. Por el contrario, si la demanda es moderada, su pérdida de oportunidad es $400 - 350 = 50$, esto es, pierde la oportunidad de

TABLA 3.1. Ganancias para el fabricante de juguetes.

Demanda	Mecanismos a_1	a_2	a_3
θ_1: Escasa	30	−20	−120
θ_2: Moderada	350	400	350
θ_3: Elevada	500	640	700

obtener 50 adicionales, mientras que si la demanda es elevada, pierde la oportunidad de conseguir 200 adicionales. Un análisis similar se hace para los mecanismos a_2 y a_3. Los resultados obtenidos se indican en la tabla 3.2. □

TABLA 3.2. Pérdidas de oportunidad para el fabricante de juguetes.

Demanda	Mecanismos a_1	a_2	a_3
θ_1: Escasa	0	50	150
θ_2: Moderada	50	0	50
θ_3: Elevada	200	60	0

Ejemplo 3.2. Construya la tabla de pérdidas de oportunidad para la empresa de transporte aéreo mencionada en el ejemplo 2.2.

Solución. Supongamos que la empresa ordena 3 motores de repuesto. Si el avión se fabrica en la planta A, la pérdida de oportunidad de la empresa es cero porque no podría reducir el costo de 1.289,20 cuando ordena 6 o 9 motores de repuesto. Por el contrario, si el avión se fabrica en la planta B, la empresa pierde la oportunidad de ahorrarse 316,70. Un análisis similar se hace cuando la empresa ordena 6 o 9 motores de repuesto. Los resultados se muestran en la tabla 3.3. □

TABLA 3.3. Pérdidas de oportunidad para la empresa de transporte aéreo.

Planta utilizada	Motores de repuesto solicitados 3	6	9
A	0	288,97	965,71
B	316,70	0	93,56

3.3 Pago esperado con información perfecta

Hasta el momento hemos seleccionado una acción con base en la información adquirida por el decisor a través de la experiencia. En esta sección consideramos el caso extremo en que se puede adquirir información perfecta acerca del estado de la naturaleza con el fin de seleccionar una acción en el futuro. Usando esta información se podría garantizar la escogencia de la acción que produzca el pago óptimo para cualquier evento que se presente. Como deseamos investigar la importancia de tal información antes de obtenerla, determinamos el "pago esperado por información perfecta" (PEIP). Para calcular este pago suponemos que la información es 100 % confiable y hallamos el pago óptimo $l^*(a,\theta)$ para cada valor de θ. En esta forma, el PEIP se define como sigue:

$$(PEIP) = E_0\left[l^*(a,\theta)\right] \tag{3.3}$$

Observamos así que el PEIP es el pago promedio que puede anticiparse con el mejor conocimiento posible.

Ejemplo 3.3. Calcule el PEIP:

a) Para el fabricante mencionado en el ejemplo 3.1, cuando la demanda de la nueva muñeca tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P\{\theta=\theta_1\}=0{,}10,\ \ P\{\theta=\theta_2\}=0{,}60 \quad \text{y} \quad P\{\theta=\theta_3\}=0{,}30$$

b) Para la compañía mencionada en el ejemplo 2.6.

Solución.

a) La ganancia que el fabricante de juguetes espera conseguir, cuando dispone de una información 100 % confiable sobre la demanda, viene dada por

$$(PEIP) = 30(0{,}10) + 400(0{,}60) + 700(0{,}30) = 453$$

b) El costo esperado para la compañía mencionada en el ejemplo 2.6, cuando ella dispone una información 100 % confiable, sobre la proporción de frascos que la máquina llena mal, es dada por

$$(PEIP) = 200(0{,}1) + 600(0{,}2) + 800(0{,}4) + 1.000(0{,}3) = 760 \quad \square$$

3.4 Regla de decisión de Bayes y pérdida de oportunidad

Puesto que una pérdida de oportunidad es un resultado numérico, podemos calcular el valor esperado de las pérdidas de oportunidad para cada acción. La pérdida esperada de oportunidad cuando el decisor adopta la acción a_j, indicada por $l_p(a_j)$, se evalúa con respecto a la distribución a priori definida sobre los estados posibles de la naturaleza; en otras palabras,

$$l_p(a_j) = E_\theta \left[|l^*(a_k, \theta) - l(a_j, \theta)| \right] \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{3.4}$$

donde $l^*(a_k, \theta)$ señala el pago óptimo cuando se presenta el estado θ de la naturaleza y a_k es la acción que da lugar a este pago óptimo.

La meta del decisor consiste entonces en seleccionar la acción con la mínima pérdida esperada de oportunidad; esto es, debe seleccionar la acción a_k para la cual

$$l_p^*(a_h) = \min_{1 \leq j \leq n} l_p(a_j) \tag{3.5}$$

Como puede observarse, para calcular la pérdida $l_p^*(a_h)$ se sigue un procedimiento similar al visto en la sección 2.3 para calcular el pago $l^*(a_k)$, pero ahora usando la tabla de pérdidas de oportunidad.

Ejemplo 3.4. Determine la acción de la mínima pérdida esperada de oportunidad:

a) Para el fabricante mencionado en los ejemplos 3.1 y 3.3a.

b) Para la compañía mencionada en los ejemplos 2.6 y 3.3b.

Solución.

a) Observando la tabla 3.2 y teniendo en cuenta la distribución de probabilidad de la demanda de la nueva muñeca, vemos que la pérdida esperada de oportunidad para cada mecanismo que tiene a su disposición el fabricante de juguetes es

$$l_p(a_1) = 90, \;\; l_p(a_2) = 23 \;\; \text{y} \;\; l_p(a_3) = 45$$

Entonces el fabricante debe escoger el mecanismo a_2 porque representa la acción con la mínima pérdida esperada de oportunidad. Este mecanismo también es la mejor escogencia de acuerdo con la regla de decisión de Bayes.

b) Observando la tabla 2.5 vemos que las pérdidas esperadas de oportunidad de la compañía mencionada en el ejemplo 2.6 son:

$$l_p(a_1) = 20, \; l_p(a_2) = 200$$

Entonces la contratación de un experto para ajustar la máquina da lugar a la mínima pérdida esperada de oportunidad para la compañía. Esta solicitud también corresponde a la mejor decisión que ella puede adoptar, de acuerdo con el criterio de Bayes. □

Los resultados obtenidos en las partes a) y b) del ejemplo 3.4 nos conducen a pensar que, bajo la regla de decisión de Bayes, la acción que tiene el pago esperado óptimo es la misma acción que tiene la mínima pérdida esperada de oportunidad. (ejercicio 3.11).

3.5 Valor esperado de la información perfecta

Cuando se analiza un problema de decisión empleando las pérdidas de oportunidad, la pérdida esperada mínima no solo señala la mejor acción para el decisor sino que su valor también es la cantidad que él sacrifica por no tener información perfecta sobre cuál evento ocurrirá. Esta pérdida mínima se conoce como el "costo de la incertidumbre" o el "valor esperado de la información perfecta" (VEIP). Así, de las fórmulas (3.4) y (3.5) vemos que

$$(VEIP) = \min_{1 \leq j \leq n} E_\theta \left[|l^*(a_k, \theta) - j(a_j, \theta)| \right] \tag{3.6}$$

Aunque en la práctica no existe información 100 % confiable, prestamos atención al VEIP porque nos ayuda a establecer un límite sobre la importancia de la información; en otras palabras, el valor esperado de la información perfecta representa la mayor cantidad de dinero que el decisor estaría dispuesto a pagar con el fin de obtener una información 100 % confiable.

El valor esperado de la información perfecta también puede establecerse haciendo uso del criterio de Bayes. Como vimos en el capítulo anterior, la regla de decisión de Bayes conduce a la escogencia de una acción particular que optimiza el pago esperado sin tener en cuenta cualquier información adicional. En lo sucesivo nos referiremos a este pago como el "pago esperado bajo incertidumbre" (PEBI). De acuerdo con las fórmulas (2.5) y (2.6) tenemos entonces que

$$(PEBI) = \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Óptimo}} E_\theta \left[l \left(a_j, \theta \right) \right] \tag{3.7}$$

Cuando los pagos indican ganancias, la fórmula (3.6) puede escribirse como sigue

$$(VEIP) = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ E_\theta \left[l^* \left(a_k, \theta \right) \right] - E_\theta \left[l \left(a_j, \theta \right) \right] \right\}$$

En este caso, haciendo uso de las fórmulas (3.3) y (3.7) podemos escribir

$$\begin{aligned} (VEIP) &= \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ (PEIP) - E_\theta \left[l \left(a_j, \theta \right) \right] \right\} \\ &= -(PEIP) - \max_{1 \leq j \leq n} E_\theta \left[l \left(a_j, \theta \right) \right] \\ &= (PEIP) - (PEBI) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mediante un raciocinio similar deducimos que, cuando los pagos indican costos,

$$(VEIP) = (PEBI) - (PEIP) \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.5. Calcule el valor esperado de la información perfecta:

a) Para el fabricante mencionado en los ejemplos 3.1, 3.3a y 3.4a.

b) Para la compañía mencionada en los ejemplos 2.6, 3.3b y 3.4b.

Solución.

a) Puesto que

$$(PEIP) = 453 \quad \text{y} \quad (PEBI) = 430$$

concluimos que el valor esperado de la información perfecta es 23. En este caso el valor esperado de la información perfecta representa la mayor cantidad de dinero que el fabricante estaría dispuesto a pagar para conseguir una información 100 % confiable acerca de cuál será la demanda de muñecas. De esta manera, si un estudio de mercadeo que busca predecir la demanda cuesta más de 23, entonces, indiferente de su confiabilidad, el fabricante no debe ordenarlo.

Puesto que

$$(PEIP) = 760 \quad \text{y} \quad (PEBI) = 780$$

tenemos que el valor esperado de la información perfecta es 20; esto es, 20 es la máxima cantidad que la compañía estaría dispuesta a pagar por una información 100 % confiable, con el fin de conocer la proporción de frascos que la máquina llena mal. □

Ejemplo 3.6. Suponga que el fabricante mencionado en los ejemplos 1.5 y 2.5 vende la varilla a precio de costo cuando el diámetro de esta es inferior a 1/4. Además asuma que está interesado en incrementar sus ganancias, razón por la cual desea establecer la máxima cantidad que podría pagar por una información que le permita cumplir con su propósito. Calcule el valor de esta cantidad.

Solución. La función de ganancias puede expresarse ahora en la forma:

$$l(a_j, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si j=1 y } 0 < \theta < 1/4 \\ 5 - 10\theta & \text{si j=1 y } 1/4 \leq \theta < 1 \\ 0 & \text{si j=2 y } 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

Puesto que el fabricante obtiene ganancias solamente cuando elabora una varilla con diámetro en el intervalo, $1/4 \leq \theta < 1/2$,

$$(PEIP) = 60 \int_{1/4}^{1/2} (5 - 10\theta)\theta(1 - \theta)^2 \, d\theta = 2{,}71$$

Por otra parte, cuando el fabricante elabora la varilla, su ganancia esperada es

$$(PEBI) = 60 \int_{1/4}^{1} (5 - 10\theta)\theta(1 - \theta)^2 \, d\theta = 0{,}53$$

Por lo tanto,

$$(VEIP) = (PEIP)(PEBI) = 2{,}18$$

es la máxima cantidad que pagaría el fabricante por una información 100 % confiable que le permita incrementar sus ganancias. □

Ejercicios

3.2 Pérdida de oportunidad

3.1 Construya la tabla de pérdidas de oportunidad para el propietario de la cámara mencionado en el Ejercicio 1.4.

3.2 Construya la tabla de pérdidas de oportunidad para el propietario del almacén mencionado en el ejercicio 1.8.

3.3 De acuerdo con sus registros anteriores de ventas, un vendedor de revistas sabe que la demanda por una de sus revistas es solamente de 5, 6, 7 u 8 ejemplares. Cada revista cuesta 120 y se vende por 300. Asuma que él devuelve las copias no vendidas por el mismo valor en que las adquirió. Construya la tabla de pérdidas de oportunidad para el vendedor.

3.4 En el ejercicio 1.9 suponga que hay una tercera máquina disponible, llamada tipo 3. El alquiler de esta máquina cuesta 1.600 y el costo de corregir las partes defectuosas (10 por unidad) debe ser cubierto por el usuario de la máquina. Suponga además que la función de frecuencia del porcentaje de partes defectuosas producida por la máquina de tipo 3 coincide con la respectiva función de frecuencia de la máquina tipo 2. Construya la tabla de pérdidas de oportunidad para la compañía A.

3.3 Pago esperado con información perfecta

3.5 En el ejercicio 1.4 asuma que la probabilidad de pérdida de la cámara es 0,001. Encuentre la pérdida esperada del propietario de la cámara, con una información 100 % confiable.

3.6 Encuentre la ganancia esperada del propietario del almacén, mencionado en los ejercicios 1.8 y 2.10, cuando tiene una información 100 % confiable sobre la demanda del producto.

3.7 Encuentre la ganancia esperada del fabricante, mencionado en los ejercicios 1.10 y 2.11, cuando tiene una información 100 % confiable sobre la demanda de su producto.

3.8 Una compañía electrónica que tiene un problema de producción se halla ante la alternativa de adquirir una componente de una máquina usada para una operación de ensamblaje. La componente sirve para elaborar 200 unidades, después de lo cual debe ser remplazada. Los registros de la producción anterior muestran que el porcentaje de unidades defectuosas tiene la función de frecuencia:

$$P\{\theta = 0{,}02\} = 0{,}7,\ P\{\theta = 0{,}03\} = 0{,}2,\ \text{y}\ P\{\theta = 0{,}05\} = 0{,}1,$$

Las unidades defectuosas deben ser reparadas a un costo unitario de 10. Un proveedor le ofrece a la compañía una componente por un valor de 300, mientras que un segundo proveedor le ofrece la misma componente por un valor de 350, pero asume el costo de reparación del porcentaje de unidades defectuosas que supere el 2 %. Encuentre el costo esperado para la compañía cuando ella tiene una información 100 % confiable sobre el porcentaje de unidades defectuosas.

3.9 En el ejemplo 2.6 suponga que el número de frascos que la máquina llena mal sigue una distribución binomial con parámetros 5.000 y 0,001. Halle el costo esperado para la compañía cuando ella posee una información 100 % confiable sobre el número de frascos mal envasados.

3.10 Un fabricante elabora cierta lámina con un espesor θ que sigue la distribución exponencial con media $1/2$. El costo de producción de la lámina es 16θ y el precio de venta es 10 cuando $\theta < 1/2$ y 40 cuando $\theta < 1/2$. Halle la ganancia que espera recibir el fabricante cuando posee una información 100 % confiable sobre el espesor de la lámina.

3.4 Regla de decisión de Bayes y pérdida de oportunidad

3.11 Muestre que bajo el criterio de Bayes la acción que da lugar al pago óptimo es la misma acción que da lugar a la mínima pérdida esperada de oportunidad.

3.12 En el ejercicio 3.3 asuma que el vendedor de revistas devuelve las copias no vendidas por la mitad del valor en que las adquirió. Establezca la acción que produce la menor pérdida esperada de oportunidad si la demanda D de la revista tiene la siguiente función de frecuencia:

$$P\{D = k\} = \{k - 4\}/10 \quad \text{para} \quad k = 5, 6, 7, 8.$$

3.13 Determine qué tipo de máquina debe seleccionar la compañía A (ejercicio 3.4) con el fin de minimizar la menor pérdida esperada de oportunidad.

3.14 Halle la pérdida esperada de oportunidad de la compañía mencionada en el ejercicio 3.9 cuando contrata al experto para ajustar la máquina.

3.5 Valor esperado de la información perfecta

3.15 Halle la máxima cantidad que la compañía electrónica (ejercicio 3.8) estaría dispuesta a pagar por una información 100 % confiable sobre el porcentaje de unidades defectuosas.

3.6 Una compañía que busca petróleo debe decidir si perforar o no en un sitio específico. Su juicio la conduce a la conclusión de que hay una probabilidad 0,60 de encontrar petróleo. Si perfora y lo encuentra su ganancia sería de 200, pero si no encuentra, su pérdida neta sería de 100. Si un sismólogo ofrece conducir una prueba de exploración, ¿cuál sería el pago máximo que la compañía estaría dispuesta a cancelar por la información exploratoria?

3.17 Encuentre la máxima cantidad que la compañía A (ejercicio 1.9) estaría dispuesta a pagar por una información 100 % confiable sobre la calidad de la producción de la máquina de tipo 2.

3.18 Encuentre la máxima cantidad que la compañía de seguros (ejercicio 2.9) estaría dispuesta a pagar por una información 100 % confiable sobre la presencia de tornados en el área donde se halla la casa.

3.19 Resuelva el problema planteado en el ejemplo 3.6 cuando el diámetro θ de la varilla sigue una distribución uniforme sobre el intervalo (0,1).

3.20 A un agente de seguros se le ofrece un trabajo con un salario equivalente a las comisiones del último año (que fueron un porcentaje de las primas). La compañía del agente va a incrementar las primas en un 20 % el año siguiente. Si el mercado no es amplio, el incremento hará que el 30 % de los asegurados por los agentes cancele el seguro, lo cual dará lugar a una pérdida proporcional en la comisión de los agentes. Sin embargo, si el mercado es amplio, solo el 10 % de los asegurados cancelará el seguro. Asuma que el agente puede recibir únicamente comisiones por los seguros vigentes. También asuma que hay un 75 % de posibilidad de que el mercado sea amplio. ¿Puede el agente pagar el 2 % de las comisiones del último año para saber si el mercado será amplio?

3.21 Una compañía de seguros de automóviles cree que los conductores que beben causan tres veces más accidentes que quienes no beben. A usted se le da la información siguiente: los no bebedores causan un accidente cada 10 años, el 90 % de los conductores son no bebedores, todos los reclamos son por 1.000 y la provisión para los costos por reclamos en la prima es de 119. ¿Cuál es la máxima cantidad que la compañía estaría dispuesta a pagar por conocer si el conductor bebe o no?

CAPÍTULO 4

Análisis del árbol de decisión

4.1 Introducción

Algunos problemas son muy complejos para presentarlos en términos de una tabla de pagos, puesto que surgen dificultades cuando los mismos eventos no se adaptan a todas las acciones. Con frecuencia, las decisiones deben adoptarse en dos o más momentos, con eventos inciertos que se presentan entre una y otra decisión. Usualmente, la escogencia de una acción influye sobre el tipo y la probabilidad de cualquier evento, lo que hace incómodo limitar la decisión a una tabla de pagos.

Con el fin de obviar este inconveniente, estudiaremos ahora otro procedimiento para analizar un problema de decisión: el uso del diagrama del árbol. La representación en árbol nos permite arreglar los elementos de una decisión compleja, sin las restricciones del formato tabular. Además tiene la ventaja de servir como un medio efectivo de comunicación porque mediante el árbol es fácil ver cada curso de acción y todos los resultados posibles.

4.2 Diagrama del árbol de decisión

Una de las herramientas eficaces en la teoría de las decisiones es el árbol de decisión. Un árbol de decisión es simplemente un diagrama del problema que tiene el decisor. Los rasgos principales del árbol son las bifurcaciones (nodos) y las ramas (arcos). Cada nodo o punto de ramificación puede designar una selección de acciones o puede designar un grupo de resultados inciertos. El primer tipo se conoce como “nodo de decisión” y se representa por un cuadrado; el segundo tipo se llama “nodo de incertidumbre” y se representa por un círculo. Cuando el decisor encuentra un nodo de decisión, debe elegir una de las ramas alternas para recorrerla, pero si encuentra un nodo de incertidumbre no tiene control sobre cuál rama seguir, su trayectoria queda determinada por eventos aleatorios cuyas probabilidades son las asociadas con las ramas que brotan de este nodo.

Una pauta básica para construir el diagrama del árbol de decisión es que el flujo debe ser cronológico de izquierda a derecha, empezando con un nodo de decisión. El resultado proveniente de una combinación de los nodos de decisión y de incertidumbre se muestra al final de la trayectoria correspondiente, a partir de la base del árbol. Otras consideraciones sobre el árbol de decisión se presentan en los ejemplos que siguen.

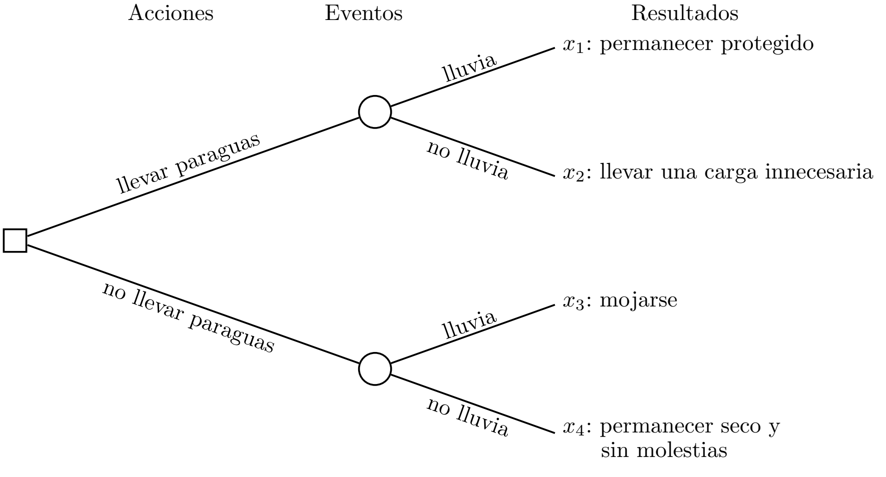

Figura 4.1. Diagrama de árbol de decisión para el dueño del paraguas.

Ejemplo 4.1. Construya el árbol de decisión para el dueño del paraguas mencionado en los ejemplos 1.1 y 1.2.

Solución. La estructura del problema de decisión a que se enfrenta el decisor es suministrada en el diagrama de árbol de decisión de la figura 4.1. Las acciones se muestran en el nodo inicial porque la decisión debe hacerse antes de saber si lloverá o no. Los estados de la naturaleza aparecen como ramificaciones en los nodos de incertidumbre. Cada trayectoria desde la base del árbol de decisión es una combinación de una acción y un evento que conduce a un resultado proveniente de la decisión. Por ejemplo, el resultado x_1 representa la sucesión: llevar paraguas y lluvia. □

Ejemplo 4.2. Al propietario de una casa se le ofreció un seguro contra tornado. Suponga que solo hay dos resultados: la casa se destruye completamente o sale indemne. Construya el árbol de decisión para el dueño de la casa.

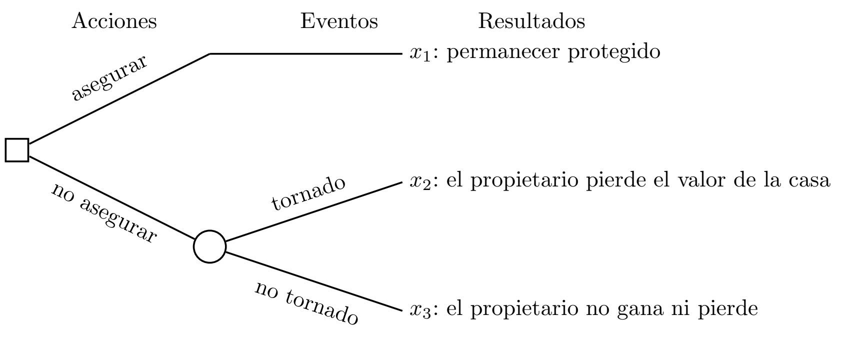

FIGURA 4.2. Diagrama de árbol de decisión para el dueño de la casa.

Solución. La estructura del problema de decisión a que se enfrenta el propietario de la casa se da en el diagrama del árbol de decisión mostrado den la figura 4.2. □

4.3 Determinación de los pagos y asignación de las probabilidades

Cada acción que se adopte o cada evento que se presente lleva involucrado un pago que puede ser una ganancia o un costo; las ganancias negativas indican pérdidas. Estos pagos se pueden colocar al lado de todas las ramas que forman el árbol de decisión; las ramas artificiales tienen un pago cero asociado a ellas. Las ramas artificiales no tienen representación y se usan solo para darle mayor claridad al problema representado por el árbol de decisión. Al final de cada trayectoria se sitúa el pago neto que se obtiene de tener en cuenta todos los pagos asociados a las acciones y a los eventos que se encuentran en la trayectoria. Cuando el árbol no tenga una configuración simple, es aconsejable, por comodidad, omitir los pagos al lado de las ramas y, más bien, situar directamente los resultados finales al término de cada trayectoria.

Las probabilidades se colocan entre paréntesis en las ramificaciones que corresponden a los nodos de la incertidumbre. Si antes de estos no hay otros nodos de incertidumbre, se asignan probabilidades incondicionales a los resultados, mientras que, si los hay, se asignan a ellos probabilidades condicionales.

Las fuentes de las probabilidades pueden ser frecuencias observadas, que miden el grado subjetivo de credibilidad de un decisor con respecto a los estados posibles de la naturaleza. Dos decisores pueden asignar probabilidades distintas al mismo árbol de decisión, puesto que ellos han podido tener experiencias diferentes o han empleado procedimientos distintos de razonamiento. No obstante, las probabilidades subjetivas han sido útiles en la transmisión de juicios, dentro de una organización donde numerosas personas contribuyen en la toma de decisiones.

Ejemplo 4.3. Un fabricante elabora cierto tipo de varilla cuyo diámetro sigue la distribución exponencial con media de 2 cm. El costo de producción de cada varilla es 10 y el precio de venta es de 7 o 14, cuando el diámetro es inferior o superior a 2 cm, respectivamente. El fabricante elabora máximo dos varillas y vende toda su producción. En el diagrama del árbol de decisión para el fabricante, sitúe los pagos y las probabilidades de los eventos.

Solución. En la figura 4.3 se muestra el árbol de decisión del fabricante. Cuando él elabora una varilla, se tienen en cuenta los eventos θ_1: el diámetro es inferior a 2 cm, y θ_2: el diámetro es superior a 2 cm; mientras que, cuando elabora dos varillas se tienen los eventos, θ_3: ambas varillas tienen un diámetro inferior a 2 cm, θ_4: una varilla tiene un diámetro inferior a 2 cm, y la otra tiene un diámetro superior a 2 cm, y θ_5: ambas varillas tienen un diámetro superior a 2 cm.

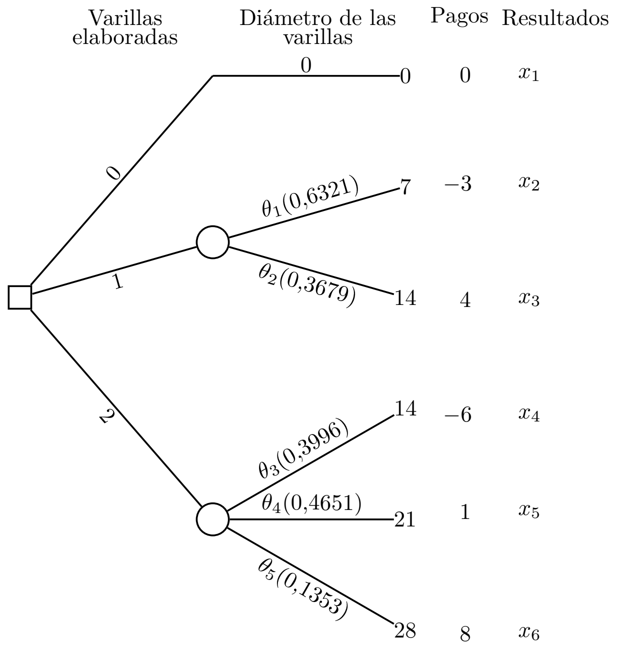

FIGURA 4.3. Diagrama de árbol de decisión del fabricante.

Al final de cada trayectoria aparecen los resultados $x_1, \ldots, x_6$ que indican las ganancias que el fabricante obtiene, provenientes de los respectivos resultados. Cuando produce una varilla, su diámetro será superior a 2 cm, con probabilidad $e^{-1} = 0,3679$; mientras que, cuando produce dos varillas, su diámetro será superior a 2 cm, con probabilidad $e^{-2} = 0,1353$. Las otras probabilidades se calculan de forma similar. □

Ejemplo 4.4. El gerente de una compañía de grabación está en conversaciones con un conjunto musical, para grabar en disco sus canciones. Las cintas han sido grabadas y la compañía debe decidir si comercializar o no la grabación. En caso afirmativo, debe realizarse el prensado de los discos. Su cantidad dependerá de si se hace una prueba de mercadeo o se coloca inmediatamente en el mercado nacional. Indiferente de los resultados de la prueba de mercadeo, la compañía puede decidir entrar o no al mercado nacional.

Suponga que el contrato de producción estipula un pago de 4.000 si se graban las canciones. Cada grabación tiene un costo fijo de 7.000 más un costo variable de 1 por disco; el precio de venta de cada disco es 2. Si se hace la prueba de mercadeo se graban 2.000 unidades y se promocionan regionalmente; esto puede dar lugar a una decisión posterior de distribuir nacionalmente 48.000 discos adicionales. Si se escoge de inmediato el mercadeo nacional, se graban 50.000 unidades.

Una grabación es un éxito o un fracaso en su mercadeo. S es exitosa, vende todos los discos, mientras que las ventas son nulas cuando se presenta un fracaso. El éxito de un mercadeo regional no garantiza el éxito nacional, pero es un predictor digno de confianza.

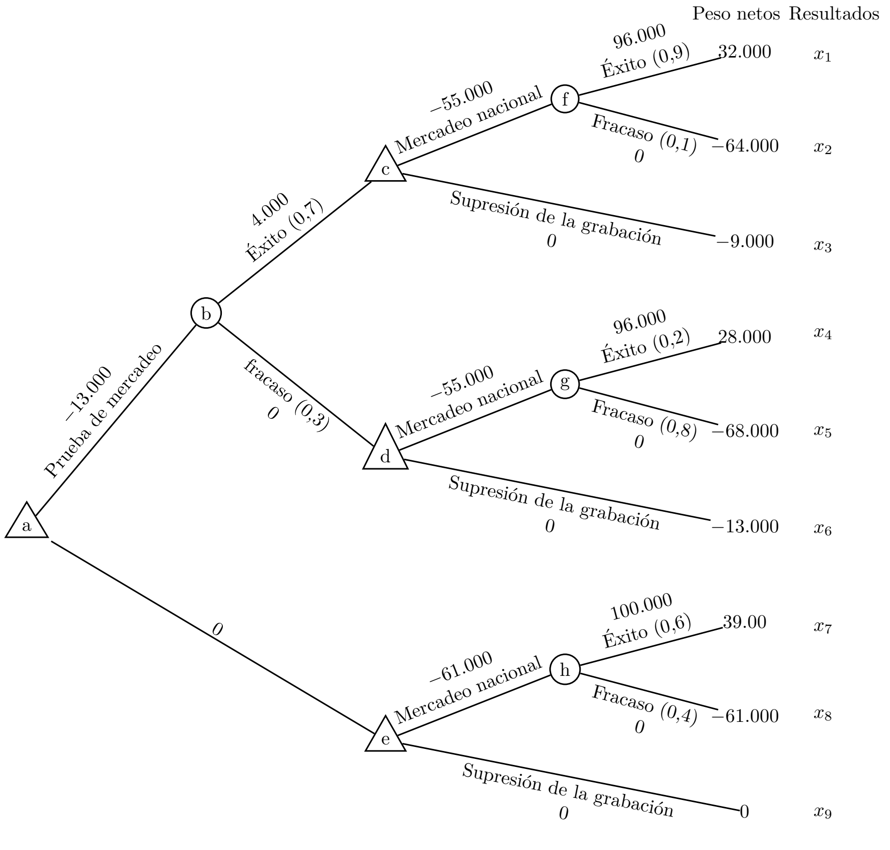

FIGURA 4.4. Diagrama de árbol de decisión de la compañía de grabación.

La prueba de mercadeo y el mercado nacional inmediato tienen éxito con probabilidades 0,7 y 0,6 respectivamente. Si la prueba de mercadeo es exitosa, entonces el mercadeo nacional es exitoso con probabilidad 0,9; mientras que si la prueba de mercadeo es un fracaso, entonces el mercadeo nacional es un fracaso con probabilidad 0,8. Construya el diagrama del árbol de decisión de la compañía de grabación y sitúe en él los pagos y las probabilidades de los eventos.

Solución. La estructura del problema de decisión de la compañía de grabación aparece en el diagrama de árbol de decisión de la figura 4.4.

Notamos que las decisiones deben hacerse en dos etapas diferentes y que cada efecto monetario se indica sobre las ramificaciones respectivas, desde el punto a del árbol de decisión; al final de las diversas trayectorias se dan las ganancias netas. □

4.4 Elección de la trayectoria óptima

En el análisis anterior se presentó un método gráfico para presentar el problema de decisión. Ahora veremos el procedimiento para encontrar la trayectoria óptima que se debe seguir.

Para cada trayectoria se especifica primero el pago en su punto terminal. Luego, desplazándose hacia atrás, se calcula el pago neto esperado para cada nodo de incertidumbre y su valor se sitúa en el respectivo nodo. El pago correspondiente a un nodo de decisión es el obtenido de seleccionar el mejor pago entre los pagos adscritos a las ramas asociadas con este nodo.

El pago asociado al nodo inicial representa el pago neto esperado proveniente del problema de decisión que se está analizando. Cuando se encuentra este pago se inicia la selección de la estrategia óptima que debe seguir el decisor; ella se identifica con la trayectoria más conveniente en el árbol de decisión. Para establecer esta trayectoria, en cada nodo de decisión se selecciona la rama que conduzca al mejor pago y se "podan" las ramas restantes. De esta manera, desde un comienzo se conoce el camino a seguir, de acuerdo con los eventos que se vayan presentando.

Ejemplo 4.5. Determine la estrategia óptima que debe seguir el gerente de la compañía de grabación (ejemplo 4.4) y su ganancia al seguir esta estrategia.

Solución. Establecemos primero las ganancias esperadas para los nodos de incertidumbre f, g y h. Estas son, respectivamente, 22.400, -48.800 y -1.000. A continuación consideramos los nodos de decisión c, d y e;

para el primero se escoge el mayor valor entre 22.400 y -9.000, para el segundo se escoge el mayor valor entre -48.800 y -13.000 y para el nodo e se escoge el mayor valor entre -1.000 y 0. Posteriormente, calculamos la ganancia esperada en el nodo de incertidumbre b; como esta ganancia es superior a 0, concluimos que la ganancia esperada en el nodo de decisión a es 11.780.

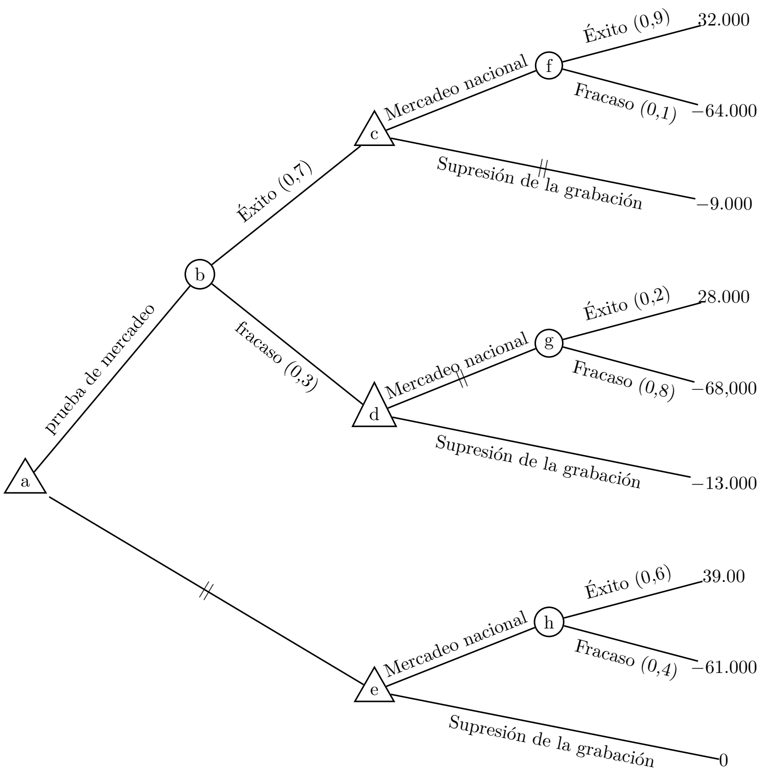

FIGURA 4.5. Diagrama de árbol de decisión de la compañía de grabación que muestra el hallazgo de la trayectoria óptima.

De acuerdo con los datos anteriores, el gerente se inclina por la prueba de mercadeo, descartando las otras alternativas. Si la prueba de mercadeo es un fracaso, ordena la suspensión de la grabación, obteniendo la prueba final de 13.000; en caso contrario, ordena el mercadeo nacional, obteniendo una ganancia de 32.000 si él es un éxito o una pérdida de 64.000 si es un fracaso. La mayor ganancia esperada del gerente de la compañía de grabación, al seguir esta estrategia, es la ganancia esperada en el nodo de decisión a. El procedimiento anterior se aprecia claramente en la figura 4.5. □

Ejemplo 4.6. En el problema tratado en el ejemplo 2.2, suponga que la planta B es escogida con probabilidad 0,3. Determine la estrategia óptima que debe seguir la empresa y el costo esperado al seguir esta estrategia.

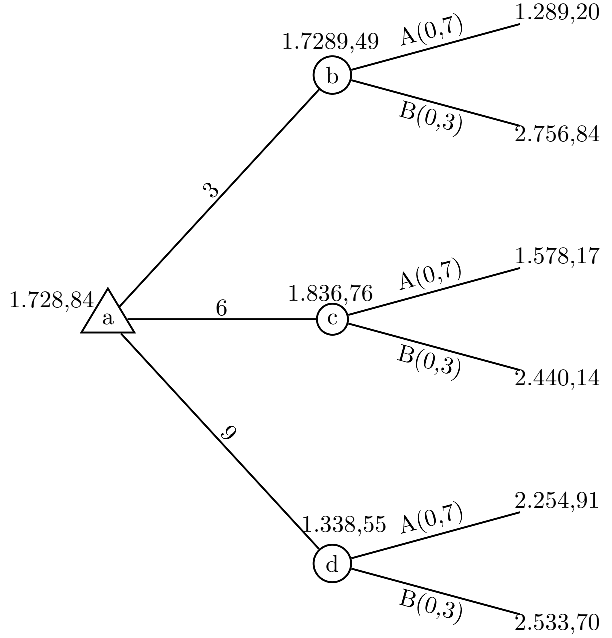

FIGURA 4.6. Diagrama de árbol de decisión de la empresa de transporte aéreo que muestra el hallazgo de la trayectoria óptima.

Solución. El diagrama de árbol de decisión de la empresa de transporte aéreo queda como se indica en la figura 4.6.

Con el fin de establecer la estrategia óptima que debe seguir la empresa, hallamos los costos esperados que corresponden a los nodos de incertidumbre b, c y d. Posteriormente colocamos en el nodo a el menor de estos costos y podamos las ramas asociadas con los otros costos. Como era de esperarse, este costo mínimo es el costo esperado bajo incertidumbre. □

Ejercicios

4.2 Diagrama del árbol de decisión

4.1 Construya el diagrama del árbol de decisión de la compañía A mencionada en el ejercicio 1.9.

4.2 Construya el diagrama del árbol de decisión del fabricante mencionado en el ejercicio 1.7.

4.3 Un fabricante de juguetes debe decidir si producir o no un yoyó. Una decisión inicial podría ser llevar a cabo una prueba de mercadeo, distribuir nacionalmente el yoyó o simplemente abandonar la producción. El fabricante también tiene estas dos últimas alternativas, si hace la prueba de mercadeo. Construya el diagrama del árbol de decisión para el fabricante.

4.4 Una empresa está interesada en contratar personal sin experiencia, para lo cual podría hacer una prueba de ingreso. Las personas contratadas participan en un programa de entrenamiento de un mes. Solo son retenidos los empleados que tengan un rendimiento satisfactorio. Construya el diagrama del árbol de decisión para la empresa.

4.3 Determinación de los pagos y asignación de las probabilidades

4.5 En el ejercicio 4.3 suponga que un éxito nacional incrementará las ganancias en 500 y un fracaso las reducirá en 100; mientras que, el abandono de la producción no cambiará las ganancias. La prueba de mercadeo costará 10. Si no se hace prueba de mercadeo, la probabilidad de un éxito nacional se ha estimado en 0,45. Se asume que 0,50 es la probabilidad de obtener un resultado favorable en la prueba de mercadeo. La probabilidad de un éxito nacional, dada una prueba favorable [desfavorable] de mercadeo, es 0,80 [0,10]. En el diagrama de árbol de decisión para el fabricante, sitúe los pagos y las probabilidades de los eventos.

4.6 Cada persona entrenada que sea retenida por la empresa (ejercicio 4.4) le representa a esta un ahorro salarial de 1.000, con relación al personal contratado con experiencia. Como medida de pago, la empresa ha escogido por empleado este ahorro salarial. Suponga que el programa de entrenamiento cuesta 300 por aspirante admitido provisionalmente y que la prueba de aptitud para el ingreso cuesta 70 por aspirante. El costo del entrenamiento es recuperado solamente para el personal retenido; mientras que, el costo de la prueba de aptitud debe deducirse del ahorro salarial. Si al personal contratado no se le hace prueba de ingreso, la probabilidad de que tenga un rendimiento satisfactorio es 0,4. La probabilidad de que una persona pase la prueba de ingreso es 0,5 y la probabilidad de obtener un rendimiento satisfactorio cuando se contrata personal que ha pasado [no ha pasado] la prueba de ingreso es 0,9 [0,3]. En el diagrama de árbol de decisión para la empresa, sitúe los pagos y las probabilidades de los eventos.

4.7 En el ejercicio 2.15 suponga que hay una tercera máquina disponible, llamada tipo 3. El alquiler de esta máquina cuesta 1.600 y el costo de corregir las partes defectuosas (10 por unidad) debe ser cubierto por el usuario de la máquina. Suponga que el porcentaje de partes defectuosas producidas por la máquina es del 2 % o el 6 %, con la misma probabilidad. Construya el diagrama del árbol de decisión de la compañía A y sitúe en él los pagos y las probabilidades correspondientes.

4.8 Construya el diagrama del árbol de decisión para el vendedor de revistas mencionado en los ejercicios 2.5 y 2.8. Sitúe en él los pagos y las probabilidades correspondientes.

4.9 Construya el diagrama del árbol de decisión del fabricante mencionado en el ejercicio 2.11. Sitúe en él los pagos y las probabilidades correspondientes.

4.10 Un fabricante de jabones desea determinar si mercadear o no un producto nuevo. Puede ordenar una prueba de mercadeo por 40. La ganancia para un producto exitoso es de 900; mientras que el fracaso de la marca daría lugar a una pérdida de 450. El no mercadeo no cambiará las ganancias. El fabricante ha juzgado que, sin muestreo, el producto tendría una posibilidad de éxito del 40 %. La prueba de mercadeo será favorable (con un 40 % de posibilidad) o desfavorable. Dado un resultado favorable, la posibilidad de éxito del producto se ha estimado en un 90 %. En caso de un resultado desfavorable, la posibilidad de éxito del producto se ha estimado en un 20 %. Construya el diagrama del árbol de decisión para el fabricante y sitúe en él los pagos y las probabilidades de los eventos.

4.4 Elección de la trayectoria óptima

4.11 Dado el diagrama de árbol de decisión de la figura 4.7, halle el valor de la probabilidad de p, si las acciones A y B son igualmente ventajosas para el decisor. Los pagos indican ganancias.

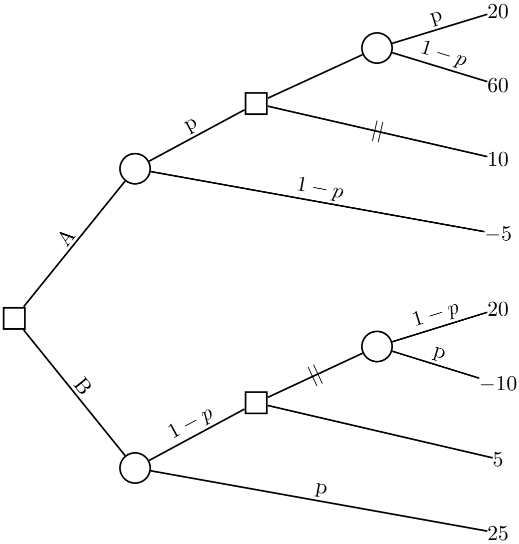

FIGURA 4.7.

4.12 ¿Cuántas varillas debe elaborar el fabricante mencionado en el ejemplo 4.3, con el fin de maximizar sus ganancias? ¿Cuál es su ganancia esperada máxima?

4.13 ¿Cuántas copias debe ordenar el vendedor de revistas (ejercicio 4.8) con el propósito de maximizar sus ganancias? ¿Cuál es su ganancia esperada máxima?

4.14 ¿Qué máquina debe tomar en alquiler la compañía A (ejercicio 4.7) con el fin de minimizar sus costos? ¿Cuál es el costo esperado mínimo?

4.15 Determine la estrategia que suministra al fabricante de juguetes (ejercicio 4.5) la mayor ganancia esperada. ¿Cuál es esta ganancia?

4.16 Determine la estrategia que suministra a la empresa mencionada en los ejercicios 4.4 y 4.6 la mayor ganancia esperada. ¿Cuál es esta ganancia?

4.17 Determine la estrategia que suministra al fabricante de jabones (ejercicio 4.10) la mayor ganancia esperada. ¿Cuál es esta ganancia?

4.18 Un fabricante produce un cierto tipo de lámina cuyo espesor en milímetros sigue la distribución normal con media 5,2 y varianza 1/4. El costo de elaborar cada lámina es 50. El fabricante puede producir una lámina como ensayo o producir directamente un lote de 10 láminas. La lámina de ensayo tiene un costo adicional de 10 y en caso de que el fabricante no continúe con la producción del lote tiene una pérdida de 30. El fabricante vende el lote por 900, si en este este hay al menos 8 láminas con un espesor de 5 o más milímetros, lo cual constituye un éxito para él. Cuando él elabora solamente una lámina, puede aprovechar la experiencia, que de ella se desprende, en la producción del lote. El espesor de las láminas en el lote sigue la distribución normal con media 5,2 y varianza 1/9, cuando la lámina de ensayo tiene un espesor menor de 5 milímetros y sigue la distribución normal con media 5,2 y varianza 1/64, cuando la lámina de ensayo tiene un espesor mayor o igual a 5 milímetros. Construya el diagrama del árbol de decisión para el fabricante y sitúe en él los pagos y las probabilidades de los eventos. ¿Qué estrategia suministra al fabricante la mayor ganancia esperada? ¿Cuál es esta ganancia?

CAPÍTULO 5

Toma de decisiones con información experimental

5.1 Introducción

En una situación típica el decisor tiene algún tipo de juicio acerca de los eventos o estados de la naturaleza. Este puede expresarse como un conjunto de “probabilidades a priori” con relación a la ocurrencia de los eventos respectivos. Tal juicio debe ser cuantificado en términos de probabilidades subjetivas, puesto que los eventos en cuestión frecuentemente tienen lugar a partir de circunstancias no repetitivas. Otras veces las probabilidades a priori pueden ser de naturaleza objetiva. Con la información proveniente de un experimento que por lo general es un muestreo, se busca reducir la incertidumbre en la consecución no solo de las probabilidades a priori sino también de las “probabilidades a posteriori”. El propósito de este capítulo es analizar las situaciones en que el decisor puede buscar información adicional sobre cuál evento ocurrirá antes de que deba adoptar una acción.

5.2 Regla de Bayes

La regla de Bayes se utiliza para combinar la distribución a priori y la información muestral, con el fin de determinar la mejor acción que debe adoptar el decisor. Para ver esta combinación consideremos la variable aleatoria (θ, X), donde θ señala un evento o estado de la naturaleza y X indica la información obtenida a partir de un experimento que podría consistir en la toma de una muestra aleatoria. Cuando ambas variables son discretas, la distribución a posteriori de θ, dada $X = j$, puede expresarse en la forma:

$$P\{\theta = i/X = j\} = \frac{P\{X = j/\theta = i\}P\{\theta = i\}}{P\{X = j\}} \tag{5.1}$$

donde

$$P\{X = j\} = \sum_i P\{\theta = i, X = j\} \tag{5.2a}$$

y

$$P\{\theta = i\} = \sum_j P\{\theta = i, X = j\} \tag{5.2b}$$

son las funciones de frecuencia marginales de las variables X y θ respectivamente. En el caso en que la variable θ sea continua, la distribución a posteriori de θ, dada $X = j$, se expresa en la forma:

$$f(z/X = j) = \frac{P\{X = j/\theta = z\}f(z)}{P\{X = j\}} \tag{5.3}$$

donde

$$P\{X = j\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X = j/\theta = z\}f(z)\,dz \tag{5.4}$$

y

$$f(z) = \sum_j f(z, X = j)$$

son las funciones de frecuencia y de densidad marginales de las variables X y θ respectivamente. Cuando la variable X también sea continua, se obtienen las expresiones siguientes:

$$f_{\theta/X}(z/X) = \frac{f_{X/\theta}(x/z)f_\theta(z)}{f_X(x)}$$

donde

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,x)\,dz$$

y

$$f_\theta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,x)\,dx$$

son las funciones de densidad marginales de las variables X y θ respectivamente.

Usando los conceptos fundamentales del teorema de Bayes, el procedimiento ilustrado en el ejemplo siguiente se utiliza cuando las variables X y θ son discretas y se emplean árboles para analizar los problemas de decisión.

Ejemplo 5.1. Ante la decisión de perforar o no en busca de petróleo, el dueño de un terreno contempla la contratación de un geólogo para conducir un examen exploratorio detallado. Puesto que nunca dos sitios de perforación no probados son iguales, no hay frecuencia histórica que pueda ser usada con este propósito. Por lo tanto, el geólogo debe confiar en un valor subjetivo de la probabilidad. Suponga que él cree que hay una posibilidad del 60 % de encontrar petróleo, eso es, si $\{\theta = 1\}$ y $\{\theta = 0\}$indican los eventos hay y no hay petróleo, entonces

$$P\{\theta = 1\} = 0{,}60 \quad \text{y} \quad P\{\theta = 0\} = 0{,}40$$

Como paso siguiente, el dueño del terreno evalúa el examen exploratorio, empezando por ver qué resultados son significativos. Por simplicidad, asuma que el análisis del geólogo conduce solamente a una predicción: favorable ($X = 1$) o desfavorable ($X = 0$). Registros históricos muestran que la predicción del geólogo ha sido favorable en un 85 % de los campos que poseen petróleo. Además, el examen del geólogo es en un 90 % digno de confianza, al hacer una predicción desfavorable cuando no hay petróleo. Halle la distribución de probabilidad de la variable X y la distribución a posteriori del estado θ.

Solución. En el primer diagrama de árbol de la figura 5.1, se muestra la cronología actual de los eventos; mientras que, en el segundo diagrama de árbol se señala la sucesión en que ocurren los eventos, la función de frecuencia de la variable X y la función de frecuencia condicional de θ dados los valores de X. $\square$

FIGURA 5.1. Diagrama de árbol de probabilidad para el examen exploratorio del geólogo.

En lugar de emplear los árboles de probabilidad se puede recurrir al uso de matrices estocásticas donde cada fila señala una distribución de probabilidad condicional. Para ilustrar el uso de matrices estocásticas suponemos que la variable θ toma los valores $0, 1, 2, \ldots, m$ y la variable X toma los valores $0, 1, 2, \ldots, n$. Definimos entonces las probabilidades siguientes para $i = 0, 1, \ldots, m$; y $j = 0, 1, \ldots, n$:

$$p_{ij} = P\{X = j/\theta = i\} \tag{5.5}$$

$$p^*_{ji} = P\{\theta = i/X = j\} \tag{5.6}$$

$$r_{ji} = P\{X = j, \theta = i\} \tag{5.7}$$

y

$$q_i = P\{\theta = i\} \tag{5.8}$$

Para construir el árbol de decisión se debe conocer la matriz $P^* = (p^*_{ji})_{n\times m}$. Cuando no es así, se debe identificar la matriz estocástica $P = (p_{ij})_{m\times n}$ y la matriz diagonal $Q = (q_i\delta_{ik})_{m\times m}$. Luego usamos la matriz transpuesta de P para calcular la matriz $R = (r_{ji})_{n\times m}$ mediante la fórmula

$$R = P^tQ \tag{5.9}$$

La función de frecuencia de X se obtiene sumando por filas los elementos de la matriz R, esto es,

$$P\{X = j\} = \sum_{i=0}^{m} r_{ji}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.10}$$

Finalmente, tomando

$$p^*_{ji} = \frac{r_{ji}}{P\{X = j\}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.11}$$

se halla la matriz estocástica P^*.

Ejemplo 5.2. Use el procedimiento matricial para calcular (ejemplo 5.1) la función de frecuencia de la variable X y la matriz P^*.

Solución. Las matrices P y Q

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0 \\ 0 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

resumen la información del primer árbol de probabilidad de la figura 5.1.

Ahora, de la fórmula (5.9) obtenemos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}09 \\ 0{,}04 & 0{,}51 \end{bmatrix}$$

Entonces, la función de frecuencia de la variable X y la matriz estocástica P^* son

$$P\{X = 0\} = 0{,}45 \quad \text{y} \quad P\{X = 1\} = 0{,}55$$

y

$$P^* = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 4/55 & 51/55 \end{bmatrix}$$

que, como puede observarse, remplazan al segundo árbol de probabilidad de la figura 5.1. □

5.3 Análisis posterior

Luego de ilustrar el uso de la regla de Bayes pasamos a hacer el análisis posterior, el cual consiste en usar un árbol de decisión, como base para la toma de decisiones. El árbol se inicia con la etapa que involucra la alternativa de obtener o no la información experimental. En caso afirmativo, en las ramas del nodo de incertidumbre se sitúa la distribución de probabilidad de la variable X, donde X representa la información experimental. Posteriormente se tienen en cuenta los nodos de decisión después de los cuales vienen los nodos de incertidumbre en cuyas ramas se sitúan las distribuciones condicionales de la variable θ. Cuando el decisor no recurre a la información experimental, se emplea la distribución a priori de la variable θ.

Recuérdese que el valor esperado de la información perfecta indica el valor de la información ideal acerca de los diversos eventos. De esta manera, si el costo de la información es mayor que el valor esperado de la información perfecta, la ramificación proveniente de aquella información se descarta del árbol, haciendo con ello innecesario el cálculo de las probabilidades a posteriori y de paso abreviando el árbol de decisión.

Ejemplo 5.3. En el ejemplo 5.1 asuma que la concesión es vendida por 200 al descubrir petróleo, el costo de perforación es 80 y el costo del examen exploratorio es 15. Determine la estrategia óptima del dueño del terreno.

Solución. La figura 5.2 muestra el diagrama del árbol de decisión que ilustra las escogencias del dueño del terreno, una vez sean conocidos los resultados exploratorios.

Si la decisión inicial es no efectuar un examen exploratorio, entonces la escogencia, perforar o abandonar, debe hacerse sin información, lo cual se muestra en el nodo de decisión de la parte inferior del árbol. Aquí, las probabilidades a priori originalmente obtenidas se aplican a los eventos: petróleo y no petróleo.

Efectuando la inducción hacia atrás hallamos que la exploración produce una ganancia esperada de 43, que es superior a la ganancia esperada al no hacer uso del examen exploratorio. La estrategia que maximiza la ganancia esperada consiste entonces en hacer el examen exploratorio; si es favorable, perforar, pero si es desfavorable, abandonar. □

5.4 Uso de la información experimental

Consideremos ahora más detenidamente el caso en que un decisor desea buscar información, mediante la realización de un experimento o recurriendo a una asesoría que le facilite una buena decisión.

En muchos casos el experimento que lleva a cabo un decisor consiste en tomar una muestra aleatoria de una población cuyas características influyen en los pagos fundamentales. Naturalmente, la escogencia del decisor depende del resultado del muestreo particular.

Un esquema de muestreo puede analizarse identificando todos los

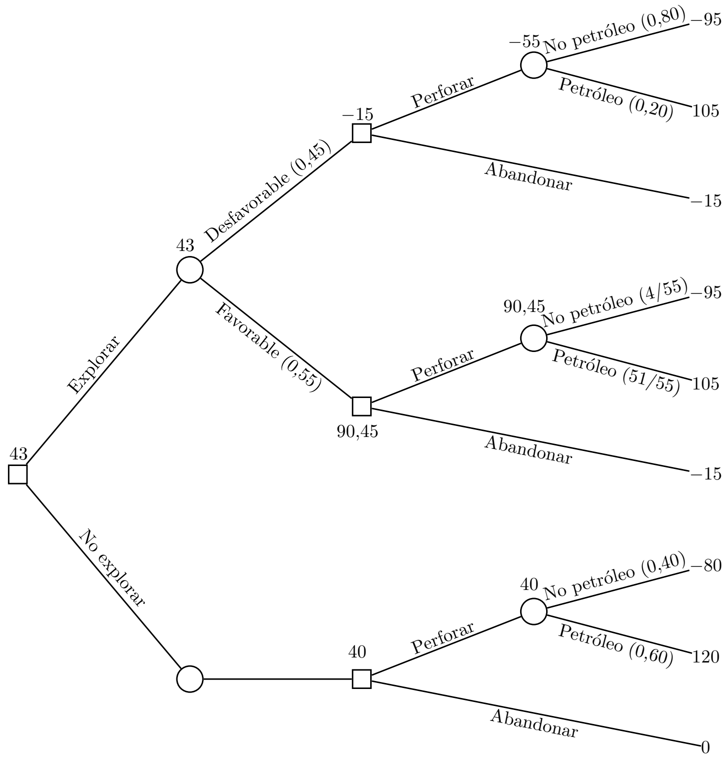

FIGURA 5.2. Diagrama del árbol de decisión del dueño del terreno.

resultados posibles de la muestra y todas las estrategias de que dispone el decisor. El muestreo es una herramienta que le sirve al decisor para seleccionar la mejor estrategia, esto es, la que le señala la mejor acción para cualquier resultado particular de la muestra. Cuando se toma una muestra, se hace sin restitución y sin orden, para lo cual se necesita el uso de la distribución hipergeométrica.

En el ejemplo 5.4 veremos el caso en que el decisor acude a una asesoría con el fin de adoptar la mejor acción y en el ejemplo 5.5 ilustraremos el empleo de la distribución hipergeométrica cuando el decisor recurre al muestreo con el mismo propósito.

Ejemplo 5.4. En una ciudad y en una fecha dada se decidió la presentación de un conjunto musical. Las ganancias dependen del estado del tiempo; si es lluvioso, el conjunto pierde 15.000, si está nublado pierde 5.000 y si está soleado gana 10.000. El conjunto puede cancelar su presentación, acción que dará lugar a una pérdida de 1.000. Además, incurriendo en un costo adicional de 500, el conjunto puede obtener información sobre el estado del tiempo. En la siguiente tabla se dan las predicciones de la oficina encargada de tal información.

Probabilidad de que la predicción sea:

Tiempo actual	L_p: Lluvia	N_p: Nubosidad	S_p: Sol
L: Lluvia	0,7	0,2	0,1
N: Nubosidad	0,3	0,5	0,2
S: Sol	0,1	0,1	0,8

Además, según esta oficina las probabilidades de lluvia, nubosidad y sol son: 0,1, 0,3 y 0,6 respectivamente. Determine la estrategia óptima del conjunto musical.

Solución. La matriz P de las predicciones y la matriz diagonal Q de la función de frecuencia del estado actual del tiempo son:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}19 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Ahora, de la fórmula (5.9) obtenemos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}07 & 0{,}09 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & 0{,}15 & 0{,}06 \\ 0{,}01 & 0{,}06 & 0{,}48 \end{bmatrix}$$

Entonces la función de frecuencia de la predicción del tiempo es

$$PL_p = 0{,}22 \quad PN_p = 0{,}23 \quad PS_p = 0{,}55$$

Y la matriz de las probabilidades condicionales del estado del tiempo, dadas las predicciones que sobre el mismo se han hecho, queda entonces como sigue:

$$P^* = \begin{bmatrix} 7/22 & 9/22 & 6/22 \\ 2/23 & 15/23 & 6/23 \\ 1/55 & 6/55 & 48/55 \end{bmatrix}$$

En el árbol de decisión de la figura 5.3 se observan las probabilidades condicionales dadas en la matriz P^* y las probabilidades de las predicciones del tiempo. Luego de hallar la trayectoria óptima en el árbol concluimos que el conjunto musical debe utilizar el servicio sobre el estado del tiempo; si el pronóstico es lluvia o nubosidad, debe cancelar el concierto, mientras que si es sol, debe llevar a cabo la presentación.

La máxima ganancia que espera obtener el conjunto musical es 3.400, cantidad que conseguiría utilizando el servicio sobre el estado del tiempo. Cuando no utiliza este servicio, espera ganar a lo más 3.000 realizando la presentación.

Ejemplo 5.5. El propietario de un almacén que ordena un lote de 100 artículos puede inspeccionar una muestra de tamaño 2 o inspeccionar la totalidad del lote. La inspección le representa al almacén un costo de 4 por artículo y cada artículo defectuoso es remplazado por el proveedor. Cuando el propietario del almacén inspecciona solamente la muestra, repone por su cuenta a los clientes los artículos que estos devuelvan por defectuosos, teniendo así una pérdida de 18 por unidad defectuosa. Por otra parte, cada unidad no defectuosa que se venda le representa al almacén una ganancia de 12.

Por experiencia se sabe que la proporción θ de artículos defectuosos en el lote tiene la siguiente función de frecuencia:

$$P\{\theta = 0{,}10\} = 0{,}7 \quad \text{y} \quad P\{\theta = 0{,}20\} = 0{,}3$$

Determine la estrategia óptima del propietario del almacén.

Solución. El número X de artículos defectuosos en la muestra tiene distribución hipergeométrica con parámetros 2, 100θ, 100. Entonces, la matriz P de las probabilidades condicionales de X, dados los diversos valores de θ, y la matriz diagonal Q de la función de frecuencia de la

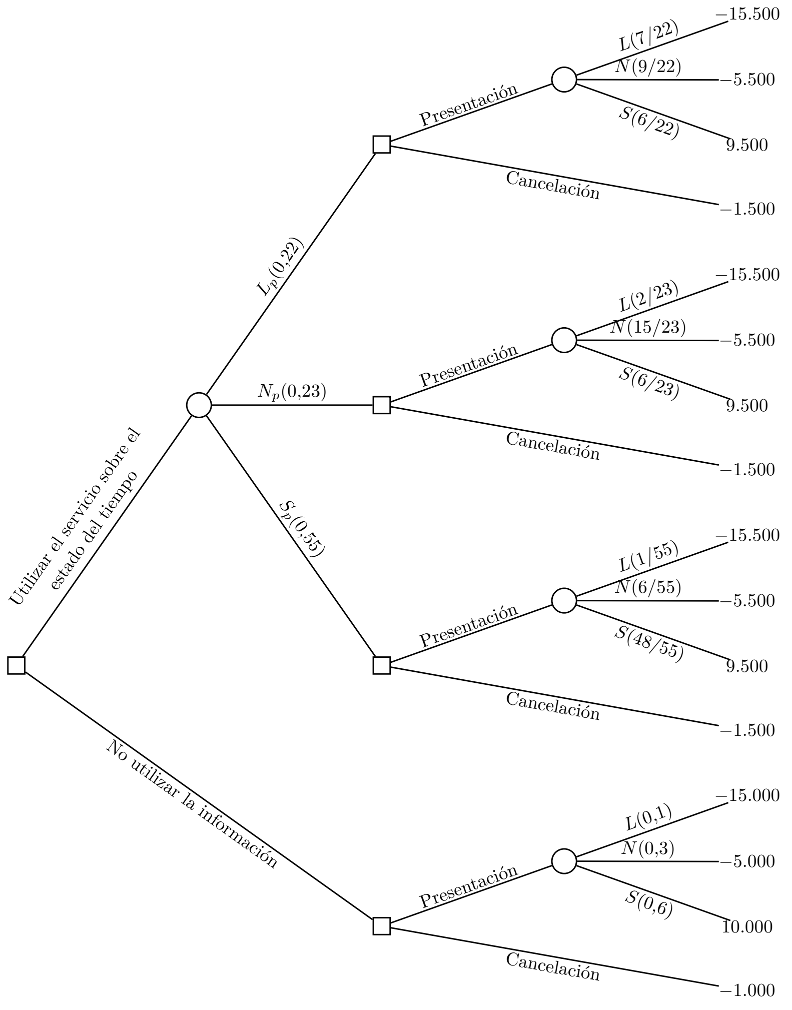

FIGURA 5.3. Diagrama del árbol de decisión del conjunto musical.

proporción de artículos defectuosos en el lote, queda en la forma:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8091 & 0{,}1818 & 0{,}0091 \\ 0{,}6384 & 0{,}3232 & 0{,}0384 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Ahora, de la fórmula 5.9 obtenemos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}5664 & 0{,}1915 \\ 0{,}1272 & 0{,}0970 \\ 0{,}0064 & 0{,}0115 \end{bmatrix}$$

Entonces la función de frecuencia del número X de artículos defectuosos en la muestra es

$$P\{X = 0\} = 0{,}7579 \quad P\{X = 1\} = 0{,}2242 \quad P\{X = 2\} = 0{,}0179$$

Y la matriz de las probabilidades condicionales, de la proporción θ de artículos defectuosos en el lote, dado el número X de artículos defectuosos en la muestra, queda como sigue

$$P^* = \begin{bmatrix} 0{,}7473 & 0{,}2527 \\ 0{,}5675 & 0{,}4325 \\ 0{,}3575 & 0{,}6425 \end{bmatrix}$$

En la figura 5.4 se muestra el árbol de decisión donde se sitúan la función de frecuencia de X y las probabilidades condicionales dadas en la matriz P^*. En este árbol consideramos primero los resultados del muestreo. Si en la muestra no se obtienen artículos defectuosos, el propietario del almacén debe aceptar el lote; mientras que si se encuentran 1 o 2 artículos defectuosos, es aconsejable que el propietario del almacén inspeccione la totalidad del lote. La ganancia esperada total, proveniente del muestreo es entonces 812,27. Si no se hace muestreo, la mayor ganancia se obtiene aceptando directamente el lote, y como ella es inferior a 812,27 concluimos que el muestreo es mejor. □

5.5 Valor esperado de la información muestral

Recordemos ahora que el valor esperado de la información perfecta pone un límite a la cantidad que el decisor desearía pagar por cualquier tipo de información que sea útil en la predicción del estado de la naturaleza. Una medida similar al valor esperado de la información perfecta expresa la importancia de la información contenida en la muestra. Esta medida conocida como el “valor esperado de la información muestral”

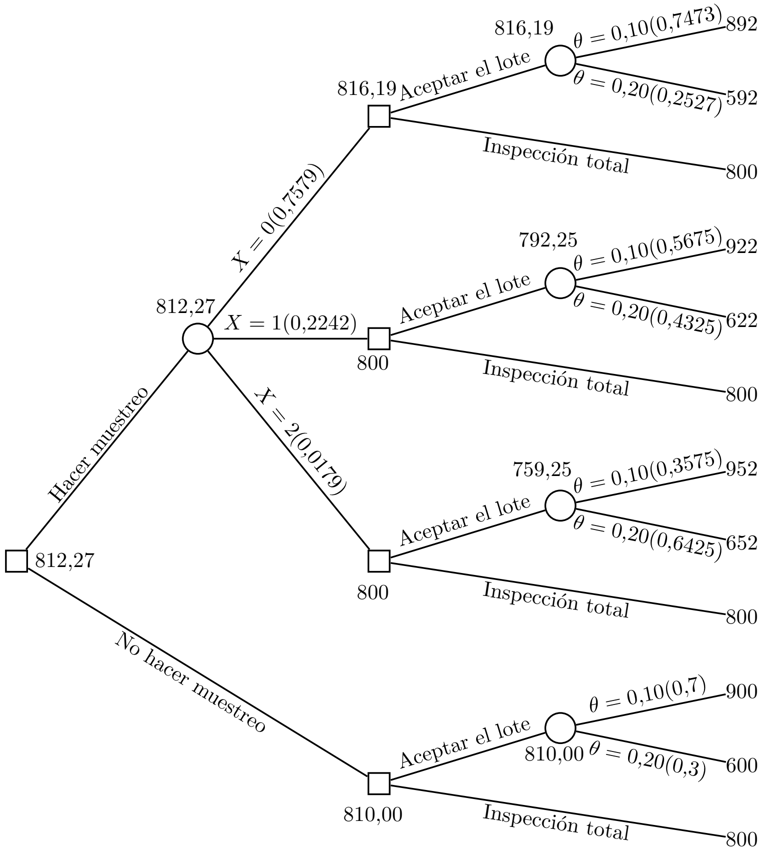

FIGURA 5.4. Diagrama del árbol de decisión del propietario del almacén.

(VEIM), se obtiene de la diferencia entre el pago esperado bajo incertidumbre y el “pago esperado con información muestral” (PEIM), calculado sin tener en cuenta el costo del muestreo. En esta forma

$$(VEIM) = |(PEIM) - (PEBI)| \tag{5.12}$$

El valor esperado de la información muestral es totalmente análogo al valor esperado de la información perfecta, pero se aplica a una información menos confiable. Al igual que el valor esperado de la información perfecta, el valor esperado de la información muestral establece un límite superior a lo que debe pagar el decisor para conseguir los resultados muestrales. Finalmente, es importante notar que la “información muestral” no solo se refiere a la información proveniente de un muestreo sino también a la información alcanzada por medios distintos al muestreo.

Ejemplo 5.6. En el problema analizado en el ejemplo 5.5, determine la máxima cantidad que el propietario del almacén pagaría:

a) por una información muestral

b) por una información 100 % confiable

Solución.

a) Suponemos que el propietario del almacén no cancela cantidad alguna por las dos unidades que examina de la muestra. Así, la ganancia esperada con la información muestral es 820,27 y como la ganancia esperada bajo incertidumbre es 810 concluimos que el propietario pagaría máximo 10,27 por una información muestral.

b) Si el propietario del almacén dispusiera de un predictor perfecto para establecer el número de artículos defectuosos en el lote, aceptaría este sin inspección alguna cuando el 10 % de los artículos fuera defectuoso e inspeccionaría su totalidad cuando el 20 % de los artículos fuera defectuoso. De esta manera, el propietario del almacén pagaría a lo más 60 por una información 100 % confiable. □

5.6 Ejercicios

5.2 Regla de Bayes

5.1 El gerente de una compañía petrolera debe decidir si perforar o abandonar un terreno. Ha juzgado que la probabilidad a priori de hallar un campo productor de petróleo es 0,30. En campos productores de petróleo de geología similar su experiencia ha mostrado que la posibilidad de encontrar petróleo es 0,9; pero, para pozos secos con las mismas características, la probabilidad de que un examen exploratorio niegue la existencia de petróleo ha sido establecida en 0,7. Halle la distribución de probabilidad de la variable X que indica si la exploración es o no favorable y luego establezca la distribución a posteriori del estado θ.

5.2 El gerente de un estudio cinematográfico desea mercadear una nueva película, razón por la cual planea una serie de presentaciones previas privadas. Se ha juzgado que la probabilidad a priori de éxito es 0,3. Históricamente se ha hallado que hay presentaciones previas desfavorables en el 80 % de todas las películas no exitosas; mientras que hay presentaciones previas favorables en el 70 % de las películas exitosas. Halle las probabilidades de que la película sea un éxito (fracaso) si la presentación previa es favorable o desfavorable.

5.3 La información relacionada con los costos esperados de los reclamos (ejercicio 3.21) también puede obtenerse del registro de los accidentes de los conductores. Asuma que un conductor tiene a lo más un accidente en un año dado. Establezca para el segundo año el costo esperado de los reclamos de un conductor si este en el primer año

a) no tiene accidentes

b) tiene un accidente

5.3 Análisis posterior

5.4 Cuando el incremento de la prima se hace efectivo (ejercicio 3.20), los dos primeros asegurados cuya prima se incrementa no renuevan el seguro. ¿Debe el agente aceptar la oferta de trabajo?

5.5 Suponga que la compañía, antes de asegurar a un conductor (ejercicio 3.21), lo entrevista para conocer sus hábitos de bebida. Cada entrevista le representa a la compañía un costo de 2. Asumiendo que el 36 % de los bebedores miente acerca de sus hábitos de bebida, calcule el pago esperado de la compañía para cada acción cuando el entrevistado dice que es bebedor y cuando dice que no es bebedor.

5.6 Con el fin de hacer una selección adecuada (ejercicio 5.1), el gerente puede decir primero si pagar o no 30 por un examen exploratorio, el cual puede confirmar o negar la presencia de petróleo. Los costos de perforación han sido establecidos en 200. Si se encuentra petróleo, la compañía vende la concesión en 500. Halle la ganancia esperada máxima de la compañía.

5.7 La tabla siguiente de ganancias ha sido establecida por el gerente del estudio (ejercicio 5.2).

Eventos	Distribuida como clase A	Vendida a una cadena de televisión	Distribuida como clase B
Éxito	5.000	1.000	3.000
Fracaso	−2.000	1.000	−1.000

Halle la ganancia esperada máxima del estudio cuando se hace la presentación previa privada.

5.8 Asumiendo que la información perfecta para la compañía de seguros (ejercicio 5.5) está disponible por un valor de 10, establezca la política óptima que debe seguir.

5.4 Uso de la información muestral

5.9 Un librero ordena lotes de 100 textos escolares de diversas editoriales. El librero puede aceptar un lote sin inspeccionar, inspeccionarlos en su totalidad o solamente tomar una muestra de 2. La inspección le representa al librero un costo de 10 por unidad y cada texto defectuoso es remplazado por el editor. Cada texto no inspeccionado por el librero y que luego un estudiante lo devuelva por defectuoso le representará a aquel una pérdida de 100 porque el texto defectuoso no será sustituido por el editor. Por otra parte, cada texto vendido que no se halle defectuoso le representará al librero una ganancia de 50. Por experiencia se sabe que la proporción θ de defectuosos en los lotes tiene la siguiente función de frecuencia $P\{\theta = 0{,}10\} = 0,6$, $P\{\theta = 0{,}15\} = 0,3$ y $P\{\theta = 0{,}20\} = 0,1$. ¿Cuál es la ganancia máxima que espera obtener el librero? ¿Qué estrategia debe seguir para conseguirla?

5.10 Un vendedor está ante la alternativa de comprar o no un lote de 80 bombillos. Tendrá una pérdida de 150 por cada bombillo defectuoso y obtendrá una ganancia de 50 por cada bombillo no defectuoso. La proporción de bombillos defectuosos tiene la siguiente función de frecuencia:

$$P\{\theta = 0{,}10\} = 0,4 \quad \text{y} \quad P\{\theta = 0{,}20\} = P\{\theta = 0{,}30\} = 0,3$$

El fabricante le permitirá al vendedor examinar cada bombillo por un valor de 14 no reembolsables y rechazar cualquier unidad defectuosa sin costo adicional alguno para el vendedor; cualquier unidad rechazada por el vendedor será restituida por el fabricante. En el caso en que el vendedor examine una muestra, esta será de tamaño 2. ¿Cuál es la ganancia máxima que espera obtener el vendedor? ¿Cuál es su estrategia óptima?

5.11 Una compañía petrolera se enfrenta con la decisión de perforar un sitio antes de que su concesión expire. La compañía puede adquirir información adicional acerca de la estructura geofísica fundamental en este sitio, conduciendo sondeos exploratorios. Debe decidir si recoger o no esta información antes de adoptar la decisión final: perforar o no perforar. Si perfora podría encontrar un pozo θ_1: seco, θ_2: con una cantidad aceptable o θ_3: con una cantidad elevada de petróleo. Las ganancias cuando se presentan los eventos anteriores son, respectivamente, -70.000, 50.000 y 200.000. A un costo de 10.000 la compañía hace un sondeo exploratorio el cual ayudará a determinar la estructura geológica fundamental en el sitio (E). El sondeo revelará si el terreno E_n: no tiene estructura, E_a: tiene una estructura abierta o E_c: tiene una estructura cerrada. Los expertos han suministrado la siguiente función de frecuencia de la variable (θ, E).

	E_n	E_a	E_c
θ_1	0,30	0,15	0,05
θ_2	0,09	0,12	0,09
θ_3	0,02	0,08	0,10

Para la compañía petrolera, encuentre su estrategia óptima y la máxima cantidad que espera obtener.

5.5 Valor esperado de la información muestral

5.12 ¿Cuál es la máxima cantidad que el dueño del terreno mencionado en el ejemplo 5.3 estaría dispuesto a pagarle al geólogo por el examen exploratorio?

5.13 ¿Cuál es la máxima cantidad que el conjunto musical mencionado en el ejemplo 5.4 podría pagar por la información del estado del tiempo?

5.14 ¿Cuál es la máxima cantidad que la compañía petrolera mencionada en el ejercicio 5.11 podría pagar por la información exploratoria?

CAPÍTULO 6

Decisiones con muestreo binomial

6.1 Introducción

Teniendo en cuenta que, en general, las muestras que se toman son de tamaño muy pequeño comparado con el de la población, la distribución hipergeométrica se aproxima a la distribución binomial. Ello se debe a que en estas circunstancias la diferencia entre un muestreo sin restitución y un muestreo con restitución es insignificante. Por esta razón, en este capítulo supondremos que el número de unidades que en la muestra tiene cierta característica sigue la distribución binomial, donde el primer parámetro señala el tamaño de la muestra y el segundo indica la probabilidad de que cada elemento de la muestra tenga la característica que es de interés. También veremos el caso en que las distribuciones a priori sean beta y normal al igual que la forma como se establece el tamaño óptimo de la muestra.

6.2 Características del muestreo binomial

En un problema de decisión se recurre al muestreo binomial cuando la población que se está analizando se halla compuesta por dos subpoblaciones, cada una con características diferentes. De la población se toma una muestra no ordenada y con restitución en la cual se reflejan, naturalmente, las dos características que posee la población.

El tamaño de la muestra, llamémoslo n, también puede interpretarse como el número de ensayos independientes, donde la probabilidad de cada una de dos características, llamémoslas 1 y 2, es constante para todos los ensayos. En esta forma, si designamos con X el número de resultados que tienen la característica 1 y con p la probabilidad de que se presente este resultado, entonces la función de frecuencia de X tiene la forma:

$$P\{X = j\} = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{6.1}$$

En el análisis del muestreo binomial se utiliza la regla de decisión de Bayes y su manejo se hace en la misma forma en que se realizó en el capítulo anterior. En el ejemplo siguiente volveremos a tratar el problema analizado en el ejemplo 5.5, pero ahora asumiremos que el muestreo se hace con restitución.

Ejemplo 6.1. Determine la estrategia óptima del propietario del almacén (ejemplo 5.5) cuando inspecciona la muestra con restitución.

Solución. Ahora, el número X de artículos defectuosos en la muestra tiene distribución binomial con parámetros: 2 que es el tamaño de la muestra y θ que es la proporción de artículos defectuosos en el lote. Así, la matriz P de las probabilidades condicionales de X, dados los diversos valores de θ y la matriz R, quedan en la forma:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \\ 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04 \end{bmatrix}$$

y

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}567 & 0{,}192 \\ 0{,}126 & 0{,}096 \\ 0{,}007 & 0{,}012 \end{bmatrix}$$

Entonces la función de frecuencia del número X de artículos defectuosos en la muestra es

$$P\{X=0\}=0{,}759 \quad P\{X=1\}=0{,}222 \quad P\{X=2\}=0{,}019$$

y la matriz de las probabilidades condicionales, de la proporción θ de artículos defectuosos en el lote, dado el número X de artículos defectuosos en la muestra, queda así:

$$P^* = \begin{bmatrix} 0{,}7470 & 0{,}2530 \\ 0{,}5676 & 0{,}4324 \\ 0{,}3684 & 0{,}6316 \end{bmatrix}$$

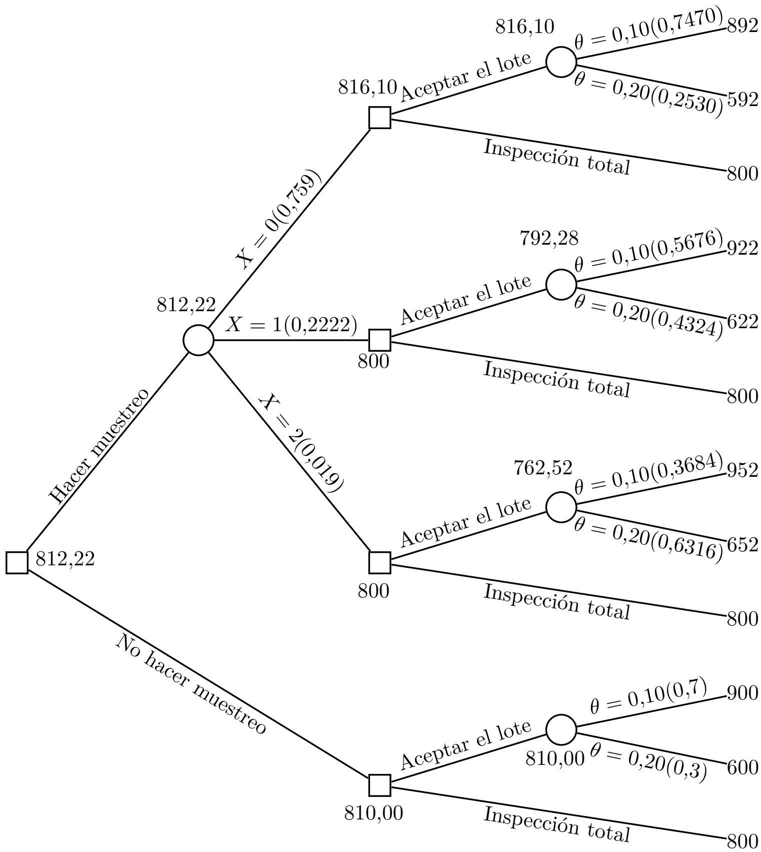

Figura 6.1. Diagrama del árbol de decisión del propietario del almacén.

En la figura 6.1 se muestra el árbol de decisión donde se sitúan la función de frecuencia de X y las probabilidades condicionales dadas en la matriz P^*. Como podemos observar, los cambios que se operan son pequeños; ahora la ganancia total esperada del propietario del almacén es 812,22, pero la trayectoria que él debe seguir continúa siendo la misma.

□

6.3 Uso de la distribución beta

Asumimos que la distribución a priori del estado θ de la naturaleza es la distribución beta con parámetros α y β; en otras palabras, la función de densidad de la variable θ viene dada por

$$f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}, \quad 0 \leq z \leq 1 \tag{6.2}$$

Suponemos además que el número X de resultados que tienen la característica 1 (ver el numeral anterior) sigue la distribución binomial con parámetros n y z. Entonces, de la fórmula (5.4) tenemos:

$$\begin{aligned} P\{X=j\} &= \int_0^1 \binom{n}{j}(1-z)^{n-j}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz \\ &= \binom{n}{j}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\eta+n-j)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Así de la fórmula (5.3) tenemos:

$$f(z/X=j) = \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\beta+n-j)} z^{\alpha+j-1}(1-z)^{\beta+n-j-1}, \ 0 \leq z \leq 1 \tag{6.4}$$

esto es, la distribución a posteriori de la variable θ es la distribución beta con parámetros $\alpha+j$ y $\beta+n-j$. En conclusión, cuando la distribución del estado θ de la naturaleza es beta y se lleva a cabo un muestreo binomial, la distribución a posteriori de θ también es beta.

Ejemplo 6.2. Suponga que la compañía mencionada en el ejemplo 2.6 examina dos frascos para saber si están o no bien envasados. También suponga que la proporción θ de frascos que la máquina llena mal sigue la distribución beta con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 78$. Determine la estrategia óptima de la compañía.

Solución. El número X de frascos mal envasados en la muestra tiene la función de frecuencia:

$$P\{X = 0\} = 0{,}951 \quad P\{X = 1\} = 0{,}048 \quad P\{X = 2\} = 0{,}001$$

Además, la proporción esperada de frascos mal envasados viene a ser $E\theta = 0,025$ y, por tanto, sin muestreo vemos que los costos esperados cuando la compañía adopta la acción a_1: contratar un experto para reajustar la máquina y cuando adopta la acción a_2: no contratar experto alguno, vienen a ser

$$l(a_1) = 300 + 10.000E\theta = 550$$

y

$$l(a_2) = 20.000E\theta = 500$$

Ahora, la distribución a posteriori de la proporción θ es beta con parámetros $2 + j$ y $80 - j$. Así,

$$E(\theta/X = j) = \frac{2 + j}{82}$$

Entonces, con muestreo, los costos esperados cuando la compañía adopta las acciones a_1 y a_2 son:

$$\begin{aligned} l(a_1) &= 300 + 10.000E(\theta/X = j) \\ &= \begin{cases} 543{,}90 & \text{si } X = 0 \\ 665{,}85 & \text{si } X = 1 \\ 787,80 & \text{si } X = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} l(a_2) &= 20.000E(\theta/X = j) \\ &= \begin{cases} 487{,}80 & \text{si } X = 0 \\ 731{,}71 & \text{si } X = 1 \\ 975{,}61 & \text{si } X = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusión, si al menos uno de los frascos de la muestra está mal envasado, la compañía debe contratar un experto para ajustar la máquina, mientras que si en la muestra no aparecen frascos mal envasados, no debe contratar experto alguno. □

6.4 Muestreo cuando las medias son los eventos

En los numerales anteriores se trató el problema general de la toma de decisiones con información muestral. Ahora consideramos una práctica usada con frecuencia y es la utilización de una muestra aleatoria, para luego analizar el problema empleando una media de la muestra.

Como antes, asumiremos que solo hay dos características posibles en la población que se está considerando: 1 y 2. Sea X_i la variable que indica si en la i-ésima observación muestral $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se presenta o no la característica 1. Los problemas de decisiones se tratan entonces en la misma forma como se ha hecho anteriormente, pero en lugar de la variable X, ahora utilizamos la media de la muestra, $X = (X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$.

Ejemplo 6.3. Considere la decisión a que se enfrenta el dueño de una fábrica para modernizar la maquinaria que tiene. Se le ofrecen dos tipos de maquinaria, A y B, ambos con la misma capacidad y confiabilidad. La tabla 6.1 muestra los costos diarios para los dos tipos de maquinaria.

TABLA 6.1. Costo diario para el fabricante.

Tipo de maquinaria	Costo de arrendamiento	Costo de funcionamiento
A	300	120
B	400	60

Los costos de arrendamiento son fijos, mientras que los costos de funcionamiento son variables, puesto que se basan en el tiempo empleado en el procesamiento de los artículos elaborados por el fabricante.

Como el número de artículos elaborados varía de un día a otro, la media diaria es usada para establecer el promedio de los costos diarios por funcionamiento, para cada alternativa. Cuando este costo se agrega al costo fijo por arrendamiento, la media del costo diario total resultante sirve como medida de pago para la decisión que adopte el fabricante. Este costo depende de la media diaria de producción θ. Aunque el fabricante tiene incertidumbre acerca del valor de θ, basa su análisis en dos valores posibles de este: $\theta = 1$ y $\theta = 2$ con probabilidades 0,40 y 0,60 respectivamente.

Un valor grande del estimador de la media diaria de producción $\overline{X}$ da credibilidad al valor $\theta = 2$, mientras que un valor pequeño de $\overline{X}$ apoya al valor $\theta = 1$. En la tabla 6.2 se dan las distribuciones condicionales que se obtienen para $\overline{X}$, cuando el fabricante observa su producción durante 10 días. Determine la estrategia óptima del dueño de la fábrica.

TABLA 6.2. Distribuciones condicionales aproximadas de $\overline{X}$.

k	$P\{X = k/\theta = 1\}$	$P\{X = k/\theta = 2\}$
1	0,50	0,10
2	0,40	0,30
3	0,10	0,60

Solución. La matriz P de las probabilidades condicionales de $\overline{X}$ dados los diversos valores de θ y la matriz diagonal Q de la función de frecuencia de la media diaria de producción quedan en la forma:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}40 & 0{,}10 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0 \\ 0 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

De la fórmula (5.1) obtenemos la matriz

$$R = \begin{vmatrix} 0{,}20 & 0{,}06 \\ 0{,}16 & 0{,}18 \\ 0{,}04 & 0{,}36 \end{vmatrix}$$

Entonces la función de frecuencia de la media diaria de producción $\overline{X}$ es

$$P\{\overline{X} = 1\} = 0{,}26 \quad P\{\overline{X} = 2\} = 0{,}34 \quad P\{\overline{X} = 3\} = 0{,}40$$

y la matriz de las probabilidades condicionales de la media diaria de producción θ, dados los valores de la media diaria de producción $\overline{X}$, queda:

$$P^* = \begin{bmatrix} 0{,}77 & 0{,}23 \\ 0{,}47 & 0{,}53 \\ 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix}$$

En la figura 6.2 se suministra el diagrama del árbol de decisión para el fabricante. El análisis de este árbol se basa en el costo bruto puesto que no se ha tenido en cuenta el costo de obtener los datos muestrales. La inducción hacia atrás indica que el costo esperado mínimo, 486,40, se encuentra con información muestral y puede lograrse seleccionando la maquinaria de tipo A cuando la producción diaria observada es en promedio de 1 o 2 artículos y seleccionando la maquinaria de tipo B cuando la producción diaria observada es en promedio de 3 artículos.

Cuando no hay información muestral observamos que el costo esperado bajo incertidumbre es 492,00. Si se dispusiera de un predictor perfecto para el valor desconocido de la media diaria de producción θ, el fabricante seleccionaría la maquinaria de tipo A con un costo de 420 cuando $\theta = 1$ y la maquinaria de tipo B con un costo de 520 cuando $\theta = 2$. De esta manera, el fabricante pagaría hasta 12 por una información 100 % confiable y máximo la cantidad 5,60 por la información muestral. □

6.5 Uso de la distribución normal

Consideremos una muestra aleatoria de tamaño n, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, proveniente de una población normal con media μ y varianza σ^2. En esta forma, las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, son mutuamente independientes y distribuidas idénticamente con

$$EX = \mu \quad \text{y} \quad Var(X) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{6.5}$$

Como en el numeral anterior, asumiremos que solo se presentan las características 1 y 2 en la población que se está estudiando y que X_i indica si en la i-ésima observación muestral ($i = 1, 2, \ldots, n$) se presenta o no la característica 1. Cuando el tamaño de la muestra es relativamente grande, haciendo uso del Teorema del Límite Central, vemos que la distribución de la media $\overline{X}$ se aproxima a la distribución normal con parámetros μ y σ^2/n.

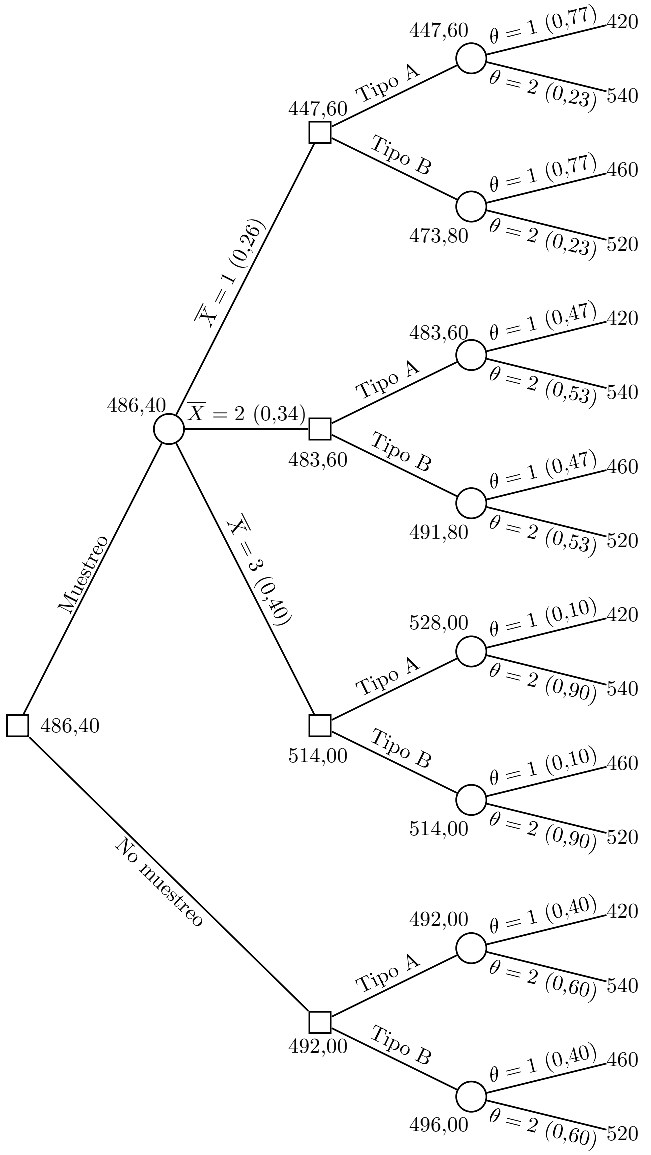

FIGURA 6.2. Diagrama del árbol de decisión del fabricante cuando usa una muestra de tamaño 10.

Asumimos que la distribución a priori del estado θ de la naturaleza es la distribución normal con parámetros μ_0 y σ_0^2; en otras palabras, la función de densidad de la variable θ viene dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \exp\left\{\frac{-(z-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \; -\infty < z < \infty \tag{6.6}$$

Estableceremos a continuación la distribución a posteriori de la variable θ.

Teniendo en cuenta que la independencia de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ no implica la independencia entre las variables X y θ, la función de densidad de la media $\overline{X}$ de la muestra, indicada por $g(\mu)$, está dada entonces por la integral

$$\begin{aligned} g(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu/z) f(z)\, dz \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi\sigma\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n(z-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(z-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} dz \end{aligned}$$

Luego de algunas operaciones encontramos que

$$g(\mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma\sigma_0}} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{1}{\sigma_0^2}}} \exp\left\{\frac{-n(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma^2\sigma_0^2\left(\dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{1}{\sigma_0^2}\right)}\right\} - \infty < \mu < \infty \tag{6.7}$$

Así, la función de densidad condicional de la variable θ, dada la media $\overline{X}$ de la muestra, viene dada por

$$f(z/\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\left(Z - \frac{\dfrac{n\mu}{\sigma^2} + \dfrac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{1}{\sigma_0^2}}\right)^2\right\}, \; -\infty < \mu < \infty \tag{6.8}$$

Esto es, la distribución a posteriori de la variable θ es la distribución normal con parámetros

$$E(\theta/\mu) = \frac{\frac{n\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} \tag{6.9}$$

y

$$Var(\theta/\mu) = \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)^{-1} \tag{6.10}$$

En conclusión, cuando la distribución del estado θ de la naturaleza es normal y se lleva a cabo un muestreo normal, la distribución a posteriori de θ también es normal.

Es importante notar que en la mayoría de los casos el estado θ de la naturaleza y la media $\overline{X}$ de la muestra no toman valores de menos a más infinito. Por esta razón, suponer que las variables θ y $\overline{X}$ tienen distribución normal conduce solo a resultados aproximados. No obstante, para la mayoría de los problemas reales el error es muy pequeño, mientras que el beneficio que se alcanza es apreciable.

Ejemplo 6.4. Para el problema planteado en el ejemplo 6.3 determine la estrategia óptima del dueño de la fábrica cuando la media diaria de la producción θ sigue la distribución normal con media $\mu_0 = 3/2$ y varianza $\sigma_0^2 = 1$, y la muestra aleatoria proviene de una población normal con media $\mu = 2$ y varianza $\sigma^2 = 16$.

Solución. El costo medio diario para los dos tipos de maquinaria puede expresarse en la forma:

$$C = \begin{cases} 300 + 120\theta & \text{para la maquinaria de tipo A} \\ 400 + 60\theta & \text{para la maquinaria de tipo B} \end{cases}$$

Puesto que la media diaria esperada de producción viene a ser $E\theta = 3/2$, vemos que sin muestreo el costo esperado diario para el dueño de la fábrica es 480 y 490 cuando se utilizan las máquinas de tipo A y B respectivamente. Ahora, la distribución a posteriori de la media diaria de producción es normal con media:

$$E(\theta/\mu) = \frac{\frac{10(2)}{16} + \frac{3/2}{1}}{\frac{10}{16} + 1} = \frac{22}{13}$$

Entonces,

$$E(C/\mu) = \begin{cases} 503{,}08 & \text{para la maquinaria de tipo A} \\ 501{,}54 & \text{para la maquinaria de tipo B} \end{cases}$$

Por lo tanto, si el dueño de la fábrica toma una muestra de tamaño diez, llega a la conclusión de que debe seleccionar la maquinaria de tipo B. Observamos además que si el tamaño de la muestra se incrementa, también se incrementa la diferencia entre los costos esperados para estos dos tipos de maquinaria, lo que hace que el dueño de la fábrica se reafirme en su decisión. □

6.6 Tamaño óptimo de la muestra

Teniendo en cuenta que el muestreo desempeña un papel muy importante en la optimización del pago esperado para el decisor, veremos ahora la forma en que se encuentra el tamaño ideal de la muestra cuando el decisor dispone de dos acciones. Puesto que cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, mejor será el pago esperado, pero mayor será el costo del muestreo, el tamaño de la muestra debe seleccionarse de tal manera que con su escogencia se optimice el pago esperado para el decisor.

En general, a cada muestra que se toma se le asocia un "valor crítico", representado por c, el cual indica que, si en la muestra hay c o más elementos de determinada característica, se adopta una acción, distinta a la que se adopta si el número de estos elementos es inferior a c. Cuando no se hace muestreo, se supone que el tamaño de la muestra es cero y por consiguiente c tomará el valor cero.

Con el propósito de conocer el tamaño ideal de la muestra, primero se calcula el pago esperado y el valor crítico para un tamaño n de la muestra; luego el costo del muestreo se le resta a este pago si indica una ganancia o se le suma si indica un costo. Este procedimiento se hace para los valores de n iguales a 0 (cuando no se hace muestreo), $1, 2, 3, \ldots$. El tamaño de la muestra que da lugar al mejor pago esperado resultante es el tamaño óptimo de la muestra.

Ejemplo 6.5. El dueño de un almacén considera la compra de 50 bombillos a un costo unitario de 9 para venderlos a un precio de 11 por unidad; cuando un bombillo sale defectuoso, pierde lo que pagó por él. Se sabe que el 10 % o el 30 % de los bombillos es defectuoso con probabilidades 0,8 y 0,2 respectivamente. Suponga que el examen de cada bombillo de la muestra tiene un costo de 0,30. Calcule el tamaño de la muestra que maximiza la ganancia esperada del dueño del almacén y determine su estrategia óptima.

Solución. Cuando el dueño del almacén saca una muestra de tamaño n, hay $n+1$ resultados posibles que son obtener $0, 1, 2, \ldots, n$ bombillos defectuosos. Con base en el resultado conseguido, adopta una de las acciones, a_1: comprar el lote, a_2: no comprar el lote. Por otra parte, observamos que el número X de bombillos defectuosos en la muestra tiene aproximadamente distribución binomial con parámetros n que es el tamaño de la muestra y θ que es la proporción de bombillos defectuosos en el lote.

Para establecer el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el dueño del almacén, ilustramos la forma en que se encuentra el pago esperado con la información muestral cuando se toman muestras de tamaño dos, con un árbol de decisión, y de tamaño tres, con el uso de matrices estocásticas; el hallazgo de los pagos esperados que se obtienen con otros tamaños de la muestra se deja al lector. Finalmente en una tabla se colocan los pagos esperados, los valores críticos, los costos del muestreo y las ganancias resultantes para escoger entre estas la máxima y seleccionar luego el tamaño de la muestra que la origina.

En la figura 6.3 aparece el diagrama del árbol de decisión del dueño del almacén cuando toma una muestra de tamaño dos.

Debe notarse que si se vuelve a usar el árbol de decisión ya no será necesario tener en cuenta el ramal de no-muestreo, puesto que la información proporcionada no va a cambiar, cualquiera que sea el tamaño que se tome de la muestra.

El procedimiento que se sigue cuando se usan matrices estocásticas es el mismo que se sigue cuando se usa el árbol de decisión, hasta encontrar la matriz P^*. Posteriormente, cuando se emplea el árbol de decisión, se sigue el método de la inducción hacia atrás que en términos matriciales es el siguiente. Primero se encuentra la matriz producto P^*A donde A

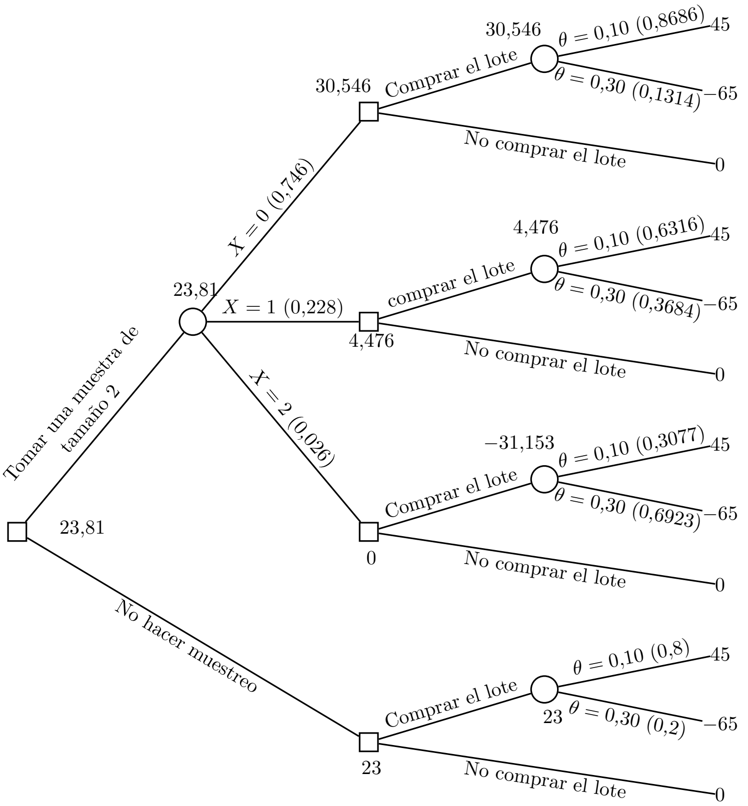

FIGURA 6.3. Diagrama del árbol de decisión del dueño del almacén cuando toma una muestra de tamaño 2.

es la matriz de pagos (ganancias), luego se construye un vector columna Y en que sus componentes son los valores máximos por filas de la matriz P^*A. La ganancia esperada con información muestral está dada por el producto escalar Y^tW, donde W es el vector columna cuyas componentes constituyen la función de frecuencia del número X de bombillos defectuosos de la muestra.

Cuando se toma una muestra de tamaño tres, la matriz P de las probabilidades condicionales de X, dada la proporción θ de bombillos defectuosos en el lote, y la matriz diagonal Q de función de frecuencia de la variable θ quedan en la forma:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}729 & 0{,}243 & 0{,}027 & 0{,}001 \\ 0{,}343 & 0{,}441 & 0{,}189 & 0{,}027 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Ahora, de la fórmula (5.9) obtenemos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}5832 & 0{,}0686 \\ 0{,}1944 & 0{,}0882 \\ 0{,}0216 & 0{,}0378 \\ 0{,}0008 & 0{,}0054 \end{bmatrix}$$

Entonces el vector columna de la función de frecuencia del número X de bombillos defectuosos en la muestra es

$$W = [0{,}6518,\ 0{,}2826,\ 0{,}0594,\ 0{,}0062]$$

y la matriz de las probabilidades condicionales de la proporción de bombillos defectuosos en el lote, dados el número X de bombillos defectuosos en la muestra, queda:

$$P^* = \begin{bmatrix} 0{,}8948 & 0{,}1052 \\ 0{,}6879 & 0{,}3121 \\ 0{,}3636 & 0{,}6364 \\ 0{,}1290 & 0{,}8710 \end{bmatrix}$$

Puesto que la matriz de ganancias es

$$A = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ -65 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que

$$P^*A = \begin{bmatrix} 33{,}428 & 0 \\ 10{,}669 & 0 \\ -25{,}004 & 0 \\ -50{,}810 & 0 \end{bmatrix}$$

y de esta manera

$$Y = [33{,}428,\ 10{,}669,\ 0,\ 0]$$

La ganancia esperada con información muestral viene a ser entonces:

$$Y^t W = 24{,}80$$

Observando la matriz P^*A vemos que, si el dueño del almacén compra el lote (acción a_1), espera una ganancia cuando máximo hay un bombillo defectuoso en la muestra y espera una pérdida cuando mínimo hay dos bombillos defectuosos. Por consiguiente, el valor crítico de la muestra es $c = 2$.

En la tabla 6.3 se sitúa la información necesaria para establecer el tamaño óptimo de la muestra. En esta tabla notamos que la ganancia total aumenta hasta $n = 5$ y luego empieza a disminuir; por lo tanto, la ganancia total es máxima cuando el tamaño de la muestra es 5. De aquí que la mejor decisión es tomar una muestra de tamaño 5 y comprar el lote si el número de bombillos defectuosos en la muestra es menor de 2; en caso contrario, será aconsejable no comprar el lote. □

TABLA 6.3. Información para establecer el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el dueño del almacén.

Tamaño de la muestra n	Valor crítico c	Ganancia esperada (PEIM)	Costo de la muestra $0,30n$	Ganancia total (PEIM)$-0,30n$
0	0	23,00	0	23,00
1	1	23,30	0,30	23,00
2	2	23,81	0,60	23,21
3	2	24,80	0,90	23,90
4	2	25,65	1,20	24,45
5	2	26,20	1,50	24,70
6	2	26,43	1,80	24,63
7	3	26,66	2,10	24,56

Ejercicios

6.2 Características del muestreo binomial

6.1 Resuelva el problema planteado en el ejercicio 5.9 cuando el librero toma la muestra de tamaño 2, sin orden y con restitución.

6.2 Resuelva el problema planteado en el ejercicio 5.10 cuando el vendedor toma la muestra de tamaño 2, sin orden y con restitución.

6.3 Resuelva el problema planteado en el ejemplo 6.1 cuando el propietario del almacén toma una muestra de tamaño 3.

6.3 Uso de la distribución beta

6.4 Resuelva el problema planteado en el ejemplo 6.2 cuando la compañía examina 3 frascos para saber si están o no bien envasados.

6.5 Resuelva el problema planteado en el ejemplo 6.2 cuando la proporción θ de frascos mal envasados sigue la distribución uniforme sobre el intervalo [0,1].

6.4 Muestreo cuando las medias son los eventos

6.6 Suponga que la compañía A, mencionada en los ejercicios 1.9 y 2.15, elabora 10 lotes, cada uno de 1.000 partes, y que la i-ésima observación en la muestra, $X_i (i = 1, 2, \ldots, 10)$, nos indica el número de partes defectuosas obtenidas en la elaboración del i-ésimo lote. Halle el costo mínimo que espera conseguir la compañía A, considerando que las distribuciones condicionales aproximadas para la media de la muestra $\overline{X}$ vienen dadas en la tabla siguiente:

p	0,03	0,07
$P\{\overline{X} = p/\theta = 0{,}01\}$	0,8	0,2
$P\{\overline{X} = p/\theta = 0{,}05\}$	0,5	0,5
$P\{\overline{X} = p/\theta = 0{,}10\}$	0,2	0,8

6.7 Considere la decisión que enfrenta el dueño de una fábrica para cumplir con la demanda de un producto. La demanda en el i-ésimo día, dada por la variable $X_i (i = 1, 2, \ldots)$, sigue la distribución de Bernoulli con parámetro 1/2. El fabricante basa su análisis en los valores posibles del volumen promedio de producción θ, a saber $\theta = 0$, $\theta = 1$ por día. Las siguientes probabilidades son conocidas:

$$P\{\theta = 0/X = 0\} = 0{,}4, \ \ P\{\theta = 0/X = 1/2\} = 0{,}3$$

y

$$P\{\theta = 0/X = 1\} = 0{,}2$$

El fabricante tiene la opción de alquilar una de dos máquinas, A o B, para elaborar el producto. Cada unidad elaborada en la máquina A le representa a la fábrica una ganancia de 10.000, mientras que hay una pérdida de 3.000 diarios cuando no se elabora en ella unidad alguna. Para la máquina B, las cifras anteriores son 8.500 y 0 respectivamente. Si el fabricante toma una muestra de tamaño dos, encuentre la ganancia máxima que espera obtener el fabricante.

6.5 Uso de la distribución normal

6.8 Compruebe la fórmula (6.8).

6.9 Resuelva el problema planteado en el ejercicio 6.6 cuando el número θ de partes defectuosas producidas por la máquina de tipo 2 sigue la distribución normal con media 36 y varianza 4, y la muestra aleatoria proviene de una población normal con media 35 y varianza 16.

6.10 Resuelva el problema planteado en el ejercicio 6.7 cuando el volumen promedio de producción diaria, θ, sigue la distribución normal con media 0,6 y varianza 1, y la demanda en cualquier día sigue la distribución normal con media 0,5 y varianza 4. Suponga que el dueño de la fábrica observa la demanda del producto durante 20 días.

6.6 Tamaño óptimo de la muestra

6.11 Encuentre el tamaño de la muestra que el propietario del almacén (ejemplo 6.1) debe tomar para maximizar su ganancia esperada. ¿Cuál es esta ganancia?

6.12 Resuelva el problema planteado en el ejemplo 6.5 cuando el precio de venta de cada bombillo es de 12 y el 10 % o el 20 % de los bombillos es defectuoso con probabilidades 0,7 y 0,3 respectivamente.

CAPÍTULO 7

Funciones de decisión y de riesgo

7.1 Introducción

Anteriormente hicimos uso de los diagramas de árbol en el hallazgo de la solución de los problemas de decisión cuando se toma una muestra aleatoria. En este capítulo veremos la forma en que estos problemas se resuelven mediante el empleo de las funciones de decisión y de riesgo. Inicialmente consideraremos todas las reglas de decisión posibles originadas en el muestreo y más adelante, con la ayuda de algunas de ellas, ilustraremos el procedimiento para encontrar la menor pérdida esperada del decisor. El hallazgo de esta pérdida para varios tamaños de la muestra y el costo de estas nos conducirá al establecimiento del tamaño óptimo de la muestra.

7.2 Reglas de decisión

En la selección de las acciones por lo general se recurre a la información pertinente sobre el estado de la naturaleza. Como esta información se puede conseguir mediante un muestreo, la escogencia de las acciones se hace de acuerdo con una función de los puntos muestrales.

Una función d cuyo dominio es el espacio de la muestra que se tome y cuyo rango es el espacio de las acciones recibe el nombre de "regla de decisión". Puesto que varias acciones pueden estar asociadas con cada punto muestral, hay muchas funciones de estos puntos. De aquí que el problema consiste en determinar la función que constituye la regla de decisión óptima.

Indicamos por X la variable aleatoria que representa la información disponible, obtenida a partir de una muestra aleatoria. El decisor debe elegir una regla o estrategia $d[X]$ que señale un procedimiento para tomar decisiones y que le indique la acción que debe adoptar para cada valor posible que pueda tomar X. En esta forma, si la variable X toma el valor x, entonces $a = d[x]$ sería la acción que debe adoptarse.

Para evaluar una función de decisión deben analizarse cuidadosamente sus consecuencias. Dado que la acción a adoptar, a, es una función de la observación de la variable X, el pago asociado con esta acción también depende de la observación de la variable aleatoria $d[X]$.

Ejemplo 7.1. Suponga que el dueño del almacén mencionado en el ejemplo 6.5 toma una muestra de tres bombillos. Con base en el resultado obtenido, adopta una de las acciones, a_1: comprar el lote o a_2: no comprar el lote. Construya la tabla donde se indiquen todas las reglas de decisión posibles y calcule las probabilidades de adoptar las diversas acciones dadas las distintas proporciones de bombillos defectuosos en el lote.

Solución. Hay $2^4 = 16$ formas posibles de asociar las acciones con los resultados del muestreo. El número X de bombillos defectuosos en la muestra tiene, aproximadamente, distribución binomial con parámetros 3 y θ, donde θ es la proporción de bombillos defectuosos en el lote. Podemos construir entonces la tabla 7.1, donde se indican las 16 reglas de decisión posibles y las probabilidades de adoptar las acciones a_1 y a_2 dadas las diversas proporciones de bombillos defectuosos en el lote.

TABLA 7.1. Reglas de decisión del propietario del almacén y las probabilidades condicionales de comprar o no comprar el lote de bombillos.

Resultado	θ		Reglas de decisión					
X	0,1	0,3	$d_1[X]$	$d_2[X]$	$d_3[X]$	$d_4[X]$	$d_5[X]$	$d_6[X]$
0	0,729	0,343	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_1
1	0,243	0,441	a_1	a_1	a_1	a_2	a_1	a_1
2	0,027	0,189	a_1	a_1	a_2	a_1	a_1	a_2
3	0,001	0,027	a_1	a_2	a_1	a_1	a_1	a_2
$P\{a_1/\theta = 0{,}1\}$			1	0,999	0,973	0,757	0,271	0,972
$P\{a_2/\theta = 0{,}1\}$			0	0,001	0,027	0,243	0,729	0,028
$P\{a_1/\theta = 0{,}3\}$			1	0,973	0,811	0,559	0,657	0,784
$P\{a_2/\theta = 0{,}3\}$			0	0,027	0,189	0,441	0,343	0,216

Resultado	θ		Reglas de decisión				
X	0,1	0,3	$d_7[X]$	$d_8[X]$	$d_9[X]$	$d_{10}[X]$	$d_{11}[X]$
0	0,729	0,343	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2
1	0,243	0,441	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
2	0,027	0,189	a_1	a_1	a_2	a_2	a_1
3	0,001	0,027	a_2	a_2	a_1	a_1	a_1
$P\{a_1/\theta = 0{,}1\}$			0,756	0,270	0,730	0,244	0,028
$P\{a_2/\theta = 0{,}1\}$			0,244	0,730	0,270	0,756	0,972
$P\{a_1/\theta = 0{,}3\}$			0,532	0,630	0,370	0,468	0,216
$P\{a_2/\theta = 0{,}3\}$			0,468	0,370	0,630	0,532	0,784

Resultado	θ		Reglas de decisión				
X	0,1	0,2	$d_{12}[X]$	$d_{13}[X]$	$d_{14}[X]$	$d_{15}[X]$	$d_{16}[X]$
0	0,729	0,343	a_2	a_2	a_2	a_1	a_2
1	0,243	0,441	a_2	a_2	a_1	a_2	a_2
2	0,027	0,189	a_2	a_1	a_2	a_2	a_2
3	0,001	0,027	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2
$P\{a_1/\theta = 0{,}1\}$			0,001	0,027	0,243	0,729	0
$P\{a_2/\theta = 0{,}1\}$			0,999	0,973	0,757	0,271	1
$P\{a_1/\theta = 0{,}3\}$			0,027	0,189	0,441	0,343	0
$P\{a_2/\theta = 0{,}3\}$			0,973	0,811	0,559	0,657	1

Con el fin de ilustrar la forma en que se han calculado las probabilidades condicionales de adoptar las diversas acciones, consideramos los casos siguientes:

La probabilidad de comprar el lote cuando la proporción de bombillos defectuosos es del 10 % y se sigue la regla $d_2[X]$ es representada por

$$P\{a_1/\theta = 0{,}1\} = P\{X \leq 2/\theta = 0{,}1\} = 0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 = 0{,}999$$

La probabilidad de no comprar el lote cuando la proporción de bombillos defectuosos es del 30 % y se sigue la regla $d_7[X]$ es indicada por

$$P\{a_2/\theta = 0{,}3\} = P\{X = 1 \text{ o } 3/\theta = 0{,}3\} = 0{,}441 + 0{,}027 = 0{,}468 \quad \square$$

Ejemplo 7.2. Suponga que el propietario del almacén mencionado en el ejemplo 5.5 inspecciona la muestra de tamaño dos y, con base en el número de artículos defectuosos encontrados en ella, escoge la alternativa a_1: aceptar el lote sin inspección total o la alternativa a_2: inspeccionar todos los artículos del lote. Construya la tabla donde se indiquen todas las reglas de decisión posibles y calcule las probabilidades de adoptar las diversas acciones dadas las distintas proporciones de bombillos defectuosos en el lote.

Solución. Hay $2^3 = 8$ formas posibles de asociar las acciones con los resultados del muestreo. El número X de artículos defectuosos en la muestra tiene aproximadamente distribución binomial con parámetros 2 y θ, donde θ es la proporción de artículos defectuosos en el lote. En la tabla 7.2 se indican todas las reglas de decisión y las probabilidades de seguir las alternativas a_1 y a_2, dadas las proporciones de artículos defectuosos en el lote; estas probabilidades se calculan en la misma forma como se hizo en el ejemplo 7.1. $\square$

TABLA 7.2. Reglas de decisión del propietario del almacén y las probabilidades condicionales de seguir las alternativas a_1 y a_2.

Resultado	θ		Reglas de decisión							
X	0,1	0,2	$d_1[X]$	$d_2[X]$	$d_3[X]$	$d_4[X]$	$d_5[X]$	$d_6[X]$	$d_7[X]$	$d_8[X]$
0	0,81	0,64	a_1	a_1	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2	a_2
1	0,18	0,32	a_1	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2
2	0,01	0,04	a_1	a_2	a_1	a_1	a_2	a_2	a_1	a_2
$P\{a_1/\theta = 0{,}1\}$			1	0,99	0,82	0,19	0,81	0,18	0,01	0
$P\{a_2/\theta = 0{,}1\}$			0	0,01	0,18	0,81	0,19	0,82	0,99	1
$P\{a_1/\theta = 0{,}2\}$			1	0,96	0,68	0,36	0,64	0,32	0,04	0
$P\{a_2/\theta = 0{,}2\}$			0	0,04	0,32	0,64	0,36	0,68	0,96	1

7.3 Punto de equilibrio

La mayor utilidad del punto de equilibrio se presenta cuando el decisor tiene a su disposición solo dos acciones; por esta razón, limitaremos nuestra atención a este caso.

Supongamos que $l(a_j, \theta)$ representa el pago del decisor cuando adopta la acción $a_j(j = 1, 2)$ y el estado de la naturaleza es θ. Un "punto de equilibrio" p para las acciones a_1 y a_2 se define entonces como un valor θ para el cual

$$l(a_1, p) = l(a_2, p);$$

en otras palabras, un punto de equilibrio es un estado de la naturaleza que da lugar al mismo pago, cualquiera que sea la acción que se adopte. Las probabilidades de adoptar una acción equivocada se conocen con el nombre de "probabilidades de error" y las probabilidades de adoptar una acción correcta reciben el nombre de "probabilidades de acierto".

Ejemplo 7.3. Para el dueño del almacén mencionado en el ejemplo 7.1 halle el punto de equilibrio y las probabilidades de error y de acierto.

Solución. Teniendo en cuenta que el dueño del almacén gana 2 por bombillo en buen estado o pierde 9 por bombillo defectuoso, el punto de equilibrio p se obtiene hallando el porcentaje de bombillos defectuosos, de manera que la ganancia esperada sea cero; en otras palabras,

$$50(-9)p + 50(2)(1 - p) = 0$$

De esta manera, si el porcentaje de bombillos defectuosos es inferior al 18,18 %, el dueño del almacén debe comprar el lote. Así, $P\{a_2/\theta = 0{,}1\}$ y $P\{a_1/\theta = 0{,}3\}$ son las probabilidades de error; mientras que $P\{a_1/\theta = 0{,}1\}$ y $P\{a_2/\theta = 0{,}3\}$ son las probabilidades de acierto. □

Ejemplo 7.4. Para el propietario del almacén mencionado en el ejemplo 7.1 halle el punto de equilibrio y las probabilidades de error y de acierto.

Solución. El punto de equilibrio p, para el propietario del almacén, lo obtenemos hallando el porcentaje de artículos defectuosos en el lote, de manera que la ganancia esperada sea 800; esto es:

$$12(100)(1 - p) - 18(100p) = 800$$

De esta manera, solo si el porcentaje de artículos defectuosos es inferior al 13,33 %, el propietario del almacén debe aceptar el lote sin inspección total. Así, $P\{a_1/\theta = 0{,}1\}$ y $P\{a_2/\theta = 0{,}2\}$ son las probabilidades de acierto; mientras que $P\{a_2/\theta = 0{,}1\}$ y $P\{a_1/\theta = 0{,}2\}$ son las probabilidades de error. □

7.4 Función de riesgo

Para toda regla de decisión posible puede evaluarse el riesgo o pérdida esperada del decisor. Esto requerirá del conocimiento de la distribución de probabilidad del estado de la naturaleza y de la tabla de las pérdidas de oportunidad.

Como la acción a adoptar es una función de la variable X que representa la información muestral, una medida apropiada de las consecuencias de adoptar la acción $d_j[x]$, cuando el estado de la naturaleza es θ_i, está dada por el valor esperado de la pérdida. Esta cantidad, conocida como "función de riesgo", se indica por $R(d_j, \theta_i)$; esto es

$$R(d_j, \theta_i) = E_X[l_p(d_j[X]/\theta_i)]$$

donde E_X indica que en el hallazgo del valor esperado se considera a X como la única variable aleatoria. Puesto que la pérdida de oportunidad es cero cuando se adopta la acción correcta, en el cálculo del riesgo solamente es necesario hallar las probabilidades de error.

Dada la función de riesgo para cada regla de decisión, podemos usar las probabilidades a priori para seleccionar la regla de decisión, que dé lugar al menor de los riesgos esperados con respecto al estado de la naturaleza. Esta regla se conoce como la "regla de decisión óptima" y viene dada por el menor valor de

$$B(d_j) = E_\theta[R(d_j, \theta)]$$

Ejemplo 7.5. Para cada una de las reglas de decisión del dueño del almacén (ejemplos 7.1 y 7.3) indique en una tabla las pérdidas esperadas y el riesgo esperado.

Solución. Las pérdidas de oportunidad para el dueño del almacén, por adoptar las acciones a_1 y a_2, se dan en la tabla 7.3.

TABLA 7.3. Pérdidas de oportunidad para el dueño del almacén.

	Acciones	
θ	a_1	a_2
0,1	$l_p(a_1/\theta = 0{,}1) = 0$	$l_p(a_2/\theta = 0{,}1) = 45$
0,3	$l_p(a_1/\theta = 0{,}3) = 65$	$l_p(a_2/\theta = 0{,}3) = 0$

En la tabla 7.3 vemos que, para cada una de las reglas de decisión d_j, las pérdidas esperadas, dados los diversos estados de la naturaleza, están dadas por

$$R(d_j; 0{,}1) = 45P\{a_2/\theta = 0{,}1; d_j[X]\},\ j = 1, 2, \ldots, 16$$

y

$$R(d_j; 0{,}3) = 65P\{a_1/\theta = 0{,}3; d_j[X]\},\ j = 1, 2, \ldots, 16$$

donde las probabilidades $P\{a_2/\theta = 0{,}1; d_j[X]\}$ y $P\{a_1/\theta = 0{,}3; d_j[X]\}$ son tomadas de la tabla 7.1.

Teniendo en cuenta que el 10 % de bombillos defectuosos se presenta en el 80 % de los casos, para cada regla de decisión d_j, el riesgo esperado viene dado por

$$R(d_j) = 0{,}8R(d_j; 0{,}1) + 0{,}2R(d_j; 0{,}3),\ j = 1, 2, \ldots, 16$$

En la tabla 7.4 se indican las pérdidas esperadas y el riesgo esperado para cada una de las reglas de decisión.

Tabla 7.4. Pérdidas esperadas y riesgo esperado para cada regla de decisión del dueño del almacén.

d_j	$R(d_j; 0{,}1)$	$R(d_j; 0{,}3)$	$B(d_j)$
d_1	0	65,000	13,000
d_2	0,045	63,245	12,685
d_3	1,215	52,715	11,515
d_4	10,935	36,335	16,015
d_5	32,805	42,705	34,785
d_6	1,260	50,960	11,200
d_7	10,980	34,580	15,700
d_8	32,850	40,950	34,470
d_9	12,150	24,050	14,530
d_{10}	34,020	30,420	33,300
d_{11}	43,740	14,040	37,800
d_{12}	44,955	1,755	36,315
d_{13}	43,785	12,285	37,485
d_{14}	34,065	28,665	32,985
d_{15}	12,195	22,295	14,215
d_{16}	45,000	0	36,000

En la tabla 7.4 vemos que la regla de decisión d_6 tiene el menor riesgo esperado. Puesto que esta regla se define como

$$d_6[0] = d_6[1] = a_2$$

y

$$d_6[2] = d_6[3] = a_2$$

concluimos que el dueño del almacén debería aceptar el lote de bombillos cuando, en la muestra de tres bombillos, máximo uno es defectuoso.

En el ejemplo 6.5 vimos que, sin tener en cuenta el valor del muestreo, la ganancia esperada del dueño del almacén es 24,80, razón por la cual pagaría hasta 1,80 por la información muestral. También observamos que pagaría hasta 13,00 por una información 100 % confiable. □

Ejemplo 7.6. Para cada una de las reglas de decisión del dueño del almacén (ejemplos 7.2 y 7.4) indique en una tabla las pérdidas esperadas y el riesgo esperado.

Solución. Las pérdidas de oportunidad para el propietario del almacén por seguir las alternativas a_1 y a_2 aparecen en la tabla 7.5.

TABLA 7.5. Pérdidas de oportunidad para el propietario del almacén.

		Alternativas	
θ	Probabilidad	a_1	a_2
0,10	0,7	0	100
0,20	0,3	200	0

En la tabla 7.6 se indican las pérdidas esperadas y el riesgo esperado para cada una de las reglas de decisión.

En la tabla 7.6 observamos que la regla de decisión d_5 tiene el menor riesgo esperado. Puesto que

$$d_5[0] = a_1$$

y

$$d_5[1] = d_5[2] = a_2$$

concluimos que cuando se hace el muestreo la regla de decisión óptima consiste en seguir la alternativa a_1 si no hay artículos defectuosos en la muestra y la alternativa a_2 si hay al menos un artículo defectuoso.

TABLA 7.6. Pérdidas esperadas y riesgo esperado para cada regla de decisión del propietario del almacén.

d_j	$R(d_j;0{,}1)$	$R(d_j;0{,}2)$	$B(d_j)$
d_1	0	200	60,0
d_2	1	192	58,3
d_3	18	136	53,4
d_4	81	72	78,3
d_5	19	128	51,7
d_6	82	64	76,6
d_7	99	8	71,7
d_8	100	0	70,0

En el ejemplo 5.5 vimos que, al hacer el muestreo, la ganancia esperada del propietario del almacén es 812,27 y que este pagaría hasta 10,27 por la información muestral y hasta 60 por la información 100 % confiable. □

7.5 Reglas de decisión admisibles

Teniendo en cuenta que en un problema el número de reglas de decisión puede ser elevado, es conveniente reducir el número de estas sin que ello altere la conclusión a que deba llegar el decisor. Esta reducción se hace comparando los riesgos asociados a cada una de las reglas de decisión y prefiriendo naturalmente las reglas que tengan un riesgo menor, para todos los estados de la naturaleza.

Supongamos que, en un problema, un decisor que dispone de n acciones: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y de m estados de la naturaleza: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, toma una muestra de tamaño r. Vemos entonces que hay n^{r+1} reglas de decisión de las cuales algunas son innecesarias. Para identificar estas reglas innecesarias, llamadas “inadmisibles”, asociamos a toda regla de decisión $d_j(j = 1, 2, \ldots, n^{r+1})$ un vector

$$\mathfrak{R}_j = (R(d_j, \theta_1), \ldots, R(d_j, \theta_m))$$

donde la componente $R(d_j, \theta_1 i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, señala la pérdida esperada del decisor cuando este sigue la regla d_j y el estado de la naturaleza es θ_i.

Una regla de decisión d_k recibe el nombre de "inadmisible" cuando es dominada por otra regla de decisión; en otras palabras, cuando existe una regla de decisión $d_i (i \neq k)$, tal que

$$\mathfrak{R}_i \leq \mathfrak{R}_k$$

donde $\mathfrak{R}_i$ y $\mathfrak{R}_k$ son los vectores de los riesgos, asociados a las reglas d_i y d_k.

Generalizando, afirmamos que la regla de decisión d_k es inadmisible cuando, dadas dos reglas de decisión d_i y $d_j (i, j \neq k)$, existe un número real λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, tal que

$$(1 - \lambda)\mathfrak{R}_i + \lambda \mathfrak{R}_j \leq \mathfrak{R}_k;$$

esto es, la regla d_k es inadmisible cuando es dominada por una regla de decisión, asociada a la combinación convexa de los vectores de los riesgos $\mathfrak{R}_i$ y $\mathfrak{R}_j$.

La identificación de las reglas de decisión inadmisibles es importante para el decisor porque, al descartarlas, llega más rápido a la solución del problema que enfrenta.

Ejemplo 7.7. Establezca las reglas de decisión admisibles y los valores críticos asociados a estas para el vendedor de bombillos mencionado en el ejemplo 7.1.

Solución. Observamos que

$$\mathfrak{R}_4 = (10,935; 36,335) < \mathfrak{R}_5 = (32{,}805; 42{,}705)$$

También vemos que $\mathfrak{R}_4 < \mathfrak{R}_8$, $\mathfrak{R}_7 < \mathfrak{R}_8$, $\mathfrak{R}_9 < \mathfrak{R}_{10}$, $\mathfrak{R}_9 < \mathfrak{R}_{14}$ y $\mathfrak{R}_{15} < \mathfrak{R}_{14}$, concluyendo entonces que las reglas d_5, d_8, d_{10} y d_{14} son inadmisibles.

Por otra parte, observamos que la desigualdad

$$(1 - \lambda)\mathfrak{R}_2 + \lambda \mathfrak{R}_6 < \mathfrak{R}_3$$

se cumple cuando $0,858 \leq \lambda \leq 0,962$. Además tenemos que

$$(1 - \lambda)\mathfrak{R}_6 + \lambda \mathfrak{R}_{15} < \begin{cases} \mathfrak{R}_4 & \text{cuando } 0{,}511 \leq \lambda \leq 0{,}884 \\ \mathfrak{R}_7 & \text{cuando } 0{,}572 \leq \lambda \leq 0{,}888 \\ \mathfrak{R}_9 & \text{cuando } 0{,}939 \leq \lambda \leq 0{,}995 \end{cases}$$

y

$$(1-\lambda)\mathfrak{R}_{15}+\lambda\mathfrak{R}_{16}<\begin{cases}\mathfrak{R}_{11} & \text{cuando } 0{,}371\leq\lambda\leq 0{,}961\\ \mathfrak{R}_{12} & \text{cuando } 0{,}922\leq\lambda\leq 0{,}998\\ \mathfrak{R}_{13} & \text{cuando } 0{,}449\leq\lambda\leq 0{,}962\end{cases}$$

Vemos entonces que las reglas de decisión d_3, d_4, d_7, d_9, d_{11}, d_{12} y d_{13} son inadmisibles. Entonces, el problema del vendedor de bombillos se hubiera podido tratar solamente con las reglas de decisión admisibles, d_1, d_2, d_6, d_{15} y d_{16}. Estas reglas también pueden ser identificadas desde un comienzo, analizando detenidamente todas las reglas de decisión. Como ilustración observamos la regla de decisión $d_3[X]$ en la tabla 7.1. Allí vemos que el dueño del almacén no compra el lote si hay dos bombillos defectuosos en la muestra, pero lo compra si encuentra tres bombillos defectuosos. Esta característica de la regla $d_3[X]$ hace que ella sea inadmisible para el dueño del almacén. Siguiendo un raciocinio similar establecemos las otras reglas de decisión inadmisibles.

En cuanto al valor crítico se refiere, en este caso indica el número de bombillos defectuosos en la muestra, a partir del cual el dueño del almacén adopta la acción a_2: no comprar el lote. De esta manera, a las reglas de decisión admisibles, d_{16}, d_{15}, d_6, d_2 y d_1, les corresponden los valores críticos 0, 1, 2, 3 y 4 respectivamente; el valor 0 indica que, según la regla d_{16}, el lote se rechaza y el valor 4 indica que, según d_1, el lote se acepta; en ambos casos no se tiene en cuenta el resultado del muestreo. □

7.6 Tamaño óptimo de la muestra

En el capítulo anterior vimos la forma en que un decisor establece el tamaño ideal de la muestra, mediante el hallazgo de su ganancia esperada máxima o de su costo esperado mínimo, incluyendo en ambos casos el valor del muestreo. Ahora vemos el procedimiento que sigue el decisor para hallar el tamaño ideal de la muestra, mediante la minimización de su pérdida total esperada de oportunidad.

Supondremos que se toma una muestra de tamaño n y que c^* es el valor crítico asociado a la regla de decisión óptima d^* que corresponde a esta muestra. Cuando se involucran los costos del muestreo, primero hallamos la regla de decisión d^* y la pérdida esperada mínima, $B(d^*)$, para cada valor de n; luego, a cada valor de $B(d^*)$, debemos agregar el costo del muestreo. El tamaño n de la muestra que tiene la pérdida total más pequeña es el tamaño óptimo de la muestra.

Ejemplo 7.8. Mediante la minimización de la pérdida total esperada de oportunidad, encuentre el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el dueño del almacén (ejemplo 7.5) con el fin de maximizar su ganancia esperada.

Solución. En la tabla 7.4 vemos que la pérdida esperada mínima es $B(d^*) = 11,20$ que corresponde a la regla de decisión d_6, cuyo valor crítico es $c^* = 2$. Como el costo del muestreo es 0,90, la pérdida total esperada mínima para el dueño del almacén es 12,10 cuando toma una muestra de tres bombillos.

Utilizando el árbol de decisión, donde los pagos representan pérdidas de oportunidad, encontraremos ahora la pérdida esperada total mínima del dueño del almacén cuando toma una muestra de dos bombillos.

En la figura 7.1 se indica el árbol de decisión para el dueño del almacén, junto con las probabilidades que aparecen en el árbol de la figura 6.3 y las pérdidas de oportunidad de este señaladas en la tabla 7.3. Realizando la inducción hacia atrás encontramos que el valor crítico asociado a la muestra es $c^* = 2$ y la pérdida esperada de oportunidad mínima para el dueño del almacén es 12,19. Teniendo en cuenta el costo del muestreo, concluimos que 12,79 es la pérdida esperada total mínima para este decisor cuando toma una muestra de dos bombillos.

Empleando a continuación las matrices estocásticas, en la forma en que se hizo en el ejemplo 6.5, hallaremos la pérdida total esperada mínima del dueño del almacén cuando toma una muestra de cuatro bombillos. El procedimiento que se sigue es el mismo que vimos allí, hasta encontrar la matriz P^*. Luego se encuentra la matriz del producto P^*A_p, donde A_p es la matriz de pérdidas de oportunidad del dueño del almacén. Posteriormente se construye el vector columna Y donde ahora sus componentes son los valores mínimos por filas de la matriz P^*A_p. La pérdida esperada de oportunidad mínima está dada por el producto escalar Y^tW donde W, como en el ejemplo 6.5, es un vector cuyas componentes constituyen la distribución de probabilidad del número X de bombillos defectuosos en la muestra.

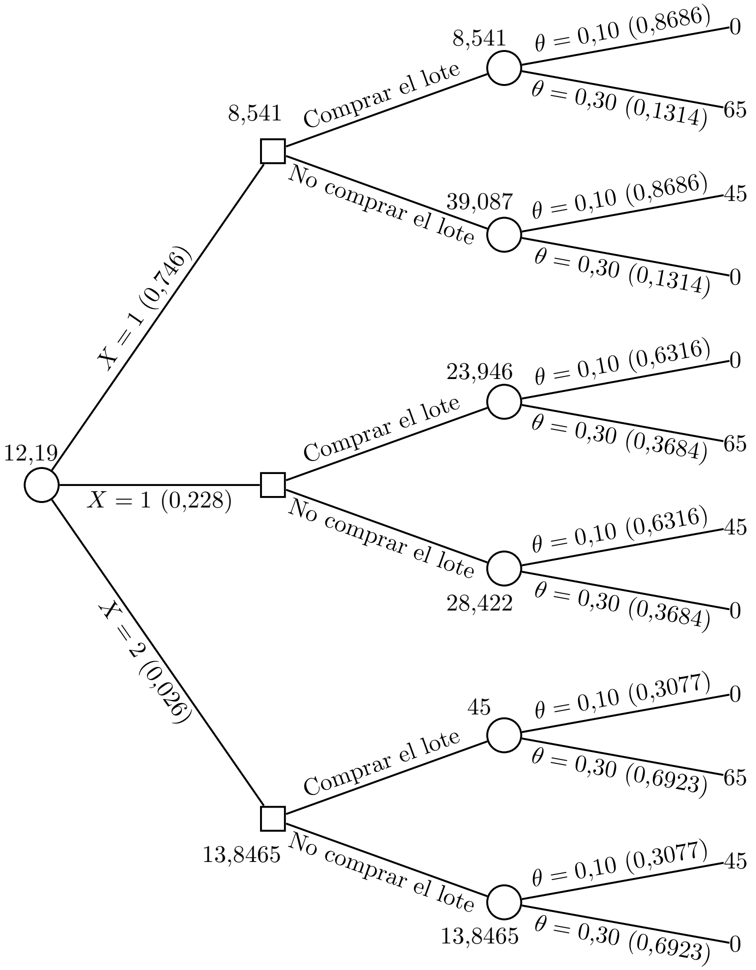

FIGURA 7.1. Diagrama del árbol de decisión del dueño del almacén cuando toma una muestra de tamaño dos y los pagos son pérdidas de oportunidad.

La matriz P de las probabilidades condicionales de X, dada la proporción θ de bombillos defectuosos en el lote y la matriz diagonal Q de la función de frecuencia de θ, viene a ser

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}6561 & 0{,}2916 & 0{,}0486 & 0{,}0036 & 0{,}0001 \\ 0{,}2401 & 0{,}4116 & 0{,}2646 & 0{,}0756 & 0{,}0081 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Ahora, de la fórmula (5.9) obtenemos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}52488 & 0{,}04802 \\ 0{,}23328 & 0{,}08232 \\ 0{,}03888 & 0{,}05292 \\ 0{,}00288 & 0{,}01512 \\ 0{,}00008 & 0{,}00162 \end{bmatrix}$$

Entonces, el vector W de la función de frecuencia de X y la matriz P^* de las probabilidades condicionales de θ dados los valores de X, son

$$W = \begin{bmatrix} 0{,}5729 & 0{,}3156 & 0{,}0918 & 0{,}0180 & 0{,}0017 \end{bmatrix}$$

y

$$P^* = \begin{bmatrix} 0{,}9162 & 0{,}0838 \\ 0{,}7392 & 0{,}2608 \\ 0{,}4235 & 0{,}5765 \\ 0{,}1600 & 0{,}8400 \\ 0{,}0471 & 0{,}9529 \end{bmatrix}$$

La matriz A_p de las pérdidas de oportunidad del dueño del almacén es

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 45 \\ 65 & 0 \end{bmatrix}$$

Además,

$$P^*A_p = \begin{bmatrix} 5{,}4470 & 41{,}2290 \\ 16{,}9520 & 33{,}2640 \\ 37{,}4725 & 19{,}0575 \\ 54{,}6000 & 7{,}2000 \\ 61{,}9385 & 2{,}1195 \end{bmatrix}$$

Así, el vector de los valores mínimos por filas de la matriz P^*A_p es

$$Y = \begin{bmatrix} 5{,}4470 & 16{,}952 & 19{,}0575 & 7{,}2000 & 2{,}1195 \end{bmatrix}$$

y, por consiguiente, la pérdida esperada de oportunidad mínima para el dueño del almacén es $Y^tW = 10,35$. Al construir el vector Y se pudo ver que el valor crítico asociado a la muestra es $c^* = 2$, y puesto que el costo del muestreo es 1,20 concluimos que 11,55 es la pérdida esperada total mínima para el dueño del almacén cuando toma una muestra de cuatro bombillos.

TABLA 7.7. Información para establecer el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el dueño del almacén.

Tamaño de la muestra n	Valor crítico c^*	Riesgo mínimo $B(d^*)$	Costo de la muestra $0{,}30n$	Riesgo total mínimo $B(d^*) + 0{,}30n$
0	0	13,00	0	13,00
1	1	12,70	0,30	13,00
2	2	12,19	0,60	12,79
3	2	11,20	0,90	12,10
4	2	10,35	1,20	11,55
5	2	9,80	1,50	11,30
6	2	9,58	1,80	11,38
7	3	9,34	2,10	11,44

En la tabla 7.7 se sitúa la información obtenida anteriormente junto con la que proviene del hallazgo de las pérdidas esperadas totales mínimas para otros tamaños de la muestra. Es de notar que en la tabla se colocan tantas entradas como sean necesarias para que el dueño del almacén establezca el tamaño óptimo de la muestra. En esta tabla notamos que la pérdida total esperada disminuye hasta $n = 5$ y luego empieza a incrementarse; por lo tanto, la pérdida esperada total es mínima cuando el tamaño de la muestra es 5. De aquí que la mejor decisión para el dueño del almacén es tomar una muestra de tamaño 5 y comprar el lote si el número de bombillos defectuosos en la muestra es menor de dos; en caso contrario, sería aconsejable que no comprara el lote. □

Ejercicios

7.2 Reglas de decisión

7.1 Un vendedor tiene la oportunidad de comprar un lote de 100 sandías. La experiencia previa revela que la proporción θ de sandías verdes o muy maduras tiene la función de frecuencia:

$$P\{\theta = 0{,}10\} = 0{,}6,\ P\{\theta = 0{,}15\} = 0{,}3 \ y \ P\{\theta = 0{,}20\} = 0{,}1$$

Sin costo alguno, al vendedor se le permite tomar una muestra de tamaño dos. Construya la tabla en que se indiquen todas las reglas de decisión posibles y calcule las probabilidades de adoptar las diversas acciones, dadas las distintas proporciones de sandías verdes o muy maduras en el lote.

7.2 El rector de una universidad con 15.000 estudiantes gestiona con el representante de un grupo teatral la presentación de este en la universidad. Asuma que la admisión será permitida solo a los estudiantes de esta universidad. Antes de que el rector adopte una decisión, examina los registros anteriores sobre los ingresos a espectáculos similares en la universidad y halla que la función de frecuencia de la proporción de estudiantes que atienden eventos similares es:

$$P\{\theta = 0{,}10\} = 0{,}6 \ y \ P\{\theta = 0{,}20\} = 0{,}4$$

Suponga que se escogen al azar tres estudiantes con el fin de saber si ellos asistirán a la presentación teatral. Construya una tabla donde se indiquen todas las reglas de decisión posibles y calcule las probabilidades de adoptar las diversas acciones, dadas las distintas proporciones de estudiantes que atienden eventos similares.

7.3 En el ejercicio 2.15 suponga que, antes de determinar qué máquina alquila, el gerente de la compañía A ordena elaborar dos partes. Construya una tabla en la cual se indiquen todas las reglas de decisión posibles y calcule las probabilidades de que el gerente de la compañía A alquile los diversos tipos de máquinas, dadas las distintas proporciones de artículos defectuosos.

7.3 Punto de equilibrio

a) Suponga que el vendedor mencionado en el ejercicio 7.1 obtiene una ganancia de 10 por sandía vendida y una pérdida de 20 por sandía verde o muy madura.

a) Halle el punto de equilibrio.

b) Para cada regla d_i y para cada proporción θ, señale la acción que el vendedor debe escoger y la probabilidad de error en cada caso.

7.5 Suponga que la presentación del grupo teatral (ejercicio 7.2) tiene un costo de 360.000 y el valor de cada boleto de ingreso es de 200.

a) Halle el punto de equilibrio.

b) Para cada regla d_i y para cada proporción θ, señale la acción que el rector debe escoger y la probabilidad de error en cada caso.

7.6 Para cada regla d_i y para cada porcentaje de partes defectuosas, θ (ejercicio 7.3), señale el tipo de maquinaria que el gerente de la compañía A debe escoger y la probabilidad de error en cada caso.

7.7 En el ejemplo 2.2 suponga que la empresa transportadora solo puede ordenar los repuestos en lotes de 3 o 6 unidades. Encuentre el punto de equilibrio.

7.4 Función de riesgo

7.8 Para el vendedor mencionado en los ejercicios 7.1 y 7.4, encuentre los riesgos asociados a cada una de las reglas de decisión y la regla de decisión óptima.

7.9 Para el rector universitario mencionado en los ejercicios 7.2 y 7.5, encuentre los riesgos asociados a cada una de las reglas de decisión y la regla de decisión óptima.

7.10 Para el gerente de la compañía A (ejercicios 7.3 y 7.6), encuentre la regla de decisión óptima.

7.11 Suponga que se escogen al azar 7 estudiantes (ejercicio 7.2), y que el grupo teatral es contratado siempre y cuando al menos 5 estén interesados en asistir a la presentación. Encuentre las diversas pérdidas esperadas provenientes de la decisión anterior.

7.12 Suponga que el fabricante mencionado en el ejemplo 2.2 había elaborado un tipo similar de motor, para una versión anterior del avión en consideración. Para este tipo de motor, la orden fue la misma, al igual que la vida útil. El motor para la orden actual será producido en la misma planta, como el modelo previo, pero la empresa transportadora no conoce cuál de las dos plantas es la escogida. La empresa tiene acceso a los datos sobre el número de repuestos actualmente requeridos para la versión antigua. Halle las pérdidas esperadas $R(d, 4)$ y $R(d, 8)$ cuando d es la regla de decisión siguiente: si el número de motores de repuesto requeridos para la versión anterior fuera 7 o más, ordenar 9 motores de repuesto para el nuevo avión; en caso contrario, ordenar 6 repuestos.

7.13 Halle la ganancia máxima que esperan obtener la universidad y el vendedor mencionados en los ejercicios 7.8 y 7.9.

7.5 Reglas de decisión admisibles

7.14 Establezca las reglas de decisión inadmisibles para el vendedor mencionado en el ejemplo 7.2.

7.15 Encuentre los valores críticos asociados a las reglas de decisión admisibles para el vendedor mencionado en el ejemplo 7.2.

7.16 Para el gerente de la compañía A, mencionado en los ejercicios 7.3, 7.6 y 7.10, establezca las reglas de decisión inadmisibles.

7.17 Para el rector universitario mencionado en los ejercicios anteriores, establezca las reglas de decisión inadmisibles.

7.6 Tamaño óptimo de la muestra

7.18 Para el rector universitario (ejercicio 7.9), señale el valor crítico asociado a la regla de decisión óptima.

7.19 Halle el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el vendedor de sandías cuando el examen de cada sandía tiene un costo de 5.

7.20 Halle el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el gerente de la compañía A cuando la elaboración de cada parte le representa un costo de 10.

7.21 Un vendedor tiene la oportunidad de comprar lotes de 40 lámparas. Se sabe que en cada lote se encuentran 8 lámparas defectuosas en el 70 % de las inspecciones que se hagan y se encuentran todas las lámparas aceptables en el 30 % restante de las inspecciones. El vendedor compra las lámparas a un costo unitario de 60 y gana 10 por lámpara en buen estado o pierde 60 por lámpara defectuosa. Con el fin de decidir si comprar o no un lote, saca una muestra a un costo de 2 por unidad examinada. Halle el tamaño óptimo de la muestra que debe tomar el vendedor.

CAPÍTULO 8

Teoría de la utilidad

8.1 Introducción

Anteriormente vimos varios procedimientos y criterios que ayudan a tomar una decisión ante la presencia de la incertidumbre. Teniendo en cuenta que no todos los resultados tienen un pago numérico obvio, se emplea una técnica nueva conocida como teoría de la utilidad, la cual está diseñada para tener en cuenta no solo la experiencia del decisor sino también sus preferencias. Con el propósito de desarrollar esta teoría, trataremos con la función de utilidad, sus características y la forma en que se construye. También trataremos con el punto de equilibrio que sirve, como vimos en el capítulo anterior, para que el decisor seleccione entre dos acciones la que más le convenga de acuerdo con la función de utilidad que ha construido.

8.2 Función de utilidad

Aun cuando los resultados numéricos pueden ser determinados en forma natural, hemos notado que no es realista seleccionar la acción con el pago esperado óptimo. En algunos casos, una acción muy riesgosa va mejor bajo la regla de decisión de Bayes, que una obviamente preferida. Esta dificultad no es culpa del criterio de Bayes, sino que es causada por los valores de los pagos, que no reflejan la verdadera importancia que tienen para el decisor.

Ahora ampliaremos el alcance de la teoría de la decisión, mediante la introducción de una nueva medida de pago, que clasifique todos los resultados posibles, de acuerdo con las metas del decisor. Esta medida de pago, conocida con el nombre de "función de utilidad", puede ser usada para medir perspectivas o resultados en tal forma que la escogencia de las acciones sea relativamente fácil. El dominio de esta función, indicada por U, es el conjunto de las perspectivas o de los resultados, por lo general monetarios, y el rango está formado por números reales; esto es, a cada perspectiva o resultado x le corresponde un número real $U(x)$, llamado la utilidad de la perspectiva o del resultado x. Debe señalarse que decisiones diferentes pueden tener apreciaciones diferentes y, por lo tanto, podrán tener funciones de utilidad diferentes; en otras palabras, para cualquier decisor existe una función de utilidad, definida sobre las perspectivas de interés.

Ejemplo 8.1. Al propietario de una casa se le ofreció un seguro contra incendio por una prima anual de 200. Si hay fuego, lo cual ocurre con probabilidad 0,002, la casa y todo lo que contiene, valorado por 80.000, será destruido totalmente; el daño parcial es imposible. La compañía de seguros cancela totalmente las pérdidas ocasionadas por el fuego y 80.000 es todo el patrimonio que posee este propietario, el cual valora el cambio en su patrimonio de acuerdo con la función de utilidad (otro decisor puede escoger una función de utilidad distinta),

$$U(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

donde x indica el patrimonio que resulta de la decisión que adopte el propietario. ¿Debe el propietario comprar la póliza del seguro?

Solución. La tabla 8.1 muestra los pagos del propietario de la casa. Como puede apreciarse, la regla de decisión de Bayes indica que es óptimo no comprar el seguro. Aun así, la mayoría de personas que se enfrentan con esta decisión escogen la compra del seguro porque con el pago de una prima anual compran un sentimiento de seguridad. Además, las primas del seguro son colocadas a un precio mayor que el costo esperado de los reclamos potenciales, debido a que la compañía de seguros tiene gastos y busca obtener ganancias.

TABLA 8.1. Pérdidas para el propietario de la casa.

		Acciones	
Eventos	Probabilidad	Comprar la póliza	No comprar la póliza
Incendio	0,002	200	80.000
No incendio	0,998	200	0
Pagos esperados:		200	160

Ahora, empleando la función de utilidad, transformamos la tabla de pérdidas (8.1) en una tabla de utilidades (tabla 8.2).

TABLA 8.2. Utilidades para el propietario de la casa.

		Acciones	
Eventos	Probabilidad	Comprar la póliza	No comprar la póliza
Incendio	0,002	282,49	0
No incendio	0,998	282,49	282,84
Pagos esperados:		282,49	282,27

De acuerdo con la tabla 8.2, las utilidades esperadas son 282,49 por la compra del seguro y 282,27 por no comprar el seguro. Puesto que la compra del seguro tiene la utilidad mayor, debe ser preferida; así, la regla de decisión de Bayes indica que ella es la escogencia óptima.

Con utilidades como pagos, el criterio de Bayes no siempre conduce a la decisión de comprar el seguro. La escogencia depende de la relación entre la posibilidad de incendio y el precio de la póliza del seguro. Por ejemplo, si el precio de la póliza es elevado a 400, la utilidad por la compra del seguro es $U(79.600) = 282{,}13$ y la utilidad esperada por la compra del seguro es 282,13. De esta manera, si la probabilidad de incendio sigue siendo la misma que antes, la acción de no comprar el seguro es la preferida porque este llega a ser muy costoso para ser atractivo. □

8.3 Anotaciones sobre la función de utilidad

Con el propósito de analizar la toma de decisiones, se requiere que el decisor estime numéricamente sus preferencias entre los resultados que está considerando. Las funciones de utilidad sirven en este caso para que el decisor señale sus preferencias de acuerdo con la clasificación que haga de los resultados o de las perspectivas que enfrenta.

Un decisor que enfrenta dos resultados, a saber, x_1 y x_2, podría preferir x_1, inclinarse igualmente por ambos o preferir x_2. Entonces, en términos de la función de utilidad, estas preferencias se representan por las relaciones $U(x_1) > U(x_2)$, $U(x_1) = U(x_2)$ y $U(x_1) < U(x_2)$, respectivamente.

Supongamos ahora que el decisor enfrenta tres resultados, x_1, x_2 y x_3. Si considera que x_1 es por lo menos tan bueno como x_2, $U((x_1) \geq (x_2))$ y que x_2 es por lo menos tan bueno como x_3, $U((x_2) \geq (x_3))$, entonces debe considerar que x1 es por lo menos tan bueno como x_3, $U((x_1) \geq (x_3))$.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los n resultados que enfrenta un decisor. El resultado x que conduce a x_1 con probabilidad p_1, a x_2 con probabilidad $p_2, \ldots$, a x_n con probabilidad p_n $(p_1+p_2+\cdots+p_n = 1)$, recibe el nombre de "combinación de $x_1, x_2, \ldots, x_n$" y escribimos

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i) \tag{8.1}$$

En este caso, x es una observación de un resultado aleatorio X con utilidad aleatoria $U(X)$. Aquí los valores posibles del resultado aleatorio X son los resultados observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y los valores correspondientes de la utilidad aleatoria $U(X)$ son las utilidades observadas $U(X_1), U(X_2), \ldots, U(X_n)$. Entonces

$$U(x) = E[U(X)] \tag{8.2}$$

Cuando el decisor prefiere un resultado x_i a un resultado $x_j (j \neq i)$, es razonable suponer que él prefiera la combinación x de estos resultados que dé una mayor probabilidad a x_i que a x_j.

Finalmente, observamos que una vez el decisor ha establecido su función de utilidad, ella puede ser usada para comparar dos resultados económicos aleatorios, X_1 y X_2. Él podrá expresar alguna preferencia por una de las distribuciones de los resultados o indiferencia entre ellas. Las preferencias deben satisfacer ciertos requerimientos de consistencia. Si es así, la función de utilidad $U(X)$ es tal que, si la distribución de la variable aleatoria X_1 es preferida a la distribución de la variable aleatoria X_2,

$$E[U(X_1)] > E[U(X_2)]$$

y si el decisor es indiferente entre las dos distribuciones,

$$E[U(X_1)] = E[U(X_2)]$$

Ejemplo 8.2. Un decisor con función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$ debe escoger entre dos opciones que incrementan su fortuna en X_1 o en X_2. X_1 sigue una distribución uniforme sobre el intervalo [0,100] y X_2 tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{2}{150^2}(150 - x) \quad 0 \leq x \leq 150$$

Halle la opción más conveniente para el decisor.

Solución. Como la fortuna del decisor se incrementa en $X_i (i = 1, 2)$, calcularemos

$$E[U(X_i)] = E\left[\sqrt{X_i}\right] \text{ para } i = 1, 2$$

Puesto que

$$E\left[\sqrt{X_1}\right] = \frac{1}{100}\int_0^{100} x^{1/2}\, dx = 6{,}67$$

y

$$E\left[\sqrt{X_2}\right] = \frac{2}{150^2}\int_0^{150} x^{1/2}(150 - x)\, dx = 6{,}53$$

concluimos que la primera opción es la más conveniente para el decisor.

□

Ejemplo 8.3. Una persona que piensa trasladarse a otra ciudad contempla solamente los siguientes resultados:

x_1: encontrar un empleo bien remunerado
x_2: comprar casa

x_3: comprar apartamento, y
x_4: comprar carro

A los resultados anteriores la persona en mención les asigna las utilidades:

$$U(x_i) = 12 - 2i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Para ella, comprar casa y comprar apartamento son resultados igualmente preferibles, la compra de casa (o apartamento) es doblemente preferible a la compra de carro y la consecución de empleo en la nueva sede es cinco veces más preferible que la compra de carro. Halle:

a) la utilidad correspondiente al resultado x: comprar vivienda cuando la persona considera solo la compra de casa o apartamento.

b) La utilidad correspondiente a la combinación de los resultados: comprar casa y comprar carro, cuando la persona considera solo estos resultados.

c) La utilidad correspondiente a la combinación de los resultados x_1, x_2, x_3, x_4.

Solución.

a) Puesto que la compra de casa y de apartamento son resultados igualmente preferibles, tenemos

$$U(x) = \frac{1}{2}U(x_2) + \frac{1}{2}U(x_3) = 7$$

b) Si x es la combinación de los resultados x_2 y x_4, entonces

$$U(x) = \frac{2}{3}U(x_2) + \frac{1}{3}U(x_4) = 6{,}67$$

c) Si x es la combinación de los resultados x_1, x_2, x_3 y x_4, entonces x es el resultado que conduce a x_i con probabilidad $p_i (i = 1, 2, 3, 4)$. Tomando en cuenta las preferencias de la persona que piensa trasladarse, tenemos las relaciones:

$$p_2 = p_3 \quad p_2 = 2p_4 \quad \text{y} \quad p_1 = 5p_4$$

Además, puesto que la persona solo contempla los resultados x_1, x_2, x_3 y x_4, tenemos

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Obtenemos así los valores,

$$p_1 = 0{,}5 \quad p_2 = p_3 = 0{,}2 \quad \text{y} \quad p_4 = 0{,}1$$

En esta forma,

$$U(x) = \sum_{i=1}^{4} p_i U(x_i) = 8{,}2 \quad \square$$

8.4 Determinación de los valores de la utilidad

Asumimos que hay n perspectivas o resultados, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con sus respectivas utilidades $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_n)$. El proceso de hallar los valores de estas utilidades se inicia con una clasificación de estos resultados, en orden de preferencia, desde el peor hasta el mejor; sean estos x_1 y x_n, respectivamente.

Las utilidades $U(x_1)$ y $U(x_n)$ se asignan arbitrariamente, mientras que para hallar las utilidades intermedias se formula una lotería de referencia, que es estrictamente hipotética y consiste en un juego en el cual el decisor recibe x_n si gana y x_1 si pierde.

La probabilidad de ganar el premio $x_n(x_1)$ varía según las preferencias del decisor; así, para el k-ésimo resultado, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, él señala la probabilidad q_k de ganar el premio x_n. El valor de esta probabilidad debe ser de tal forma que para el decisor sea indiferente entre obtener el resultado x_k con certeza o jugar la lotería de referencia en la cual gana con probabilidad q_k. La figura 8.1 muestra un diagrama de probabilidad para tal lotería.

Del raciocinio anterior se desprende que el decisor se inclina igualmente por el resultado x_k y por la combinación de los resultados x_1 y x_n, la cual conduce al resultado x_n con la probabilidad q_k; esto es,

$$U(x_k) = q_k U(x_n) + (1 - q_k) U(x_1) \tag{8.3}$$

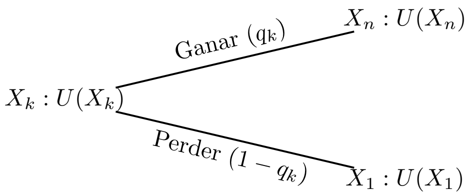

FIGURA 8.1. Diagrama del árbol de probabilidad para la lotería de referencia.

Ejemplo 8.4. El dueño de una ferretería contempla trasladarla. Este cambio de dirección mejora o empeora su situación financiera actual; se enfrenta con uno de los resultados siguientes:

Menos preferido	x_1: quiebra inminente (si el traslado es un error)
	x_2: disminución en las ventas (si permanece en el sitio actual)
Más preferido	x_3: incremento en las ventas (si el traslado es un éxito)

El ferretero asigna arbitrariamente las siguientes utilidades a los resultados extremos:

$$U(x_3) = 8 \quad \text{y} \quad U(x_1) = -2$$

Además, contempla la lotería de referencia en términos de 10 balotas en una caja. Unas balotas tienen la letra G (Ganar) y el resto la letra P (perder). Una balota es seleccionada al azar y si tiene la letra G, ello corresponderá al resultado x_3, pero si tiene la letra P, ello representará el resultado x_1. Luego de meditarlo, el ferretero decide que 7 balotas con la letra G hacen que para él sea indiferente obtener el resultado x_2 o jugar la lotería de referencia. El ferretero juzga que su posibilidad de éxito, luego de trasladarse, es 0,6. ¿Qué decisión debe adoptar el ferretero?

Solución. Cuando las ventas declinan en el sitio actual, la utilidad es

$$U(x_2) = q_2 U(x_3) + (1 - q_2) U(x_1) = 5$$

Ahora podemos hacer un análisis aplicando la regla de decisión de Bayes, con utilidades como pagos. El diagrama del árbol de decisión se

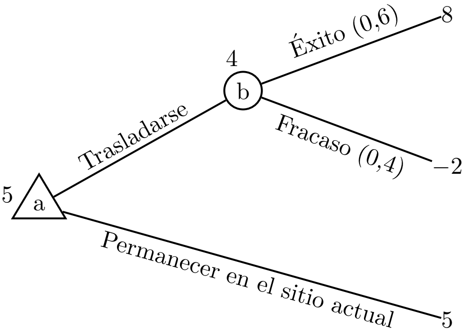

FIGURA 8.2. Diagrama del árbol de decisión del ferretero con pagos por utilidad.

muestra en la figura 8.2. La utilidad esperada para el tenedor - evento en b es 4, la cual se logra al trasladarse. Puesto que este valor es menor que 5 (la utilidad lograda al permanecer en su lugar actual), el ferretero no debe trasladarse. □

8.5 La curva de indiferencia monetaria

Consideremos los n resultados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de un experimento, los cuales se clasifican en orden de preferencias, siendo x_1 el peor resultado y x_n el mejor resultado. La lotería de referencia puede usarse para construir una función de utilidad monetaria U cuyo dominio está compuesto por los n resultados del experimento. Estos resultados podrían ser medidos sobre una escala continua, de manera que la función U sea continua.

Para cada decisor existirá una función de utilidad diferente; es más, un decisor podrá cambiar su función de utilidad con el tiempo (cambiar sus valores, preferencias, etc.). Por lo tanto, la función de utilidad de un decisor no es única. Por simplicidad se colocan las utilidades arbitrarias: $U(x_1) = 0$ y $U(x_n) = 1$. De esta manera, para cualquier resultado intermedio x_k, de la ecuación (8.3) obtenemos $U(x_k) = q_k$ y en forma general podemos escribir:

$$U(x) = q \tag{8.4}$$

donde q representa no solo la probabilidad de conseguir el resultado x sino la utilidad de este resultado. La ecuación (8.4) puede representarse por una curva, llamada "curva q de indiferencia monetaria".

Ejemplo 8.5. En el problema de la compañía de grabación desarrollado en los ejemplos 4.4 y 4.5, use la lotería de referencia entre las cantidades $x_1 = -68{,}000$ y $x_9 = 39{,}000$, y suponga que el gerente de la compañía es indiferente entre obtener 28.000 [0] o llevar a cabo una rifa en que la probabilidad de ganar es 0,93 [0,84].

Construya la curva q de indiferencia monetaria y el árbol de decisión donde las utilidades que corresponden a cada pago monetario se obtengan en esta curva. Luego determine la estrategia óptima del gerente de la compañía y su utilidad al seguir esta estrategia.

Solución. La curva q de indiferencia monetaria se muestra en la figura 8.3; ha sido deducida usando los puntos (−68.000; 0), (0; 0,84), (28.000; 0,93) y (39.000; 1). Posteriormente se usa la curva junto con los pagos monetarios restantes, para encontrar las utilidades correspondientes.

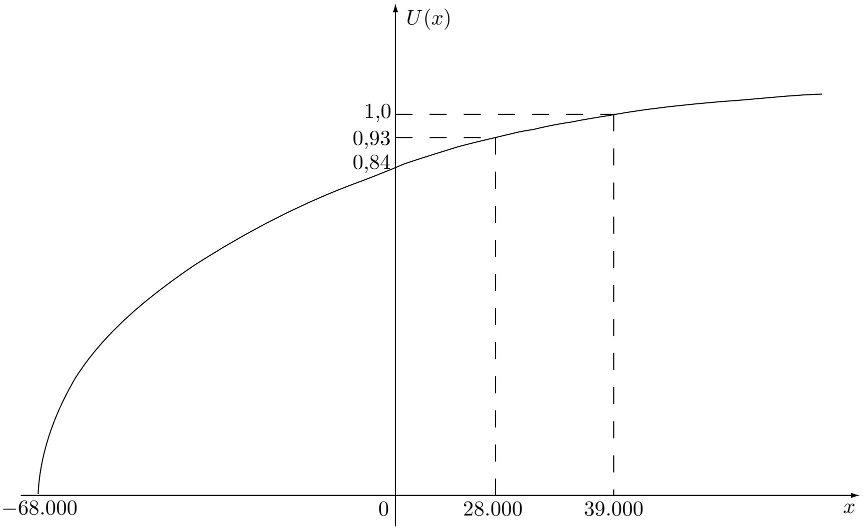

FIGURA 8.3. Función de utilidad para el gerente de la compañía de grabación.

El diagrama original del árbol de decisión se reconstruye en la figura 8.4. Las utilidades que corresponden a cada pago monetario han sido obtenidas en la curva de indiferencia monetaria. La inducción hacia atrás se efectúa usando utilidades y el análisis se hace en la misma forma como se realizó previamente.

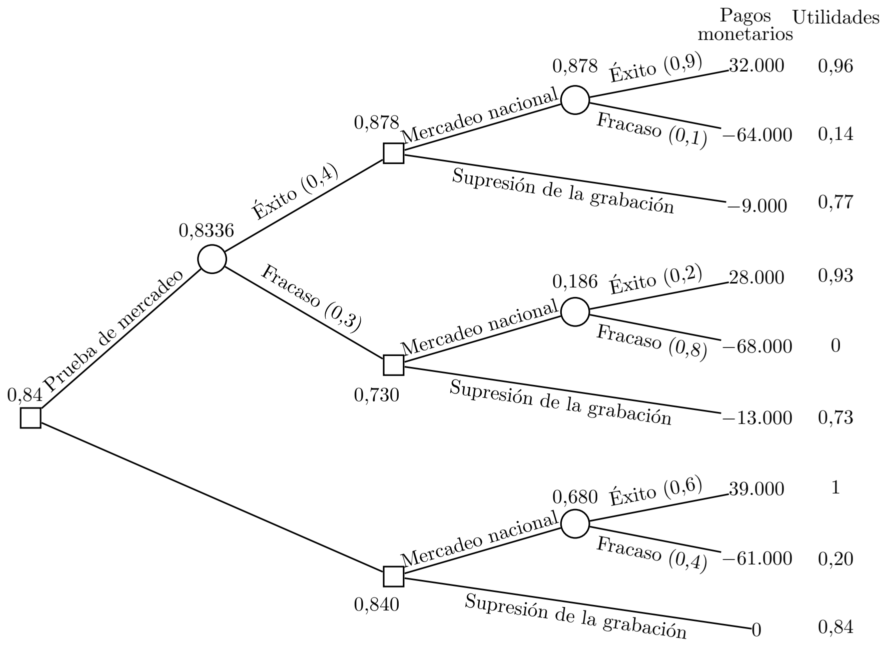

FIGURA 8.4. Diagrama del árbol de decisión para la compañía de grabación con pagos por utilidad.

Usando utilidades hallamos que la escogencia óptima es suprimir la grabación. Recordemos que cuando se usaron valores monetarios, se llegó a una conclusión diferente. Como los valores de la utilidad expresan el verdadero valor de los resultados monetarios, es más conveniente usar la nueva solución. □

8.6 Punto de equilibrio

Cuando un decisor realiza un proyecto, naturalmente debe hacer una inversión para obtener una ganancia. Por esta razón consideramos ahora, en general, que el decisor invierte una cantidad c para conseguir un ingreso X, siendo X una variable aleatoria con una distribución de probabilidad conocida.

Puesto que el decisor no obtiene ganancia alguna cuando no realiza el proyecto, el punto de equilibrio para las acciones de realizar o no el proyecto se consigue cuando el decidor, al llevarlo a cabo, espera obtener un ingreso igual a la cantidad que invierte. En términos de la función de utilidad U, tenemos

$$U(c) = E[U(X)] \tag{8.5}$$

En otras palabras, para el decisor es indiferente llevar a cabo o no el proyecto. En la fórmula (8.5), $U(c)$ indica la utilidad proveniente de la inversión c hecha por el decisor y $E[U(X)]$ representa la utilidad esperada, proveniente de la realización del proyecto.

Ahora tendremos en cuenta que, de acuerdo con la clasificación de los resultados y la asignación de sus utilidades, la función de utilidad es creciente. Cuando la función de utilidad es estrictamente cóncava, la desigualdad de Jensen,

$$E[U(X)] \leq U(EX) \tag{8.6}$$

(la cual es estricta excepto en el caso de que X sea constante), conduce a la desigualdad

$$c \leq EX$$

De esta manera, si la función de utilidad $U(x)$ es tal que

$$U'(x) > 0 \quad \text{y} \quad U''(x) < 0 \tag{8.7}$$

el decisor debe realizar el proyecto, puesto que su ganancia esperada es $EX - c$.

En conclusión, cuando un decisor escoge una función de utilidad con las características dadas en (8.7), ello indica que él realiza el proyecto solamente si espera obtener una ganancia. En este caso se dice que el decisor es “adverso al riesgo”.

Cuando la función de utilidad es estrictamente convexa, la desigualdad de Jensen:

$$E[U(X)] \geq U(EX) \tag{8.8}$$

(la cual es estricta excepto en el caso de que X sea constante), conduce a la desigualdad

$$c \geq EX$$

En otras palabras, cuando el decisor emplea una función de utilidad $U(x)$ tal que

$$U'(x) > 0 \quad \text{y} \quad U''(x) > 0 \tag{8.9}$$

se espera que, al realizar el proyecto, él tenga una pérdida igual a $c - EX$. En este caso se dice que el decisor es "propenso al riesgo".

Ejemplo 8.6. Un decisor que emplea la función de utilidad

$$U(x) = 12x - \frac{1}{4}x^2$$

desea invertir una cantidad c en un proyecto. El ingreso X que obtiene el decisor es una variable aleatoria que sigue la distribución exponencial con media 10. Calcule el valor de la inversión c de tal manera que para el decisor sea indiferente realizar o no realizar el proyecto.

Solución. Puesto que el ingreso X sigue la distribución exponencial con media 10, tenemos

$$E[U(X)] = 12EX - \frac{1}{4}E\left[X^2\right] = 70$$

Utilizando la fórmula (8.5) obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{4}c^2 - 12c + 70 = 0$$

cuya solución, $c = 6,80$, nos dice que para el decisor es indiferente realizar o no realizar el proyecto cuando la inversión sea de 6,80. En este caso, 3,20 es la ganancia esperada del decisor. $\square$

Consideremos ahora un decisor con fortuna w que en el periodo siguiente de contabilidad puede sufrir una pérdida aleatoria $X (X \geq 0)$, con distribución de probabilidad conocida y contra la cual se asegura pagando una prima G.

El valor de G para el cual el decisor es indiferente entre pagar su valor al asegurador y asumir él mismo la pérdida X, se obtiene de la ecuación de equilibrio de la utilidad,

$$U(w - G) = E[U(w - X)] \tag{8.10}$$

donde $U(w - G)$ representa la utilidad obtenida por el decisor luego de pagar la prima G por una protección financiera completa y $E[U(w - X)]$ representa la utilidad esperada cuando no adquiere el seguro.

Asumiendo que el decisor se asegura porque es adverso al riesgo, vemos que la función de utilidad tiene las características dadas en 8.7 y así la desigualdad de Jensen implica que

$$G \geq EX$$

con $G > EX$, a menos que la pérdida X sea constante. Concluimos entonces que el decidor, al ser adverso al riesgo, pagará por el seguro una prima mayor que la pérdida esperada.

Ejemplo 8.7. Un decisor con fortuna w y función de utilidad exponencial con parámetro α:

$$U(x) = -e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0$$

enfrenta una pérdida aleatoria con función de densidad mixta,

$$f(x) = \begin{cases} q & \text{si x=0} \\ p\lambda e^{-\lambda x} & \text{si x>0} \end{cases}$$

donde $\lambda > \alpha$, $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$. Calcule la prima G que pagaría por un seguro que cubra la totalidad de la pérdida.

Solución. Puesto que

$$E[U(X)] = -M_X(-\alpha)$$

donde M_x es la función generatriz de momentos de X, la ecuación de equilibrio de la utilidad queda como sigue:

$$-e^{-\alpha(w-G)} = -M_{W-X}(-\alpha) = -e^{-\alpha w} M_X(\alpha)$$

Entonces, la prima G viene dada por

$$G = \frac{1}{\alpha} \ln M_X(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(q + p\frac{\lambda}{\lambda - \alpha} \right) \tag{8.11}$$

Como puede observarse, cuando un decisor recurre a una función de utilidad exponencial, la prima del seguro no depende de su fortuna. □

Ejercicios

8.2 Función de utilidad

8.1 Un contratista debe determinar si comprar o alquilar un equipo requerido con el propósito de realizar un trabajo para el cual licita. Debido a los requerimientos de tiempo para conseguir el equipo, debe adoptar una decisión antes de conocer si gana la licitación. Si compra el equipo, el contrato le reportaría una ganancia de 120, neta porque revende el equipo; pero si no gana la licitación, el equipo tendrá que ser vendido con una pérdida de 40. Si alquila el equipo, su ganancia proveniente del contrato (si lo gana) será de 50, pero no habrá pérdida si el trabajo no se consigue. La probabilidad de que gane o no el contrato es la misma: 0,5. La función de utilidad del contratista es $U(x) = \sqrt{x + 40}$.

a) Construya la tabla de pagos del contratista usando la ganancia como medida de pago. ¿Qué acción suministra el mayor pago esperado?

b) Construya la tabla de pagos del contratista usando la función de utilidad. ¿Qué acción suministra la máxima utilidad esperada?

8.2 Un fabricante tiene que decidir cuántas unidades de un producto debe elaborar a un costo unitario de 50 y a un precio de 70 por unidad. Las unidades no vendidas después de un mes, se realizan a precio de costo. El fabricante estima que la demanda mensual D del producto tiene la siguiente función de frecuencia:

k	0	1	2	3
$P\{D = k\}$	0,1	0,3	0,4	0,2

Empleando la función de utilidad $U(x) = xD$, ¿qué producción da lugar a la máxima utilidad empleada?

8.3 Anotaciones sobre la función de utilidad

8.3 Si $U(x_1) = 7$ y $U(x_2) = 18$, halle $U(x)$ en el caso en que el decisor sea indiferente entre x y la combinación de x_1 y x_2 donde el decisor enfrenta x_2 con probabilidad 0,2.

8.4 Si $U(x_1) = 14$ y $U(x_2) = 21$, halle $U(x)$ en el caso en que el decisor sea indiferente entre x y la combinación de x y x_2, donde el decisor enfrenta x_2 con probabilidad 0,2. Además, señale el orden de preferencia de los resultados.

8.5 Un decisor que enfrenta los resultados x_1, x_2, x_3 y x_4, es indiferente entre x_2 y la combinación de x_1 y x_3 y entre x_3 y la combinación de x_1 y x_4. Señale el orden de preferencia de los resultados, cuando $U(x_1) = 7$ y $U(x_2) = 14$ y el decisor enfrenta a x_1 con probabilidad 0,6.

8.6 Un decisor que emplea la función de utilidad $U(x) = -\exp(-5x)$ tiene dos resultados aleatorios disponibles: X_1 con distribución $N(5; 2)$ y X_2 con distribución $N(6; 2,5)$. ¿Cuál de los dos resultados es preferible para el decisor?

8.7 Responda el interrogante planteado en el ejercicio 8.6 cuando el decisor emplea la función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$ y los resultados aleatorios X_1 y X_2 tienen distribución exponencial con parámetros 2 y 4, respectivamente

8.4 Determinación de los valores de la utilidad

8.5 La curva de indiferencia monetaria

8.8 El dueño de una panadería piensa trasladar su negocio, razón por la cual se enfrenta con uno de los resultados siguientes: x_1: quiebra inminente (si el traslado es un error), x_2: disminución en las ventas (si permanece en el sitio actual sin publicidad), x_3: incremento moderado en las ventas (si permanece en el sitio actual con publicidad) y x_4: incremento elevado en las ventas (si el traslado es un éxito). De acuerdo con la lotería de referencia, el panadero establece que $q_2 = 0,6$ y $q_3 = 0,8$. Si juzga que su posibilidad de éxito luego de trasladarse es del 70 %, ¿qué decisión debe adoptar?

8.9 En el ejemplo 8.4, suponga que los valores de los resultados del ferretero son $x_1 = 0$, $x_2 = 20$ y $x_3 = 80$. ¿Qué decisión debe adoptar esta persona si emplea la función de utilidad $U(x) = 0{,}1\sqrt{x}$ y recurre a la misma lotería de referencia?

8.10 A un decisor que tiene una fortuna de 8 y emplea la función de utilidad $U(x) = 2x - 7$ se le presenta la oportunidad de hacer una inversión en la cual gana 2 con probabilidad 0,4 o pierde 1 con probabilidad 0,6. ¿Debe hacer la inversión?

8.11 Suponga que $U(x_1) = -2$ y $U(x_2) = 7$. Si V es una nueva función de utilidad donde $U(x_1) = 0$ y $U(x_2) = 1$, deduzca la relación lineal entre $U(x)$ y $V(x)$ para los valores de $V(x)$ entre 0 y 1.

8.12 Si $U(x) = a\exp[bV(x)]$, donde U y V son funciones de utilidad tales que $U(x_1) = 2$, $U(x_2) = 8$, $V(x_1) = 3$, y $V(x_2) = 6$, halle los valores de a y b.

8.6 Punto de equilibrio

8.13 Suponga que el decisor mencionado en el ejemplo 8.6 emplea la función de utilidad $U(x) = -\exp[-2x]$. ¿Qué cantidad debe invertir el decisor para que le sea indiferente realizar o no realizar el proyecto?

8.14 A un decisor que tiene una fortuna de 8 y emplea la función de utilidad $U(x) = 2x + x^2/3 - x^3/54$ se le presenta la oportunidad de participar en una apuesta en la cual gana $2c$ con probabilidad 0,5 o pierde c con probabilidad 0,5. ¿Qué tanto debe apostar el decisor para que le sea indiferente, participar o no participar en la apuesta?

8.15 Suponga ahora que el decisor mencionado en el ejercicio 8.10 gana 2 con probabilidad p y pierde 1 con probabilidad $1-p$. ¿Para qué valor de p es indiferente hacer o no la inversión?

8.16 ¿Cuál es la máxima prima anual que el propietario de la casa (ejemplo 8.1) estaría dispuesto a aceptar cuando los pagos son medidos en términos de utilidades?

8.17 En el ejemplo 8.1 suponga que el daño parcial es posible y responda al interrogante planteado en el ejercicio 8.16 cuando el propietario de la casa enfrenta una pérdida X, con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}998 & \text{si} \quad \text{x=0} \\ 25 \times 10^{-9} & \text{si} \quad x < 0 \leq 8.000 \end{cases}$$

8.18 La probabilidad de que un bien no sufra daño alguno en un año dado es 0,8, mientras que la función de densidad de una pérdida positiva es dada por

$$f(x) = 0{,}04\exp[-0{,}2x] \quad x > 0$$

¿Cuál es la máxima prima anual que el propietario del bien pagaría por asegurarlo si emplea la función de utilidad $U(x) = -\exp[-0{,}04x]$?

8.19 Un decisor con fortuna de 50 y que emplea la función de utilidad $U(x) = -e^{-0{,}3x}$, enfrenta una pérdida X que sigue la distribución binomial con parámetros 8 y 0,6. Halle la prima máxima que el decisor pagaría por un seguro que cubra su pérdida.

8.20 Un decisor con fortuna de 100 y que emplea la función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$ enfrenta una pérdida X distribuida uniformemente entre 0 y 80. Halle la prima máxima que el decisor pagaría por un seguro que cubra su pérdida.

8.21 La probabilidad de que un inmueble no sufra daño alguno es 0,64. Las pérdidas que ocurren son distribuidas uniformemente entre 0 y 9. Si la fortuna del propietario del inmueble es 25 y él tiene la función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$, halle la prima máxima que el decisor pagaría por asegurar el inmueble.

CAPÍTULO 9

Procesos markovianos de decisión

9.1 Introducción

Los procesos markovianos de decisión son modelos probabilísticos utilizados para adoptar decisiones cuando los resultados son inciertos. En estos procesos se tienen en cuenta los tiempos o épocas en que se toman las decisiones, las acciones que se adoptan en los estados del proceso, las recompensas generadas por las acciones adoptadas y las probabilidades de transición para determinar el estado en la siguiente época de decisión.

En este capítulo analizaremos los problemas de decisiones que involucran el uso de los procesos de Markov. Veremos varios métodos para establecer el pago óptimo del decisor, entre los cuales se destacan el uso de la programación lineal y de la distribución de probabilidad estacionaria.

En el estudio de estos métodos consideraremos los procesos markovianos de decisión de la forma $\{(X_t, \Delta_t)\}_{t=0,1,...}$ donde la sucesión $\{X_t\}_{t=0,1,...}$ representa una cadena de Markov de tiempo discreto con

$M+1$ estados: $0, 1, 2, \ldots, M$ y la sucesión $\{\Delta_t\}_{t=0,1,\ldots}$ representa un proceso estocástico de tiempo discreto cuyos estados indican las acciones (decisiones) que pueden adoptarse. Cuando el proceso Markoviano de decisión no dependa del tiempo, escribiremos simplemente $\{(X, \Delta)\}$.

9.2 Modelo markoviano de decisión

Toda acción que se adopta depende de la historia pasada del proceso y puede basarse en una distribución de probabilidad específica, sobre el conjunto de las acciones. Para adoptar las acciones debemos seguir alguna política, llamémosla R, la cual se define como una regla que especifica la acción que se adopta cuando la cadena se halla en un estado determinado. Así, una política R es simplemente una sucesión de acciones: $a_0(R)$, $a_1(R)$,...,$a_M(R)$, donde $a_i(R)$ señala la acción que se adopta en el estado i cuando se sigue la política R. Esta descripción supone que, si la cadena se encuentra en el estado i, la acción que se adopta es la misma para todos los valores del tiempo t. Las políticas que poseen esta propiedad, llamadas "políticas estacionarias", son las que consideraremos en lo sucesivo.

La probabilidad condicional de que la cadena se halle en el estado j en el tiempo $t+1$, dado que ella en el tiempo t se encontraba en el estado i y allí se adoptaba la acción $a_i(R) = a_i$, es indicada por $p_{ij}(a_i)$; esto es,

$$p_{ij}(a_i) = P\{X_{t+1} = j / X_t = \Delta_{ti} = a_i\} \tag{9.1}$$

La transición anterior da lugar a un pago $b_{ij}(a_i)$ que puede ser una ganancia o un costo. Vemos así que, cuando la cadena se halla en el estado i y allí se adopta la acción a_i, el pago esperado causado por esta escogencia, indicado por $b_i(a_i)$, viene dado por

$$b_i(a_i) = \sum_{j=0}^{M} b_{ij}(a_i) p_{ij}(a_i) = P_{i*}(a_i) B'_{i*}(a_i) \quad i = 0, 1, \ldots, M \tag{9.2}$$

donde $P_{i*}(a_i)$ es la fila i de la matriz de probabilidades de transición $P(a_i) = (p_{ij}(a_i))$ y $B'_{i*}(a_i)$ es la columna i de la matriz transpuesta de la matriz de pagos $B(a_i) = (b_{ij}(a_i))$, $i = 0, 1, \ldots, M$.

Ejemplo 9.1. Una represa con capacidad de tres unidades se usa para generar potencia eléctrica para la irrigación o para controlar inundaciones. La cantidad de agua D_t, que llega a la represa durante el t-ésimo mes ($t = 1, 2, \ldots$), tiene la siguiente distribución de probabilidad:

r	0	1	2	3	4
$P\{D_t = r\}$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Para generar potencia eléctrica se requieren dos unidades de agua, que se liberarían al final de cada mes. Si hay menos de dos unidades en la represa, se debe adquirir el agua que falte para generar potencia eléctrica. Cuando hay tres unidades en la represa, la unidad sobrante puede ser usada para la irrigación. El agua empleada para la irrigación se valora en 150 por unidad y el agua adicional para generar potencia eléctrica se adquiere a un precio de 200 por unidad. Si en cualquier mes el agua en la represa excede la capacidad de tres unidades, el exceso de agua se libera a través de aliviaderos, sin costo o ganancia algunos. Sea $\{X_t\}_{t=0,1\ldots}$ una cadena de Markov donde X_0 indica la cantidad de agua que inicialmente hay en la represa y, en general, X_t indica la cantidad de agua en la represa al finalizar el t-ésimo mes, justo después de que el agua ha sido liberada.

Puesto que el agua para generar potencia eléctrica tiene mayor valor que el agua empleada para irrigación, el agua en la represa se usa preferencialmente para generar potencia eléctrica y, si sobra agua, puede venderse o no para la irrigación. Por esta razón, al final de cada mes tenemos en cuenta solo las acciones

1. Utilizar el agua únicamente para generar potencia eléctrica
2. Vender el agua sobrante para irrigación.

Calcule los costos esperados mensuales cuando la represa está vacía o tiene una unidad de agua al comienzo del mes.

Solución. Las probabilidades de transición $p_{00}(1)$ y $p_{00}(2)$, correspondientes a las acciones 1 y 2, son:

$$p_{00}(1) = P\{D_t \leq 2\} = 0{,}7$$

y

$$p_{00}(2) = P\{D_t \geq 0\} = 1$$

Mediante un procedimiento similar encontramos las restantes probabilidades de transición, correspondientes a las acciones 1 y 2, obteniendo así las matrices de probabilidades de transición de la cadena $\{X_t\}$, para cada una de las acciones:

$$p(1) = (p_{ij}(1)) = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

y

$$p(2) = (p_{ij}(2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los costos $b_{00}(1)$ y $b_{00}(2)$, correspondientes a las acciones 1 y 2, son:

$$b_{00}(1) = 400P\{D_t = 0\} + 200P\{D_t = 1\} + 0P\{D_t \geq 2\} = 80$$

y

$$b_{00}(2) = 200P\{D_t = 0\} + 0P\{D_t = 1\} + 150P\{D_t \geq 2\} = -85$$

Mediante un procedimiento similar encontramos los costos restantes, obteniendo así las matrices de los costos para cada una de las acciones,

$$B(1) = (b_{ij}(1)) = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$B(2) = (b_{ij}(2)) = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ -85 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los costos esperados mensuales, cuando la represa está vacía o tiene una unidad de agua al comienzo del mes, son

$$b_0(1) = 56 \quad \text{y} \quad b_1(1) = 6$$

si el agua se utiliza solo para generar potencia eléctrica y

$$b_0(2) = 35 \quad \text{y} \quad b_1(2) = -85$$

si el agua sobrante se vende para irrigación. □

9.3 Programación lineal y políticas óptimas

Supondremos que en cada estado de la cadena de Markov $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$ el decisor dispone de n acciones: $1, 2, \ldots, n$; esto es, $a_i = 1, 2, \ldots, n$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, M$. De esta manera, cuando la cadena $\{X_t\}$ se halla en el estado i en el tiempo t, las probabilidades

$$q_{ik}(t) = P\{\Delta_t = k/X_t = i\} \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{9.3}$$

representan una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las acciones. El problema de interés consiste en encontrar las probabilidades $q_{ik}(t)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, M$ y $k = 1, 2, \ldots, n$ de tal forma que, después de largo tiempo, el pago promedio esperado por unidad de tiempo sea optimizado. Por tal razón consideramos las probabilidades $q_{ik}(t)$, cuando t es bastante grande. Asumiendo que, en este caso, las probabilidades $q_{ik}(t)$ no dependen del tiempo t, las representamos abreviadamente por q_{ik} y escribimos

$$q_{ik} = P\{\Delta = k/X = i\} \tag{9.4}$$

donde $i = 0, 1, \ldots, M$ y $k = 1, 2, \ldots, n$

Sea $p_i(k)$ la probabilidad de que, después de largo tiempo, la cadena $\{X_t\}$ se halle en el estado i y se adopte la acción k; es decir

$$p_i(k) = P\{X = i, \Delta = k\} \tag{9.5}$$

donde $i = 0, 1, \ldots, M$ y $k = 1, 2, \ldots, n$

A partir de las probabilidades de $p_i(k)$, podemos obtener las probabilidades q_{ik}, mediante la relación

$$q_{ik} = \frac{p_i(k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_i(k)} \quad i = 0, 1, \ldots, M \text{ y } k = 1, 2, \ldots, n \tag{9.6}$$

Por otra parte, observamos que

$$\sum_{k=1}^{n} P\{X_{t+1} = j, \Delta_t = k\} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{n} P\{X_t = i, \Delta_t = k\} p_{ij}(k)$$

Entonces, después de largo tiempo esta relación puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} p_j(k) = \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{n} p_i(k)p_{ij}(k) \quad j = 0, 1, \ldots, M$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el pago promedio esperado por unidad de tiempo, siguiendo cualquier política R, viene dado por

$$b(R) = \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{n} b_i(k)p_i(k) \tag{9.7}$$

podemos plantear un problema de programación lineal en la forma siguiente:

Optimizar $b(R) = \sum\limits_{i=0}^{M}\sum\limits_{k=1}^{n} b_i(k)p_i(k)$

Sujeta a $\sum\limits_{k=1}^{n} p_j(k) - \sum\limits_{i=0}^{M}\sum\limits_{k=1}^{n} p_i(k)p_{ij}(k) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, M,$

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{n} p_i(k) = 1 \tag{9.8}$$

$p_i(k) \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, M;\ k = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 9.2. Todos los sábados en la noche un hombre juega cartas, con gran disgusto de su esposa. Sin importar el estado de ánimo de su esposa, si la lleva a cenar (a un costo esperado de 21) antes de ir a jugar cartas, la encontrará de buen humor, con probabilidad 0,9, y de mal humor, con probabilidad 0,1, el día siguiente. Si va a jugar cartas sin llevarla primero a cenar, la encontrará de buen humor el día siguiente, con probabilidad 0,2, y de mal humor, con probabilidad 0,8. Además, si ella está de mal humor y él no la lleva a cenar, ella irá a un almacén y adquirirá artículos por un valor esperado de 72. Establezca la política óptima del jugador.

Solución. Teniendo en cuenta el estado de ánimo en que se encuentra la esposa, consideremos los estados 0: buen humor y 1: mal humor. En cuanto al esposo se refiere, las acciones que adoptaría serían 1: jugar cartas sin llevar a la esposa a cenar, o 2: llevar a la esposa a cenar antes de ir a jugar. Vemos así que los diversos costos esperados vienen a ser:

$$b_0(1) = 0,\ b_1(1) = 72,\ b_0(2) = 21 \text{ y } b_1(2) = 21$$

Las matrices de probabilidades de transición que corresponden a las acciones son:

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

y

$$P(2) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

El problema de programación lineal puede plantearse entonces de la forma:

Minimizar $b(R) = 21p_0(2) + 72p_1(1) + 21p_1(2)$

Sujeta a

$$\begin{aligned} 0{,}8p_0(1) + 0{,}1p_0(2) + 0{,}2p_1(1) - 0{,}9p_1(2) &= 0 \\ p_0(1) + p_0(2) + p_1(1) + p_1(2) &= 1 \end{aligned}$$

$p_i(k) \geq 0,\ i = 0{,}1;\ k = 1, 2$

La solución a este problema viene dada por

$$p_0(1) = \frac{9}{17},\ p_0(2) = 0,\ p_1(1) = 0,\ p_1(2) = \frac{8}{17},\ \text{y } b(R) = \frac{168}{17} = 9{,}88$$

Entonces, de la relación (9.6) se desprende que $q_{01} = 1$, $q_{02} = 0$, $q_{11} = 0$ y $q_{12} = 1$, concluyendo de esta manera que el jugador lleva a su esposa a cenar solo cuando ella está de mal humor y que el costo esperado semanal en el hogar, causado por su afición al juego, es de 9,88. □

9.4 Distribución de probabilidad estacionaria

Supondremos ahora que la cadena de Markov $\{(X_t)\}_{t=0,1,\ldots}$ tiene una sola clase recurrente y que en cada uno de sus estados puede adoptarse una y solo una de las acciones disponibles. En este caso escribiremos p_i, p_{ij} y b_i en lugar de $p_i(k)$, $p_{ij}(k)$ y $b_i(k)$, respectivamente.

Las restricciones del problema de programación lineal, planteado en la sección 9.3, quedan como sigue:

$$p_j = \sum_{i=0}^{M} p_i p_{ij} \quad j = 0, 1, \ldots, M$$

$$\sum_{i=0}^{M} p_i = 1$$

$p_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, M$

La primera de estas restricciones se puede escribir como

$$p_j = \mathbf{p} P_{*j}$$

donde $\mathbf{p} = (p_0, P_1, \ldots, p_M)$ y P_{*j} es la columna i de la matriz de probabilidades de transición $P = (p_{ij})$, de la cadena de Markov $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$. En esta forma, tenemos la ecuación

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}P \tag{9.9}$$

de donde se desprende que $\mathbf{p}$ es el vector característico a izquierda de la matriz de probabilidades de transición P, asociado al valor característico 1. En consecuencia, teniendo en cuenta las tres restricciones, vemos que el vector $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_M)$, constituye la distribución de probabilidad estacionaria de la cadena de $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$. Por tal razón, el pago promedio esperado por unidad de tiempo, siguiendo cualquier política R, es único y viene dado por

$$b(R) = \sum_{i=0}^{M} b_i p_i \tag{9.10}$$

Ejemplo 9.3. En un proceso de producción, una máquina es inspeccionada en el tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots$, y después de cada inspección es clasificada en uno de los estados siguientes: 0 si es nueva, 1 si funciona con deterioro menor, 2 si funciona con deterioro mayor y 3 si no funciona.

Sea X_t el estado de la máquina en el tiempo t. La política de remplazo que se sigue consiste en sustituir la máquina solo cuando no funciona. Cuando la máquina no es nueva (y solo es este caso) puede producir artículos defectuosos, incurriéndose así en los costos 100 y 200 cuando se encuentra en los estados 1 y 2 respectivamente. Cuando la máquina se remplaza, se incurre en un costo de 700 (500 por el remplazo y 200 por la producción perdida). Asuma que la sucesión $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$ es una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule el costo promedio esperado por unidad de tiempo.

Solución. De acuerdo con la política de remplazo, se tienen las acciones 1: no remplazar la máquina y 2: remplazarla. Puesto que en los estados 0, 1 y 2 solamente se adopta la acción 1 y en el estado 3 solo se adopta la acción 2, hallamos la distribución de probabilidad estacionaria de la cadena $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$; de la ecuación (9.9) obtenemos

$$p_1 \frac{7}{5} p_0 \quad p_2 \frac{31}{25} p_0 \quad \text{y} \quad p_3 = p_0$$

y como $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, concluimos que la distribución estacionaria de la cadena $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$ es

$$p = \left(\tfrac{25}{116} \quad \tfrac{35}{116} \quad \tfrac{31}{116} \, \tfrac{25}{116} \right)$$

Por lo tanto, el costo promedio esperado por unidad de tiempo es,

$$b(R) = 0p_0 + 100p_1 + 200p_2 + 700p_3 = 234{,}48 \quad \square$$

9.5 Mejoramiento de una política

Con el fin de encontrar la política óptima para el proceso markoviano de decisión $\{X_t, \Delta_t\}_{t=0,1,\ldots}$, desarrollaremos, sobre n periodos de tiempo, un procedimiento similar al empleado en la programación dinámica. Este procedimiento establecerá la política que optimiza el pago total esperado.

Para una política R, indicaremos por $v_i(n, R)$ el pago total esperado, generado por el proceso a partir del estado i y durante n periodos de tiempo. Entonces, tenemos la relación,

$$v_i(n,R) = v_i(1,R) + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(a_i)v_j(n-1,R), \quad i = 0,1,\ldots,M \tag{9.11}$$

donde $v_i(1,R) = b_i(a_i)$ y el segundo término de la derecha representa el pago total esperado, generado por el proceso durante los $n-1$ periodos de tiempo restantes. Vemos así que el pago $v_i(n,R)$ puede hallarse de manera iterativa. En forma matricial, el sistema de ecuaciones dado en (9.11) puede escribirse como

$$v(n,R) = v(1,R) + P(R)v(n-1,R) \tag{9.12}$$

donde $v(n,R)$ es el vector columna,

$$v(n,R) = [v_0(n,R), v_1(n,R), \ldots, v_M(n,R)]$$

y en particular

$$v(1,R) = [b_0(a_0), b_1(a_1), \ldots, b_M(a_M)]$$

Mediante un desarrollo iterativo, la ecuación (9.12) puede escribirse

$$v(n,R) = [I + P(R) + \cdots + P^{n-1}(R)]v(1,R) \tag{9.13}$$

A continuación analizaremos el comportamiento del pago total esperado $v_i(n,R)$, a medida que se incrementa el número de periodos de tiempo. Recordemos que el pago promedio esperado (a largo plazo) por unidad de tiempo, siguiendo cualquier política R, viene dado por la ecuación (9.8) y es independiente del estado del cual se parte. Para un valor grande de n, el pago $v_i(n,R)$ puede expresarse como

$$v_i(n,R) = nb(R) + v_i(R) \quad i = 0,1,2,\ldots,M \tag{9.14}$$

donde $v_i(R)$ se interpreta como el efecto sobre el pago total esperado, causado por el proceso a partir del estado i. En forma matricial este sistema de ecuaciones puede escribirse

$$v(n,R) = nb(R)1 + v(R) \tag{9.15}$$

donde 1 y $v(R)$ son los vectores columnas,

$$1 = [1,1,\ldots,1]$$

y

$$v(R) = [v_0(R), v_1(R), \ldots, v_M(R)]$$

De las ecuaciones (9.12) y (9.15) obtenemos así la relación

$$nb(R)1 = v(1, R) + P(R)v(n-1, R) - v(R) \quad n \geq 2$$

y puesto que $v(0, R) = v(R)$ para $n = 1$ tenemos la ecuación

$$b(R)1 = v(1, R) + P(R)v(R) - v(R) \tag{9.16}$$

Como en el sistema (9.16) hay $M+1$ ecuaciones con $M+2$ variables, el valor de una de estas puede elegirse aleatoriamente; por convención se hará $v_M(R) = 0$. Resolviendo entonces el sistema resultante, puede obtenerse el pago promedio esperado (a largo plazo) por unidad de tiempo, $b(R)$, siguiendo la política R. En principio pueden enumerarse todas las políticas y establecer la que optimice a $b(R)$. Sin embargo, incluso para un número moderado de estados y acciones, esta técnica resulta tediosa. Por esta razón usaremos un algoritmo para evaluar estas políticas y encontrar la óptima sin enumerarlas. Los pasos a seguir son:

Paso 1. Para una política R, elegida arbitrariamente, se usa la ecuación (9.16) para hallar los valores de $b(R)$ y del vector $v(R)$.

Paso 2. En una tabla de pagos se sitúa el valor de $b(R)$ en las entradas que corresponden a los estados y acciones que señala la política R.

Paso 3. Teniendo en cuenta las entradas aún no establecidas en la tabla de pagos, se utiliza una política R_0, distinta de R, para calcular el vector de pagos (ecuación (9.16))

$$v(1, R_0) + P(R_0)v(R) - v(R) \tag{9.17}$$

donde $v(R)$ es el vector encontrado en el paso 1. Luego las componentes de este vector se sitúan en las entradas que en la tabla de pagos corresponden a la política R_0. Este procedimiento se repite hasta completar la tabla de pagos.

Paso 4. Observando la tabla de pagos se selecciona la entrada más conveniente para cada estado y con base en esta selección se establece una política R'. Así, R' se convierte en la política nueva para el decisor y el paso 1 se repite con ella, considerada como R. Cuando la política R' coincide con la política R, se ha encontrado la política óptima y el algoritmo concluye.

Ejemplo 9.4. En el problema del jugador (ejemplo 9.2), halle los costos totales esperados, durante tres semanas, cuando él lleva a su esposa a cenar solamente cuando ella está de mal humor.

Solución. En este caso se sigue la política $R : a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y así, la matriz de las probabilidades de transición, $P(R)$, y el vector de los costos esperados semanales, $v(1, R)$, vienen a ser

$$P(R) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

y

$$v(1, R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Utilizando la ecuación (9.13), obtenemos los costos:

$$v_0(3, R) = 21,84 \quad \text{y} \quad v_1(3, R) = 38,43;$$

en otras palabras, 21,84 y 38,43 son los costos esperados para el jugador, durante tres semanas, cuando al comienzo de ellas su esposa se halla de buen humor y de mal humor respectivamente. □

Ejemplo 9.5. Regrese nuevamente al problema del jugador, mencionado en el ejemplo 9.2, para hallar la política óptima que él debe seguir.

Solución. Arbitrariamente escogemos la política $R : a_0 = 2, a_1 = 2$. La matriz de probabilidades de transición, $P(R)$, es la matriz $P(2)$ mostrada en el ejemplo 9.2 y el sistema de ecuaciones (9.16) queda en la forma:

$$\begin{aligned} b(R) &= 21 + 0{,}9v_0(R) - v_0(R) \\ b(R) &= 21 + 0{,}9v_0(R) \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones viene a ser:

$$b(R) = 21 \quad \text{y} \quad v_0(R) = 0.$$

A continuación consideramos la política $R_0 : a_0 = 1,\ a_1 = 1$, con el fin de tener en cuenta todas las alternativas en los diferentes estados. Para esta política, de la expresión (9.17) obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \end{bmatrix}$$

La tabla de costos queda en la forma siguiente:

	Acciones	
Estados	1	2
0	0	21
1	72	21

En consecuencia la política alterna es $R' : a_0 = 1,\ a_1 = 2$. Como esta política es distinta de R, tomamos a R' como R y regresamos al paso 1. Ahora la matriz de probabilidades de transición, $P(R)$, es la matriz mostrada en el ejemplo 9.4 y el sistema de ecuaciones (9.16) queda entonces en la forma:

$$\begin{aligned} b(R) &= 0{,}2v_0(R) - v_0(R) \\ b(R) &= 21 + 0{,}9v_0(R) \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones viene a ser:

$$b(R) = 9,88 \quad \text{y} \quad v_0(R) = -12{,}353$$

A continuación consideramos la política $R_0 : a_0 = 2,\ a_1 = 1$, con el fin de tener en cuenta todas las alternativas en los diferentes estados. Para esta política, de la expresión (9.17) obtenemos

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12{,}353 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12{,}353 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22{,}64 \\ 69{,}53 \end{bmatrix}$$

La tabla de pagos queda en la forma siguiente:

	Acciones	
Estados	1	2
0	9,88	22,24
1	69,53	9,88

En consecuencia, la política alterna es $R' : a_0 = 1,\ a_1 = 2$, que coincide con la política R, concluyendo, como era de esperarse (ejemplo 9.2), que la política óptima para el jugador consiste en llevar a su esposa a cenar únicamente cuando ella está de mal humor. □

9.6 Pagos con descuento

Anteriormente se midieron las políticas con base en el pago promedio, a largo plazo, por unidad de tiempo. Una medida alterna es hallar, a largo plazo, el pago total esperado con descuento. Para ello se tiene en cuenta un factor de descuento $\alpha = (1+k)^{-1}$, donde k es la tasa efectiva de interés por periodo de tiempo. Buscamos así una política que optimice a largo plazo el pago total esperado con descuento.

Para una política R, indicaremos por $V_i(n,R)$ el pago total esperado con descuento, generado por el proceso $\{(X_t, \Delta_t)\}_{t=0,1,\ldots}$, a partir del estado i durante n periodos de tiempo. Entonces tenemos la ecuación de valores repetitivos,

$$V_i(n,R) = v_i(1,R) + \alpha \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(a_i) V_j(n-1R) \quad i = 0,1,\ldots,M \tag{9.18}$$

donde $V_i(1,R) = b_i(a_i) = v_i(1R)$ y el segundo término de la derecha representa el pago total esperado con descuento, generado por el proceso durante los $n-1$ periodos restantes de tiempo. Vemos así que el pago $V_i(n,R)$ puede hallarse de manera iterativa. En forma matricial, la relación (9.18) puede escribirse en la forma,

$$V(n,R) = v(1,R) + \alpha P(R) V(n-1R) \tag{9.19}$$

donde $V(n,R)$ es el vector columna,

$$V(n,R) = [V_0(n,R), V_1(n,R), \ldots, V_M(n,R)]$$

y $v(1,R)$ es el vector definido en la sección 9.5. Mediante un desarrollo iterativo, la ecuación (9.19) puede escribirse como

$$V(n,R) = [I - \alpha P(R) + \cdots + \alpha^{n-1}P^{n-1}(R)]v(1,R) \tag{9.20}$$

En este punto observamos que, si no hay descuento, $v(n,R) = V(n,R)$ y las relaciones (9.11), (9.12) y (9.13) coinciden con las relaciones (9.18), (9.19) y (9.20), respectivamente. En el caso en que $\alpha < 1$, la ecuación (9.20) puede escribirse en la forma

$$V(n,R) = [I - \alpha^n P^n(R)][I - \alpha P(R)]^{-1}v(1,R) \tag{9.21}$$

si existe la inversa de la matriz, $I - \alpha P(R)$

Cuando $\alpha < 1$ y n tiende a infinito, la ecuación (9.19) converge a

$$V(R) = v(1,R) + \alpha P(R)V(R) \tag{9.22}$$

Con $V(R) = [V_0(R), V_1(R), \ldots, V_M(R)]$, donde $V_i(R)(i = 0,1,\ldots,M)$, puede interpretarse como el pago total esperado con descuento y a plazo indefinido, generado por el proceso $\{(X_t,\Delta_t)\}_{t=0,1,\ldots}$, a partir del estado i. Observamos que si existe la inversa de la matriz $I - \alpha P(R)$, entonces a partir de la ecuación (9.21) o de la (9.22) obtenemos

$$V(R) = [I - \alpha P(R)]^{-1}v(1,R) \tag{9.23}$$

El algoritmo usado para establecer la política óptima es similar al presentado en la sección 9.5. Los pasos a seguir son:

Paso 1. Para una política R, escogida arbitrariamente, se halla el vector de pagos $V(R)$.

Paso 2. En una tabla de pagos se sitúa el valor de $V(R)$ en las entradas que corresponden a los estados y acciones que señala la política R.

Paso 3. Se utiliza una política R_0, distinta de R, para calcular el vector de pagos

$$v(1,R_0) + \alpha P(R_0) \times V(R) \tag{9.24}$$

donde $V(R)$ es el vector encontrado en el paso 1. Luego las componentes de este vector se sitúan en las entradas que en la tabla de pagos corresponden a la política R_0. Este procedimiento se repite hasta completar la tabla de pagos.

Paso 4. De la tabla de pagos se selecciona la entrada más conveniente para cada estado y con base en esta selección se establece una política R'. Si la política R' no es idéntica a la política R, se regresa al paso 1, donde R' es considerada como R. Este procedimiento se repite hasta que se hallen dos políticas sucesivas que sean idénticas, encontrando entonces la política óptima.

Ejemplo 9.6. Una unidad electrónica se elabora en un mes por un equipo de operadores con o sin experiencia. Cuando los operadores con o sin experiencia usan las máquinas para elaborar esta unidad, las probabilidades de que ellas se dañen son 0,1 y 0,2, respectivamente. La ganancia unitaria del fabricante es 100 menos el costo de mano de obra y reparaciones. Una reparación cuesta 50 y el costo de mano de obra es 30 y 20, para los operadores con o sin experiencia, por cada unidad producida. Encuentre la política óptima que debe seguir el fabricante cuando el factor de descuento es $\alpha = 0,95$.

Solución. Sea $\{X_t\}_{t=0,1,\ldots}$ una cadena de Markov, donde X_0 indica el estado inicial de las máquinas y, en general, X_t señala el estado de las máquinas en el mes t. Asumimos que las máquinas se hallan en uno de los estados siguientes: 0 si están recién reparadas y 1 si han funcionado por lo menos un mes sin reparación.

El fabricante tiene a su disposición las acciones 1: asignar operadores sin experiencia y 2: asignar operadores con experiencia. Inicialmente consideramos la política R de asignar operadores con experiencia, para cada uno de los estados de las máquinas. Las matrices de las ganancias y de las probabilidades de transición correspondientes a esta política R vienen a ser entonces

$$B(R) = \begin{bmatrix} 70 & 20 \\ 20 & 70 \end{bmatrix}$$

y

$$P(R) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (9.2) obtenemos el vector de las ganancias $v(1, R) = [65, 65]$ y, posteriormente, de la ecuación (9.23) deducimos que el vector de las ganancias totales esperadas, a plazo indefinido, es dado por

$$V(R) = [1.300, 1.300]$$

A continuación consideramos la política R_0 de asignar operadores sin experiencia para cada uno de los estados de las máquinas. En este caso,

$$P(R_0) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$B(R_0) = \begin{bmatrix} 30 & 80 \\ 30 & 80 \end{bmatrix}$$

y

$$v(1, R_0) = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Así, de la expresión (9.24) tenemos

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 70 \end{bmatrix} + 0{,}95 \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.300 \\ 1.300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.305 \\ 1.305 \end{bmatrix}$$

En la siguiente tabla de pagos se agrupan las ganancias totales esperadas que se obtuvieron antes:

	Acciones	
Estados	1	2
0	1.305	1.300
1	1.305	1.300

Observando la tabla anterior vemos que la política R' consiste en seleccionar operadores sin experiencia, en ambos estados de las máquinas. Como esta política es diferente de la política R, tomamos a R' como la política R y retornamos al paso 1.

Las matrices de las ganancias y de las probabilidades de transición, correspondientes a la nueva política R, son

$$B(R) = \begin{bmatrix} 30 & 80 \\ 30 & 80 \end{bmatrix}$$

y

$$P(R) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Siguiendo un procedimiento similar al que se llevó a cabo cuando se aplicó anteriormente el paso 1, vemos que el vector de las ganancias totales esperadas, a plazo indefinido, es

$$V(R) = [1.400, 1.400]$$

Designamos ahora con R_0 la política de asignar operadores con experiencia para cada uno de los estados de las máquinas. En este caso,

$$P(R_0) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$B(R_0) = \begin{bmatrix} 20 & 70 \\ 20 & 70 \end{bmatrix}$$

y

$$v(1, R_0) = \begin{bmatrix} 65 \\ 65 \end{bmatrix}$$

Así, de la expresión (9.24) tenemos:

$$\begin{bmatrix} 65 \\ 65 \end{bmatrix} + 0{,}95 \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.400 \\ 1.400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.395 \\ 1.395 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la tabla de ganancias correspondiente a la segunda etapa del algoritmo tiene la forma:

	Acciones	
Estados	1	2
0	1.400	1.395
1	1.400	1.395

Como puede observarse, hemos encontrado la política óptima, que consiste en escoger operadores sin experiencia en cualquiera de los estados en que se encuentren las máquinas. También se observa que si el proceso de producción se inicia con máquinas recién reparadas o que se hallen funcionando por lo menos un mes sin reparación, la ganancia total esperada a largo plazo es 1.400. □

En el algoritmo presentado anteriormente no es necesario comenzar el procedimiento en el paso 1. En su lugar se puede escoger un conjunto inicial de valores y empezar el proceso iterativo con el paso 2.

Si no hay una base para seleccionar una política inicial en el paso 1, con frecuencia es conveniente comenzar el proceso iterativo con el paso 2, colocando $V(R) = 0$.

Ejemplo 9.7. Volviendo al proceso de producción tratado en el ejemplo 9.6, tome $V(R) = 0$ e inicie el proceso iterativo con el paso 2, para encontrar, con un factor de descuento $\alpha = 0{,}95$, la política óptima que debe seguir el fabricante.

Solución. Puesto que la ganancia máxima esperada e inmediata corresponde a la política R' de designar un equipo de operadores sin experiencia, para cada uno de los estados de las máquinas, vemos que $v(1, R') = [70, 70]$. Considerando a R' como R, el proceso iterativo continúa en la forma desarrollada en el ejemplo 9.6. □

9.7 Método de las aproximaciones sucesivas

Indicaremos con $V_i(n)$ el pago total esperado con descuento, generado por el proceso $\{(X_t, \Delta_t)\}_{t=0,1,\ldots}$ a partir del estado i y que se desarrolla durante n periodos de tiempo, cuando se sigue una política óptima. Para hallar el pago $V_i(n)$ empleamos la relación de los valores repetitivos,

$$V_i(r) = Opt_{a_i} \left\{ b_i(a_i) + \alpha \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(a_i) V_j(r-1) \right\} \qquad i = 0, 1, \ldots, M \quad r = 0, 1, \ldots, n \tag{9.25}$$

y procedemos como sigue. Hacemos $V_i(0) = 0$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, M$ y luego realizamos desplazamientos hacia atrás, estableciendo al comienzo de cada periodo la política óptima para el futuro.

A medida que el valor de n se incrementa, el pago $V_i(n)$ se aproximará al pago total esperado óptimo con descuento y, para n lo suficientemente grande, se obtendrá la política óptima. Como no existe procedimiento alguno para saber cuándo se ha llegado a la política óptima, en cualquier momento se puede recurrir al procedimiento visto en la sección 9.6 para averiguar si la política en curso es la óptima.

Finalmente, notamos que el factor de descuento α puede ser igual a 1 en los problemas con un número finito de periodos y debe ser menor que

1 en los problemas con un número infinito de periodos. De esta manera, cuando $\alpha < 1$ y n tiende a infinito se puede mostrar que el pago $V_i(n)$ converge a V_i, donde V_i señala el pago total esperado con descuento y a plazo indefinido, generado por el proceso a partir del estado i, cuando se sigue la política óptima.

Ejemplo 9.8. En el proceso de producción analizado en el ejemplo 9.6, calcule la ganancia total esperada, a partir de cualquier estado de las máquinas y por un lapso de n meses.

Solución. Para las acciones $k = 1$ y 2 y los estados $i = 0, 1$, las ganancias $V_i(1)$, $V_i(2)$ y $V_i(3)$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} V_i(1) &= \max\{b_i(1), b_i(2)\} = \max\{70{,}65\} = 70 \\ V_i(2) &= \max_k\{b_i(k) + 70\alpha\} = 70(1+\alpha) \end{aligned}$$

y

$$V_i(3) = \max\{b_i(k) + 70\alpha(1-\alpha) = 70(1+\alpha+\alpha^2)$$

Generalizando encontramos que la ganancia total esperada a partir de cualquier estado de las máquinas y por un lapso de n meses es

$$\begin{aligned} V_i(n) &= 70(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}) = 70\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \\ &= 1.400[1-(0{,}95)^n] \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Cuando n tiende a infinito obtenemos la ganancia total esperada a plazo indefinido $V_i = 1.400$; resultado al cual se llegó en el ejemplo 9.6.

Ejercicios

9.2 Modelo markoviano de decisión

9.3 Programación lineal y políticas óptimas

9.1 Plantee el problema de programación lineal que corresponde al problema de producción tratado en el ejemplo 9.3.

9.2 Use la programación lineal para hallar a largo plazo el costo promedio esperado por la operación de la represa (ejemplo 9.1). También establezca la política óptima que debe seguirse.

9.3 Resuelva por la programación lineal con $\alpha = 1$, el problema tratado en el ejemplo 9.6 y compruebe que la política óptima consiste en seleccionar operadores sin experiencia en cualquiera de los estados en que se encuentren las máquinas.

9.4 Durante cualquier periodo un cliente potencial llega a un sistema de colas con probabilidad 2/3. Si ya se encuentran dos personas en la línea, él deja el sistema de inmediato y nunca regresa; pero si hay menos de dos personas, él se convierte en un cliente real. Hay dos tipos de servicio. Si el cliente utiliza la tasa "lenta" de servicio, a un costo de 4 durante un periodo, será atendido y dejará el sistema durante el mismo periodo con probabilidad 3/5. Si el cliente utiliza la tasa "rápida" de servicio a un costo de 9 durante un periodo, será atendido y dejará el sistema, durante el mismo periodo, con probabilidad 4/5. En cada periodo llega máximo un cliente y es imposible atender a más de un cliente. Además, se obtiene una ganancia de 60 cuando se proporciona servicio a un cliente. Use la programación lineal para hallar a largo plazo el costo promedio esperado derivado de la atención al público. (Para calcular los costos de los servicios, cuando hay dos clientes en el sistema, tenga en cuenta el costo de la probabilidad de perder un cliente potencial).

9.4 Distribución de probabilidad estacionaria

9.5 Halle el costo promedio esperado mínimo por unidad de tiempo (ejemplo 9.3) cuando la máquina se remplaza en los estados 2 o 3.

9.6 Halle el costo promedio esperado mínimo por unidad de tiempo (ejemplo 9.3) cuando la máquina se remplaza en el estado 3 y se le hace un mantenimiento en el estado 2. Suponga que el costo de mantenimiento es 300 (incluyendo la producción perdida) y que luego la máquina pasa al estado 1.

9.7 Mediante la distribución de probabilidad estacionaria, halle a largo plazo el costo promedio esperado por la operación de la represa (ejemplo 9.1) cuando el agua se utiliza solo para generar potencia eléctrica.

9.8 Halle a largo plazo el costo promedio esperado de operatividad del sistema de colas descrito en el ejercicio 9.4 cuando los clientes utilizan solo la tasa lenta de servicio, si no hay clientes en el sistema.

9.9 Un peletero compra chaquetas a un costo de dos por 140 y las vende por 100 cada una. En cualquier mes dado, la probabilidad de una venta es 0,2; nunca vende más de una chaqueta al mes. Al final de cada mes, examina sus existencias; si no tiene chaquetas, y solamente en este caso, ordena dos unidades. Cualquier chaqueta en existencia es reacondicionada a un costo de 4, para ofrecerse en venta el mes siguiente. Halle la ganancia promedio mensual del peletero.

9.10 Suponga que, al rebajar el precio de venta, el peletero mencionado en el ejercicio 9.9 puede cambiar sus ventas durante un mes, de manera que tiene la probabilidad 0,1 de vender dos chaquetas (si hay dos disponibles), 0,2 de vender una chaqueta y 0,7 de no vender chaqueta alguna. Halle la máxima cantidad que el peletero podría rebajar al precio de cada chaqueta para que su ganancia esperada mensual no sea inferior a 0,8.

9.11 Un vendedor que trabaja en dos ciudades, A y B, está tratando de decidir qué política debe seguir para visitar las dos. En la mañana de cada día puede decidir quedarse en la ciudad que actualmente visita o viajar a la otra ciudad y emplear el día trabajando allí. Debido a las distancias entre A y B es imposible, para él, trabajar en las dos ciudades el mismo día. Cada día que trabaja en la ciudad A, hay una probabilidad 0,4 de hacer una venta; la probabilidad correspondiente a la ciudad B es 0,3. La comisión por una venta es 30 y el costo de transporte entre las ciudades es 4. El vendedor considera dos alternativas para cada ciudad, 1: permanecer en la ciudad hasta que haga una venta y luego ir a la otra ciudad, y 2: trabajar en la ciudad por un día y luego ir a la otra ciudad, haga o no una venta. Para cada una de las cuatro políticas posibles, halle la ganancia esperada diaria del vendedor, después de largo tiempo.

9.5 Mejoramiento de una política

9.12 Utilizando solamente el paso 1, del algoritmo presentado en esta sección, resuelva el problema planteado en el ejercicio 9.5.

9.13 Halle la ganancia promedio mensual del peletero mencionado en el ejercicio 9.9, cuando él sigue la política considerada allí.

9.14 En el proceso de producción tratado en el ejemplo 9.3, establezca la política más conveniente entre la mencionada allí y la considerada en el ejercicio 9.6.

9.15 Halle el costo promedio esperado durante tres meses, proveniente de la operación de la represa (ejemplo 9.1), cuando se sigue la política $R : a_0 = 1,\ a_1 = 2$.

9.16 A partir de la política R señalada en el ejercicio 9.15, resuelva el problema planteado en el ejercicio 9.2.

9.17 En el proceso de producción tratado en el ejemplo 9.3, establezca en qué estado es más conveniente remplazar la máquina, si se incurre en un costo de 300, 400 y 600 (incluyendo la producción perdida), cuando el remplazo se hace en los estados 0, 1 y 2, respectivamente.

9.18 El precio de cierto artículo fluctúa entre 10, 12 y 16, de mes a mes. Los estudios de mercadeo han pronosticado que, si durante cualquier mes el precio del artículo es 10, el mes siguiente será 10 o 12 con probabilidades 0,6 y 0,4 respectivamente; si el precio es 12, el mes siguiente será 10, 12 o 16 con probabilidades 0,2, 0,3 y 0,5 respectivamente, y si el precio es 16, el mes siguiente será 12 o 16 con probabilidades 0,9 y 0,1 respectivamente. Con el fin de maximizar las ganancias totales esperadas a largo plazo, establezca si el artículo debe venderse en el presente mes o en el mes siguiente.

9.19 Halle el costo mínimo esperado de operabilidad del sistema de colas (ejercicio 9.4) y la política que debe seguirse.

9.20 Halle la ganancia máxima diaria esperada del vendedor mencionado en el ejercicio 9.11 y la política que él debe seguir.

9.6 Pagos con descuento

9.21 Halle la ganancia promedio esperada durante tres meses, y a plazo indefinido, del fabricante mencionado en el ejemplo 9.6, cuando él sigue la política $R : a_0 = a_1 = 1$.

9.22 Halle el costo promedio esperado durante tres meses, y a plazo indefinido, por la operación de la represa (ejemplo 9.1), cuando se utiliza la política $R : a_0 = a_1 = 1$, con un factor de descuento $\alpha = 0,9$.

9.23 Halle la ganancia promedio esperada durante tres meses, y a plazo indefinido, del peletero mencionado en el ejercicio 9.9, cuando él sigue la política considerada allí, con un factor de descuento $\alpha = 0,95$.

9.24 Con un factor de descuento $\alpha = 0,8$, halle la ganancia esperada durante cuatro días, y a plazo indefinido, del vendedor mencionado en el ejercicio 9.11, cuando él escoge la alternativa 1 en ambas ciudades.

9.25 Con un factor de descuento $\alpha = 0,9$, halle el costo mínimo esperado de operabilidad del sistema de colas (ejercicio 9.4) y la política que debe seguirse.

9.26 Con un factor de descuento $\alpha = 0,9$, halle la política que debe seguir el esposo (ejemplo 9.2) para minimizar el costo total esperado causado por su afición al juego.

9.27 Con un factor de descuento $\alpha = 0,9$ y empezando con $V(R) = 0$, halle el costo mínimo esperado a plazo indefinido, por la operación de la represa (ejemplo 9.1).

9.28 Cuando una persona lleva su automóvil a un sitio determinado puede elegir entre 1: dejarlo en la calle o 2: dejarlo en un estacionamiento. Si lo deja en la calle, la probabilidad de que lo desvalijen es 0,2 y la probabilidad de una multa de 15 es 0,3. Dejarlo en un estacionamiento le cuesta 5 pero no lo desvalijan. Si el automóvil es desvalijado puede llevarlo a reparar, en cuyo caso no cuenta con él durante un día y le cuesta 50 en honorarios y transporte. También puede conducir su automóvil desvalijado, pero siente que la pérdida de respeto por sí misma tiene un valor aproximado de 9 al día. Con un factor de descuento $\alpha = 0,9$, halle la política óptima que debe seguir la persona propietaria del automóvil y el costo esperado diario que tiene por seguir esta política.

9.29 Con un factor de descuento $\alpha = 0,8$, y empezando con $V(R) = 0$, halle la ganancia máxima esperada, a plazo indefinido, del vendedor mencionado en el ejercicio 9.11.

9.7 Método de las aproximaciones sucesivas

9.30 Con un factor de descuento $\alpha = 0,9$, halle el costo total esperado, durante cuatro meses, proveniente de la operación de la represa (ejemplo 9.1), cuando se sigue una política óptima.

9.31 En el proceso de producción tratado en el ejemplo 9.3, halle el costo total esperado durante cuatro meses, cuando se sigue la política óptima y el factor de descuento es $\alpha = 0,9$.

9.32 Con un factor de descuento es $\alpha = 0,8$, halle la ganancia total esperada, durante cuatro días, del vendedor mencionado en el ejercicio 9.11, cuando él sigue la política óptima.

9.33 Halle el costo total esperado, durante tres meses, de la persona propietaria del automóvil (ejercicio 9.28), cuando ella sigue la política óptima.

Respuestas

Capítulo II

2.6	3
2.8	6
	762,50
2.10	2
	137,60
2.11	1
	1,05
2.15	Tipo 1
	Tipo 2
	Tipo 2
2.16	Tipo 2
	Tipo 1
	Tipo 1
2.17	No asegurar
	Asegurar
	Asegurar
2.18	No elaborar
	Elaborar
	No elaborar

Capítulo III

3.5	0,30
3.6	180
3.7	4
3.8	349
3.9	20
3.10	2 si $\theta < 1/2$
	32 si $\theta \geq 1/2$
3.13	Tipo 3
3.14	290
3.15	1
3.16	40
3.17	70
3.18	3,95
3.19	5/16
3.21	17,1

Capítulo IV

4.11	0,82
4.12	0
4.13	762,50
4.14	2.000
4.15	180
4.16	365
4.17	266
4.18	240,94

Capítulo V

5.3	a. 116
	b. 150
5.4	Sí
5.5	-2
	9,3
5.6	9
5.7	1.420
5.9	4.000
5.10	1.173,42
5.11	22.500
5.12	18

5.13	900
5.14	12.500

Capítulo VI

6.1	4.000
6.2	1.172,51
6.3	815,24
6.6	1.945
6.7	6.175
6.11	1
	810,99
6.12	0
	72

Capítulo VII

7.4	a. 1/3
7.5	a. 0,12
7.7	5.4
7.12	363,87
	163,49
7.13	60.000
	625
7.18	4
7.19	0
7.20	0
7.21	7

Capítulo VIII

8.3	9,2
8.4	12,2
8.6	X_1
8.7	X_1
8.10	Sí
8.12	a =0,50
	b = 0,46
8.13	1,52
8.14	3,67
8.15	1/3
8.16	319,68
8.17	106,64
8.18	1,22
8.19	5,08
8.20	42,42
8.21	1,70

Capítulo IX

9.2	23,46
9.4	9,77
9.5	247,06
9.6	200,62
9.7	31
9.8	9,77
9.9	0.8
9.10	32/3
9.11	8,86
	8,91
	7,85
	6,50

Bibliografía

[1] De Groot M. H. (1979), *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill.

[2] Hadley G. (1967), *Introduction to Probability and Statistical Decision Theory*, Holden-Day.

[3] Howard R. A. (1971),*Dynamic Probabilistic Systems*, vol. II, John Wiley & Sons, Inc.

[4] Hillier F. and Lieberman G. J. (2005), *Introduction to Operations Research*, McGraw-Hill.

[5] Jones J. M. (1977), *Introduction to Decision Theory*, Richard D. Irwin, Inc.

[6] Moreno L. G. (1992), *Cálculo de probabilidades*, Universidad Nacional de Colombia.

[7] Moreno L. G. (1993), *Procesos estocásticos*, Universidad Nacional de Colombia.

[8] Narragon E. A. (1980), *A Study Manual for Operations Research, Education and Examination Committees*, Society of Actuaries and Casualty Actuarial Society.

[9] Pratt J. W., Raiffa H., Schlaifer R. (1995), Introduction to Statistical Decision Theory, The MIT Press.

[10] Puterman M. L. (2005), *Markov Decision Processes*, John Wiley & Sons.

[11] Raiffa H. (1968), *Decision Analysis*, Addison-Wesley.

[12] Sasaki K. (1968), *Statistics for Modern Business Decision Marking*, Wadsworth Publishing Company, Inc.

Índice alfabético

Teoría de la decisión

Se imprimieron 300 ejemplares en octubre de 2010 en la Editorial Universidad Nacional de Colombia. En su composición se utilizaron los siguientes elementos: fuente serif romana 11 puntos, formato 16,5 x 24 cm, papel propalcote de 240 g para su carátula y bond de 75 g para las páginas interiores.