A Hélène, Nicolás y Sylvie

Índice general

PRÓLOGO

Este libro es un reimpresión de *Programación Lineal, métodos y programas*, publicado en 1997 por el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Tiene los mismos temas, algunas correcciones, ciertos cambios muy pequeños, un cambio de formato y algunos cambios de nombre. A lo largo del libro se utiliza muy poco el término Programación Lineal, se usa preferentemente **Optimización Lineal**, nombre más diciente sobre el tema del libro. Programación Lineal ha sido el nombre tradicional, pero se presta a confusión con programación de computadores o lenguajes de programación.

Puede ser usado como texto o como libro de referencia para un curso de Optimización Lineal para estudiantes de matemáticas, ingeniería, economía o administración. Para su estudio o lectura se requieren conocimientos elementales de Álgebra Lineal.

Dependiendo del interés del profesor o del lector, algunos temas pueden ser complementados y profundizados, otros pueden ser vistos más rápidamente. En el libro hay pocas demostraciones, pero en cambio están, por un lado los teoremas y proposiciones que justifican los métodos, y por otro lado hay bastantes ejemplos que muestran el desarrollo de los métodos y la aplicación de los teoremas.

Los temas tratados son los usuales: planteamiento de problemas, método gráfico, conjuntos convexos, teoremas de representación y optimalidad, método simplex y sus modificaciones, dualidad, problema del transporte y análisis de sensibilidad. Estos tópicos pueden ser vistos cómodamente en un semestre.

Aunque algunos temas podrían ser suprimidos, por ejemplo, conjuntos convexos, los teoremas de representación y optimalidad y el estudio de la dualidad, y de todas formas se alcanza a obtener una visión de la optimización lineal, ésta podría tener cierto sabor a receta.

Es conveniente hacer a mano ejemplos pequeños para poder personalizar los detalles de cada método y después sí comparar los resultados con los de los programas. En optimización lineal es muy fácil crear ejercicios, y si son de dos variables se pueden resolver también gráficamente.

En la página del autor, el lector encontrará programas para la mayoría de los métodos. Está la versión para DOS que venía con la primera edición. Además hay una versión para Windows cuya parte gráfica fue hecha por el ingeniero Pierre Torres a quien agradezco su colaboración.

También encontrará una fe de erratas del libro, que se irá completando a medida que los errores sean detectados. En esta página también está el código Fortran y otros documentos relacionados con el tema. Actualmente la dirección es:

`www.matematicas.unal.edu.co/~hmora/`

Si hay reorganización de las páginas de la Universidad, será necesario entrar a la página de la Universidad

`www.unal.edu.co`

ir a la Sede de Bogotá, la Facultad de Ciencias, el Departamento de Matemáticas y la página del autor.

En la versión para DOS, los resultados salen generalmente en un archivo y por lo tanto deben ser "vistos" con cualquier editor de archivos ASCII. Mediante el programa `leame` (`leame.exe`), se tiene acceso a la información sobre los diferentes programas. También se puede tener información sobre los programas "mirando" el archivo `pl.txt`.

Quiero agradecer a los evaluadores de este trabajo, a los estudiantes del curso Programación Lineal de las carreras de Ingeniería de Sistemas y de Matemáticas, en especial a Patricia Jaime. Las sugerencias, comentarios y correcciones de todos ellos, fueron muy útiles. También doy gracias al profesor Gustavo Rubiano, Director de Publicaciones de la Facultad de Ciencias, quien me animó a preparar esta edición y facilitó su publicación.

El texto fue escrito en LaTeX. Quiero también agradecer al profesor Rodrigo De Castro quien amablemente me ayudó a resolver las inquietudes y los problemas presentados.

El autor estará muy agradecido por los comentarios, sugerencias y correcciones enviados a:

`hmora@matematicas.unal.edu.co`   `hectormora@yahoo.com`

Finalmente, y de manera muy especial, agradezco a Hélène, Nicolás y Sylvie. Sin su apoyo, comprensión y paciencia no hubiera sido posible escribir este libro.

NOTACIÓN

$\mathcal{M}(m,n) = \mathbb{R}^{m\times n}$ = conjunto de matrices reales $m \times n$, o sea, de m filas y n columnas. Si $A \in \mathcal{M}(m,n)$, entonces A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} = elemento o entrada de la matriz A, en la fila i y en la columna j.

$\mathcal{M}(n,1) = \mathbb{R}^{n\times 1} = \{$ matrices columna de n componentes $\}$.

$\mathcal{M}(1,n) = \mathbb{R}^{1\times n} = \{$ matrices fila de n componentes $\}$.

$\mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$.

A^{T} = transpuesta de la matriz A.

$\mathbb{R}^n = \{\ (x_1, x_2, \dots, x_n\ ) : x_j \in \mathbb{R}\ \forall j\}$.

$\mathbb{R}^n := \mathcal{M}(n,1) = \mathbb{R}^{n\times 1}$, es decir:

$$x = (\ x_1, x_2, \dots, x_n\ ) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

$A_{i\cdot}$ = fila i-ésima de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$.

$A_{\cdot j}$ = columna j-ésima de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$.

$A^k = A^{(k)}$ = matriz A en la iteración k, $\ k = 0, 1, 2 \dots$

$(Q)^k =$ k veces el producto de la matriz Q por sí misma.

$Q^{-1} =$ inversa de la matriz Q

$n =$ número de variables.

$m =$ número de restricciones.

$p =$ $n - m =$ número de variables libres (problemas en la forma estándar).

$z =$ $c^{\mathrm{T}}x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n =$ función objetivo o función económica (generalmente para minimización).

$c =$ $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$ vector de costos.

z es acotado $\Leftrightarrow$ z es acotado inferiormente (problema de minimización).

$A_{i.}x =$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n =$ lado izquierdo de la restricción i.

$b_i =$ término independiente o lado derecho de restricción i.

$\min z :=$ minimizar z.

$\max z :=$ maximizar z.

$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i \Leftrightarrow x_i \geq y_i$ para todo i.

$x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0$ para todo i.

$\tilde{c}_j =$ costo reducido de x_j (denotado algunas veces $c_j - z_j$).

$\widehat{A} =$ matriz $(m+1) \times (n+1)$ obtenida a partir de A agregándole una última fila de costos reducidos y una última columna de términos independientes.

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ \tilde{c}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

$x \geq 0$ y $x \not> 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \exists x_i = 0$.

$$\begin{aligned} \min \ & z = c^{\mathrm{T}}x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{sujeto a} \begin{aligned} \min \ & z = c^{\mathrm{T}}x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$|S| =$ número de elementos del conjunto S.

$F =$ $\{\ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\ \}$ = conjunto admisible de un problema en la forma estándar.

$z^* =$ valor óptimo de z, cuando existe.

$S^* = S^*_f = \operatorname*{Argmin}_{x \in S} f(x) = \{\bar{x} \in S : f(\bar{x}) \leq f(x),\ \forall x \in S\}.$

$x^* = \operatorname*{argmin}_{x \in S} f(x)$ cuando $\operatorname*{Argmin}_{x \in S} f(x) = \{x^*\}.$

$|C| = \sharp(C) =$ cardinal del conjunto C.

En la escritura de numeros decimales, los enteros están separados de los decimales por medio de un punto. No se usa la notación española (los enteros están separados de los decimales por una coma). No se utiliza un símbolo para separar las unidades de mil de las centenas.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La optimización lineal o programación lineal tiene como objetivo optimizar (minimizar o maximizar) funciones lineales, de varias variables, con restricciones (igualdades o desigualdades), también lineales.

La optimización lineal estudia y resuelve problemas dados por modelos matemáticos deterministas, con hipótesis de linealidad, aditividad y de no negatividad de las variables.

Se entiende por modelo matemático una descripción en términos matemáticos, lo más fiel posible, de una realidad.

El término determinista indica un conocimiento exacto y preciso de los coeficientes utilizados en la función objetivo y en las restricciones. Esta condición parece ser muy extrema y poco práctica, sin embargo, el análisis de sensibilidad permite usar la optimización lineal en los casos de datos no muy precisos.

Cuando la función objetivo no es lineal sino cuadrática, se trata entonces de optimización cuadrática. En general, si la función objetivo o las restricciones no son lineales se habla de optimización no lineal.

La hipótesis de aditividad indica que el efecto total es obtenido por la suma de los efectos particulares de cada variable.

Veamos a continuación algunos ejemplos típicos de problemas reales cuyo modelo matemático es un problema de optimización lineal.

1.1. Un problema de asignación de recursos

Una fábrica elabora dos productos diferentes P_1 , P_2 y utiliza tres máquinas diferentes M_1 , M_2 , M_3 . Ambos productos requieren el uso, sin importar el orden, de las tres máquinas. Cada unidad del producto P_1 requiere una hora en cada una de las tres máquinas. Cada unidad del producto P_2 requiere una hora en la máquina M_1 y dos horas en la máquina M_2 . Las disponibilidades mensuales de las máquinas M_1 , M_2 , M_3 son 400, 580 y 300 horas, respectivamente. La materia prima necesaria para la fabricación de los productos es muy fácil de obtener y se consigue en cantidades tan grandes que se pueden suponer ilimitadas.

Después de hacer el cálculo de todos los gastos necesarios para la fabricación, publicidad, distribución, comercialización y teniendo en cuenta el precio de venta, se obtiene que el beneficio por cada unidad del producto P_1 es \$1000. Para el producto P_2 el beneficio unitario es \$1400.

Al estudiar la demanda actual para los dos productos, la compañía piensa que puede vender toda su producción. El gerente desea organizar su producción para que ésta sea óptima.

1.1.1. Modelación del problema

A partir del momento en que se desea representar un problema por un modelo matemático, lo primero que se necesita es precisar lo que se busca, es decir, hay que definir las variables del problema.

En el problema anterior, la adecuada organización de la producción se traduce por el conocimiento del número de unidades de cada producto que hay que fabricar mensualmente.

Sean:

$x_1 =$ número de unidades del producto P_1 que deben ser fabricadas cada mes.

$x_2 =$ número de unidades del producto P_2 que deben ser fabricadas cada mes.

Una vez definidas las variables, se necesita expresar la función objetivo o función económica utilizando estas variables.

En este ejemplo, la compañía desea maximizar el beneficio neto, es decir:

$$\text{maximizar } z = 1000x_1 + 1400x_2.$$

Es claro que las variables no pueden tomar todos los valores posibles, en este ejemplo hay que tener en cuenta la disponibilidad mensual de las máquinas.

La máquina M_1 es usada una hora por cada unidad del producto P_1 y una hora por cada unidad del producto P_2. Su disponibilidad es de 400 horas al mes. Esto se puede expresar mediante la siguiente desigualdad

$$x_1 + x_2 \leq 400.$$

Cada unidad del producto P_1 requiere una hora en la máquina M_2. Cada unidad del producto P_2 requiere dos horas en esta máquina. Cada mes hay 580 horas disponibles en la máquina M_2. Esta restricción se puede expresar:

$$x_1 + 2x_2 \leq 580.$$

Finalmente, para la máquina M_3 se tiene:

$$x_1 \leq 300.$$

Es claro que las variables x_1, x_2 no pueden tomar valores negativos, ya que no tiene sentido hablar, por ejemplo, de producir -5 unidades del producto P_2; entonces

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

o también

$$x_i \geq 0, \ i = 1, 2,$$

o simplemente

$$x \geq 0.$$

La no negatividad de las variables es una restricción común a casi todos los problemas de optimización lineal.

En este problema se puede pensar que las variables x_1, x_2 deben tomar valores enteros (no tiene sentido producir 249.2 unidades del producto P_1). Sin embargo, puesto que se trata de números relativamente grandes y los métodos usuales de optimización lineal suponen que las variables pueden tomar valores no enteros, se puede hacer la aproximación de un número no entero al número entero más próximo. Es decir, si al resolver el problema se obtiene que la producción óptima es de 75.8 y de 249.2 se puede tomar como resultado óptimo $x_1 = 76$, $x_2 = 249$.

Es obvio que si los valores de las variables y de las cantidades utilizadas en el problema son pequeños, es muy importante tener en cuenta que las variables deben ser enteras (por ejemplo, no se puede aproximar tan fácilmente una producción de 2.6 cohetes espaciales a tres). En este caso se tratará de un problema de optimización entera.

A lo largo de estas notas siempre se supondrá, salvo mención expresa de lo contrario, que los valores de las variables pueden ser no enteros y que en los casos en que deberían ser enteros, se trata de cantidades relativamente grandes, que permiten aproximar el resultado final por valores enteros.

Hechas estas aclaraciones, el modelo final del problema es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrrl}
 & \max & z = 1000x_1 + 1400x_2 & \\
\text{sujeto a} & & & \\
 & x_1 + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1 + & 2x_2 & \leq 580 \\
 & x_1 & & \leq 300 \\
 & & x & \geq \ \ 0.
\end{array}
$$

Con el fin de hacer más compacta la presentación, sin perder precisión, se omitirá de aquí en adelante "sujeto a", o a veces, "tal que", pero siempre el significado será: minimizar una función o valor z que depende de $x_1, \ldots, x_n$, donde además, x está sujeto a las restricciones que siguen a la función objetivo.

1.2. El problema del transporte

Una compañía elabora un producto en dos fábricas F_1, F_2 y tiene tres centros de distribución D_1, D_2, D_3. La capacidad máxima de producción semanal de las fábricas F_1, F_2 es de 100 y 150 unidades. Las demandas semanales en los centros de distribución son 70, 80 y 90 unidades. Los costos unitarios de transporte de las fábricas a los centros de distribución están dados en la siguiente matriz (en pesos). Las filas corresponden a las fábricas y las columnas a los destinos.

$$
\begin{bmatrix} 15 & 18 & 24 \\ 32 & 17 & 11 \end{bmatrix}
$$

La compañía desea organizar de la mejor manera posible el transporte de su producto.

Sea $x_{ij} =$ número de unidades del producto que deben ser llevadas semanalmente de la fábrica F_i al centro de distribución D_j, donde $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

La función objetivo está dada por la minimización del costo del transporte:

$$\text{minimizar } z = 15x_{11} + 18x_{12} + 24x_{13} + 32x_{21} + 17x_{22} + 11x_{23}.$$

Hay dos clases de restricciones fuera de las de no negatividad: restricciones con respecto a la producción y restricciones con respecto a la demanda. Las restricciones con respecto a la producción son:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 150. \end{aligned}$$

Restricciones con respecto a la demanda:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 70, \\ x_{12} + x_{22} &= 80, \\ x_{13} + x_{23} &= 90. \end{aligned}$$

Restricciones de no negatividad:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para todo } i \text{ y para todo } j.$$

En resumen:

$$\begin{aligned} \min z = 15x_{11} + 18x_{12} + 24x_{13} + 32x_{21} &+ 17x_{22} + 11x_{23} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 150 \\ x_{11} + x_{21} &= 70 \\ x_{12} + x_{22} &= 80 \\ x_{13} + x_{23} &= 90 \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \text{para todo } i, j. \end{aligned}$$

1.3. Un problema de dieta

Un ama de casa desea hacer un almuerzo equilibrado utilizando los siguientes productos: carne, papas, habichuela, leche y guayaba. Los precios por kilo de estos alimentos son respectivamente: \$700, \$80, \$250, \$70 y \$80. Aquí estamos suponiendo que la leche se vende por kilos, o lo que es aproximadamente lo mismo, que un litro de leche pesa un kilo. La familia está compuesta por 6 personas y cada persona debe consumir 800 calorías (en el almuerzo). Para que la alimentación sea equilibrada debe estar compuesta de 20 % de proteínas, 30 % de grasas, 50 % de glúcidos o carbohidratos. Estos porcentajes están dados con respecto a la materia seca, es decir, sin tener en cuenta el agua contenida en los alimentos. Obviamente, hay muchas más condiciones que se deben tener en cuenta y aquí se hace una simplificación para facilitar el planteamiento del problema. En la siguiente tabla se expresa la composición de cada alimento y su aporte calórico.

	% Proteínas	% Grasas	% Glúcidos	% Agua	Calorías por kilo
Carne	10	10	0	80	1300
Papas	2	0	20	78	880
Habichuelas	1	0	5	94	240
Leche	5	3	5	87	670
Guayaba	1	0	15	84	640

El ama de casa desea saber cómo organizar su mercado de tal forma que se cumplan las restricciones nutricionales y que, además, se minimice el costo.

Sean:

$x_1 =$ cantidad (kilos) de carne que hay que comprar para el almuerzo de las seis personas.

$x_2 =$ cantidad (kilos) de papa que hay que comprar...

$x_3 =$ cantidad (kilos) de habichuela que hay que comprar...

$x_4 =$ cantidad (kilos) de leche que hay que comprar...

$x_5 =$ cantidad (kilos) de guayaba que hay que comprar...

Función objetivo:

$$\min z = 700x_1 + 80x_2 + 250x_3 + 70x_4 + 80x_5.$$

Cantidad de calorías:

$$1300x_1 + 880x_2 + 240x_3 + 670x_4 + 640x_5 = 4800.$$

Porcentaje de proteínas:

$$\text{cantidad de proteínas} = 0.2(\text{cantidad total de materia seca})$$

$$\begin{aligned}0.10x_1 + 0.02x_2 + 0.01x_3 + 0.05x_4 + 0.01x_5 =& \\ &0.2(0.20x_1 + 0.22x_2 + 0.06x_3 + 0.13x_4 + 0.16x_5).\end{aligned}$$

Multiplicando por 100 ambos lados de la igualdad:

$$10x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 \ = 0.2(20x_1 + 22x_2 + 6x_3 + 13x_4 + 16x_5).$$

Porcentaje de grasas:

$$10x_1 + 3x_4 = 0.3(20x_1 + 22x_2 + 6x_3 + 13x_4 + 16x_5).$$

Porcentaje de glúcidos:

$$20x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 15x_5 = 0.5(20x_1 + 22x_2 + 6x_3 + 13x_4 + 16x_5).$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

En resumen:

$$\min z = 700x_1 + 80x_2 + 250x_3 + 70x_4 + 80x_5$$

$$\begin{aligned}1300x_1 + 880x_2 + 240x_3 + 670x_4 + 640x_5 &= 4800\\ 6x_1 - 2.4x_2 - 0.2x_3 + 2.4x_4 - 2.2x_5 &= 0\\ 4x_1 - 6.6x_2 - 1.8x_3 - 0.9x_4 - 4.8x_5 &= 0\\ -10x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 1.5x_4 + 7x_5 &= 0\\ x &\geq 0.\end{aligned}$$

Con un poco de observación se puede ver que la última restricción es el inverso aditivo de la suma de la segunda y tercera restricción, por lo tanto se puede suprimir esta última restricción.

Por lo general, al plantear un problema no es prioritario tratar de ver si hay restricciones redundantes o de averiguar si el problema es consistente (hay puntos que cumplen todas las restricciones) o inconsistente. Estos aspectos deben resultar durante la solución del problema. Si el planteamiento del problema permite inmediata y fácilmente suprimir restricciones redundantes o afirmar la inconsistencia, sería una tontería no hacerlo.

Plantear problemas de OL puede ser algo muy fácil, pero también llega a ser muy complicado. Algunos problemas no parecen ser de OL, pero mediante cambios ingeniosos pueden serlo. Para algunos "usuarios" de la OL, el planteamiento de problemas es uno de los temas más importantes, ya que requieren plantear problemas, entrar los datos a un computador e interpretar los resultados. Plantear problemas requiere, entre otras cosas, mucha práctica, intuición, conocimiento del tema del problema y obviamente un razonamiento consistente.

No parece posible llegar a conocer absolutamente todo sobre la modelación de problemas, pero sí se puede adquirir habilidad suficiente para enfrentar con éxito una gran cantidad de los problemas más corrientes o semejantes a ellos.

EJERCICIOS

1.1. Una cooperativa agrícola debe planificar las siembras en n fincas. Para la finca i , $i = 1, ..., n$, se conoce:

S_i : superficie (ha) de la finca.

A_i : volumen (m^3) de agua disponible por día.

Es posible sembrar m clases de cultivos. Para el cultivo j , $j = 1, ..., m$, se conocen los siguientes datos:

H_j : superficie máxima total (ha) que se puede sembrar.

C_j : consumo diario de agua (m^3) por hectárea.

T_j : número de toneladas cosechadas en cada hectárea.

P_j : precio de venta (\$) de cada tonelada.

I_j : cantidad inicial (\$) que se debe invertir en cada hectárea.

La compañía desea conocer x_{ij}, el número de hectáreas de la finca i dedicadas al cultivo j, si se dispone inicialmente de M pesos para la inversión inicial y se desea maximizar la ganancia (venta$-$inversión inicial). Plantee este problema de OL.

1.2. Un campesino desea planear su cultivo de maíz por un periodo de 3 años. Al empezar el primer año tiene a kilos de granos de maíz y se sabe que al sembrar un kilo de granos de maíz, al cabo de un año, se obtienen b ($b > 1$) kilos de maíz. Este campesino tiene mucha experiencia y sabe o puede prever g_i, $i = 1, ..., 4$, la ganancia neta correspondiente a la venta de un kilo de maíz al empezar el año i. Al iniciar cada uno de los tres años el campesino vende una parte del maíz disponible y siembra el resto. Al finalizar el tercer año, o sea, al empezar el cuarto año, él vende todo el maíz disponible. El campesino desea saber cuántos kilos debe vender y cuántos sembrar al comenzar cada uno de los tres años de tal manera que maximice sus ganancias. Plantee el anterior problema de OL.

1.3. Una compañía metalúrgica fabrica una aleación de n metales. Esta aleación debe tener exactamente los porcentajes $p_1, p_2, ..., p_n$ de esos n metales. Como la aleación está compuesta únicamente de estos n metales, entonces $p_1 + p_2 + ... + p_n = 100$. Es posible conseguir en el mercado local m clases de chatarra que tienen única y exactamente estos n metales, pero en otros porcentajes. Después de un minucioso estudio se obtuvieron los valores q_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, correspondientes al porcentaje del metal j en la chatarra clase i. Como cada una de estas chatarras contiene única y exclusivamente estos metales, entonces $q_{i1} + q_{i2} + ... + q_{in} = 100$, para todo valor de i. Los costos, por tonelada, de las clases de chatarra son: c_1, c_2, ..., c_m. La compañía desea conocer los porcentajes x_1, x_2, ..., x_m, de cada clase de chatarra, que debe tener la aleación, para que ésta tenga un costo mínimo. Plantee el anterior problema de OL.

1.4. Una compañía de vigilancia evaluó sus necesidades de vigilantes, por periodos de 4 horas, en un gran conjunto residencial, de la siguiente manera:

Periodo			Cantidad
2 a.m.	a	6 a.m	34
6 a.m.	a	10 a.m	48
10 a.m.	a	2 p.m	37
2 p.m.	a	6 p.m	35
6 p.m.	a	10 p.m	32
10 p.m.	a	2 a.m	30

Cada vigilante trabaja 8 horas al día, pero de manera continua. La compañía desea organizar la distribución de sus vigilantes de tal forma que el número total de vigilantes sea mínimo. Plantee el anterior problema de OL.

1.5. El señor Ramón Martínez tiene un negocio de distribución de huevos frescos (menos de 7 días), en una pequeña bodega cerca de su casa en Bogotá. Allí vende al por mayor y al detal, de lunes a viernes, de 8 a.m. a 4 p.m. Todos sus proveedores son amigos o familiares, que viven en un pueblo del oriente cundinamarqués, y le entregan, de 7 a 8 a.m., la cantidad solicitada para cada día por don Ramón, garantizándole que los huevos son súper frescos (menos de 48 horas). La mayoría de las ventas las hace a hoteles, hospitales y cadenas de restaurantes. Aunque solamente lleva unos meses con este negocio, ya puede predecir, con bastante precisión, el número de cajas de huevos vendidas cada día de la semana y el precio al que él compra cada huevo.

	Cantidad	Precio ($)
Lunes	520	60
Martes	680	70
Miércoles	450	85
Jueves	800	80
Viernes	1500	90

De todas maneras don Ramón vende los huevos a $100. Las cajas de huevos miden 30 cm. $\times$ 35 cm. $\times$ 40 cm. En su bodega, de noche, hay espacio para guardar 2000 cajas. Durante el día hay mucho más espacio pues no están las dos busetas que su cuñado deja por las noches en la bodega. Para garantizar que los huevos que él vende sean frescos, don Ramón tomó la determinación de no dejar huevos en la bodega entre el viernes en la tarde y el lunes en la mañana. Inicialmente don

Ramón pagaba un vigilante para las noches y los fines de semana, pero un vecino, que trabaja en una compañía de seguros, lo convenció para asegurar su mercancía y así no tener que pagar vigilante. Don Ramón debe pagar \$10 por cada caja (de 180 huevos) y por noche, esto quiere decir, por ejemplo, que no paga nada por las noches de viernes, sábado y domingo. Para maximizar la ganancia, pidió consejo a su hijo Ramoncito, quien estudia en la universidad, y precisamente está tomando un curso de OL. Como esta materia es nueva para él, pidió ayuda a su profesor, quien no le resolvió el problema, pero le sugirió plantearlo fácilmente con las siguientes variables: $x_1:$ número de cajas de huevos que compra el lunes; $x_2:$ número de cajas que compra el martes; ... $x_5:$ número de cajas que compra el viernes; $y_1:$ número de cajas que quedan en la bodega el lunes en la noche; $y_2:$ número de cajas que quedan en la bodega el martes en la noche; ... $y_4:$ número de cajas que quedan en la bodega el jueves en la noche. Plantee el anterior problema de OL.

1.6. Un negociante de frutas y verduras desea mandar tomate, zanahoria, manzana y maracuyá, de Bogotá a Villavicencio. Para mandar estos productos tiene la posibilidad de utilizar tres vehículos: un camión, un furgón y una volqueta. Las capacidades de estos vehículos son:

	peso (toneladas)	volumen (m^3)
camión	20	12
furgón	15	7
volqueta	25	6

El tomate y el maracuyá vienen en cajas de madera, la zanahoria viene en bultos y las manzanas vienen en cajas de cartón: 20 manzanas por caja. En la siguiente tabla aparecen los valores de: peso de cada paquete (kilos), volumen necesario para cada paquete (cm^3), beneficio por paquete (pesos) y número máximo de paquetes de cada producto.

	peso	volumen	beneficio	cantidad
tomate (caja de madera)	20	50000	2000	1000
zanahoria (bulto)	60	80000	3000	500
maracuyá (caja de madera)	15	50000	1500	2000
manzana (caja de cartón)	6	20000	2500	500

Plantee el anterior problema de OL, para maximizar el beneficio total.

1.7. Un negociante desea transportar m productos P_1, P_2,..., P_m, entre dos ciudades, para lo cual hay n medios de transporte, T_1, T_2,..., T_n. Para cada transporte T_j se conoce:

c_j : capacidad máxima en peso (ton.).

v_j : capacidad máxima en volumen (m^3).

Para cada producto P_i se conoce:

p_i : peso unitario (ton.).

u_i : volumen unitario (m^3).

b_i : beneficio unitario ($).

d_i : disponibilidad máxima (unidades).

Plantee el anterior problema de OL, para maximizar el beneficio total.

Capítulo 2

DIFERENTES FORMAS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN LINEAL

Los problemas de optimización lineal pueden ser problemas de minimización o de maximización; las restricciones pueden ser igualdades, desigualdades $\geq$, o desigualdades $\leq$. Generalmente las variables son no negativas, pero en algunos casos pueden ser no restringidas. Sin embargo, por convención, se supone que todos los problemas son de minimización y que las desigualdades, cuando las haya, siempre son de la forma $\geq$. Obviamente, se hubiera podido tomar la convención contraria, es decir, problemas de maximización y desigualdades $\leq$.

Los problemas de optimización lineal pueden ser planteados en alguna de las siguientes formas, algunas de las cuales son casos particulares de otras. Como se verá más adelante, mediante modificaciones o artificios, es posible convertir un problema de una forma a otra forma.

En general, n indica el número de variables y m el número de restricciones. Se designará por M el conjunto de enteros $\{1, 2, \ldots, m\}$ y por N el conjunto de enteros $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2.1. Forma general

Como su nombre lo indica es el caso más general, algunas restricciones son igualdades y otras desigualdades; algunas variables deben ser no negativas y otras no tienen restricciones.

$$\text{minimizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n &\geq b_i, \quad i \in M_1 \subseteq M \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n &= b_i \quad i \in M \setminus M_1 \\ x_j &\geq 0, \quad j \in N_1 \subseteq N \\ x_j &\in \mathbb{R}, \quad j \in N \setminus N_1. \end{aligned}$$

M_1	es el conjunto de índices de las restricciones de la forma $\geq$.
$M \setminus M_1$	es el conjunto de índices de las restricciones igualdades.
N_1	es el conjunto de índices de las variables no negativas.
$N \setminus N_1$	es el conjunto de índices de las variables no restringidas.

Utilizando la notación matricial, un problema de optimización lineal en la forma general es:

$$\begin{aligned} &\min z = c^{\mathrm{T}}x \\ &\qquad A_i.x \geq b_i, \quad i \in M_1 \subseteq M \\ &\qquad A_i.x = b_i, \quad i \in M \setminus M_1 \\ &\qquad x_j \geq 0, \quad j \in N_1 \subseteq N \\ &\qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad j \in N \setminus N_1. \end{aligned}$$

2.2. Forma mixta

Es un caso particular la forma anterior, cuando todas las variables son no negativas, es decir, cuando $N_1 = N$.

$$\begin{aligned} &\min z = c^{\mathrm{T}}x \\ &\qquad A_i.x \geq b_i, \quad i \in M_1 \subseteq M \\ &\qquad A_i.x = b_i, \quad i \in M \setminus M_1 \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned}$$

2.3. Forma canónica

Esta forma es un caso particular de la forma mixta, cuando todas las restricciones son desigualdades, es decir, cuando $M_1 = M$.

$$\begin{aligned} \min z = c^{\mathrm{T}} x & \\ A_{i\cdot} x \geq b_i, & \quad \text{para todo } i \\ x \geq 0, & \end{aligned}$$

y de manera aún más compacta:

$$\begin{aligned} \min z = c^{\mathrm{T}} x & \\ Ax \geq b & \\ x \geq 0. & \end{aligned}$$

2.4. Forma estándar o típica

Esta forma es un caso particular de la forma mixta, cuando todas las restricciones son igualdades, es decir, cuando $M_1 = \emptyset$ y $M \setminus M_1 = M$.

$$\begin{aligned} \min z = c^{\mathrm{T}} x & \\ A_{i\cdot} x = b_i, & \quad \text{para todo } i \\ x \geq 0, & \end{aligned}$$

y de manera aún más compacta:

$$\begin{aligned} \min z = c^{\mathrm{T}} x & \\ Ax = b & \\ x \geq 0. & \end{aligned}$$

2.5. Equivalencia entre las diferentes formas

Antes de considerar la equivalencia entre las formas es preciso tener en cuenta dos aspectos.

i) Todo problema de maximización puede ser considerado como un problema de minimización cambiando el signo a la función objetivo, es decir, cambiando el signo a los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Dicho de manera más precisa: los dos problemas siguientes

$$\begin{array}{c} \min z = c^{\mathrm{T}}x \\ x \in S \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{c} \max \zeta = -c^{\mathrm{T}}x \\ x \in S \end{array}$$

son equivalentes, en el siguiente sentido: un vector x es solución óptima de un problema si y solamente si es solución óptima del otro problema. Es obvio que el valor óptimo de z es el inverso aditivo del valor óptimo de ζ.

ii) Una desigualdad de la forma $\leq$, puede ser convertida en una desigualdad de la forma $\geq$, multiplicando ambos miembros de la desigualdad por -1.

Para ver la equivalencia entre las diferentes formas es necesario poder convertir igualdades en desigualdades y viceversa, y también convertir variables sin restricciones en variables no negativas.

1. Una desigualdad

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i,$$

se puede convertir en una igualdad mediante la introducción de una variable de holgura x_{n+1}, que debe ser no negativa. La idea es muy sencilla: al lado izquierdo hay que quitarle una cantidad no negativa para que quede igual al lado derecho.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i.$$

Si la desigualdad es de la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i,$$

la variable de holgura x_{n+1}, no negativa, entra acompañada del signo $+$.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Por cada desigualdad se introduce una variable de holgura diferente.

2. Una igualdad se puede expresar como dos desigualdades, es decir:

$$A_{i\cdot}x = b_i \qquad \text{es equivalente a} \qquad \begin{array}{r} A_{i\cdot}x \geq b_i, \\ -A_{i\cdot}x \geq -b_i. \end{array}$$

3. Una variable sin restricción se puede expresar como la diferencia de dos variables no negativas, es decir:

$$x_j \in \mathbb{R}$$

se puede reemplazar por

$$x_j = x'_j - x''_j, \quad x'_j, x''_j \geq 0.$$

Este reemplazo debe hacerse en todas las partes del problema donde intervenga esta variable, es decir, en las restricciones y en la función objetivo.

Estas modificaciones son muy útiles y algunas veces indispensables. El método simplex , la herramienta más usada de la optimización lineal, resuelve únicamente problemas planteados en la forma estándar (igualdades y variables no negativas). El estudio de la dualidad se hace, por lo general, para problemas en la forma canónica (desigualdades y variables no negativas).

Ejemplo 2.1.

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_1 \;,\; x_3 \;,\; x_4 &\geq 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Al convertirlo a la forma general de minimización se tiene:

$$\min \quad z = -x_1 - 2x_2 - x_4$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 &\geq -40 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_1 \;,\; x_3 \;,\; x_4 &\geq 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se obtiene la forma mixta cuando todas las variables son no negativas:

$$\min \quad z = -x_1 - 2x'_2 + 2x''_2 - x_4$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x'_2 + 2x''_2 - x_3 - 5x_4 &\geq -40 \\ x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + x_3 + 4x_4 &= 30 \\ x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_1 \;,\; x'_2 \;,\; x''_2 \;,\; x_3 \;,\; x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Al introducir variables de holgura se tiene el problema en la forma estándar:

$$\begin{array}{lrl} \min & z = -x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \qquad - \ x_4 & \\ & -x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - x_3 - 5x_4 - x_5 \qquad & = -40 \\ & x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3 + 4x_4 \qquad & = \ \ 30 \\ & x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + x_3 \qquad - x_6 & = \ \ 15 \\ & x_1 \ , \ \ x_2' \ , \ \ x_2'' \ , \ x_3 \ , \ \ x_4 \ , \ x_5 \ , \ x_6 & \geq \ \ 0. \end{array}$$

Se podría cambiar el nombre de las variables para tener, por ejemplo, y_1, y_2, ..., y_7. Por otro lado, si el objetivo final era llevar el problema inicial a la forma estándar, entonces la restricción

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 40,$$

se hubiera podido convertir directamente en igualdad sumando la variable de holgura x_5

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 40. \ \diamond$$

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios haga los cambios necesarios para colocar el problema propuesto en cada una de las cuatro formas de minimización.

2.1. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 \leq 3$, $2x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \geq 0$.

2.2. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 \leq 3$, $2x_1 + x_2 = 2$, $x \geq 0$.

2.3. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 = 3$, $2x_1 + x_2 = 2$, $x \geq 0$.

2.4. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 \geq 3$, $2x_1 + x_2 \geq 2$, $x \geq 0$.

2.5. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 \leq 3$, $2x_1 + x_2 \leq 2$, $x \geq 0$.

2.6. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 = 3$, $2x_1 + x_2 = 2$, $x \leq 0$.

2.7. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$, sujeto a $x_1 + x_2 = 3$, $2x_1 + x_2 = 2$.

2.8. Maximizar $z = \min\{x_1, x_2\}$, sujeto a $x_1 + x_2 \leq 3$, $2x_1 + x_2 \leq 2$, $x \geq 0$.

2.9. Maximizar $z = \min\{3x_1, 4x_2\}$, sujeto a $x_1 + x_2 \leq 3$, $2x_1 + x_2 \leq 2$, $x \geq 0$.

2.10. Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$, sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$, $2x_1 + x_2 \geq 2$, $x_1 + x_3 = 2$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Capítulo 3

MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico sirve para resolver, con una precisión aceptable, una gran parte de los problemas de optimización lineal de dos variables. Tiene dos etapas importantes, la primera es la determinación de la región admisible o realizable o factible (el conjunto de puntos que cumplen todas las restricciones) y la segunda es la búsqueda del punto óptimo (o de los puntos óptimos) en la región admisible.

La determinación de la región admisible es muy sencilla, pues se trata de obtener la intersección de semiplanos (desigualdades) y de rectas (igualdades). Como generalmente las variables son no negativas, el estudio se hace únicamente en el primer cuadrante. El conjunto admisible estará entonces limitado por semirrectas (en este caso el conjunto admisible no es acotado) o por segmentos de recta. Los valores de las coordenadas de los vértices se pueden determinar gráficamente o de manera más precisa, analíticamente, calculando la solución de las dos ecuaciones (rectas) que determinan el vértice (un vértice corresponde a la noción, que se verá posteriormente, de punto extremo de un convexo).

Una vez hallada la región admisible se procede a buscar el óptimo. Se necesita entonces saber como varía la función objetivo y, sobre todo, en qué dirección mejora. Una manera sencilla consiste en dar dos valores arbitrarios diferentes a z y dibujar las rectas (paralelas) correspondientes. Esto permite saber en qué sentido mejora el valor de z. Para cualquier otro valor de z, la recta correspondiente será paralela. Únicamente queda por encontrar una de estas rectas paralelas, con el mejor valor posible de z y que pase al menos por un punto de la región admisible.

3.1. Región acotada

Ejemplo 3.1.

$$
\begin{array}{rrcl}
\max & z = & x_1 + 1.4x_2 & \\
& & x_1 + \quad x_2 & \leq 400 \\
& & x_1 + \quad 2x_2 & \leq 580 \\
& & x_1 & \leq 300 \\
& & x & \geq \quad 0.
\end{array}
$$

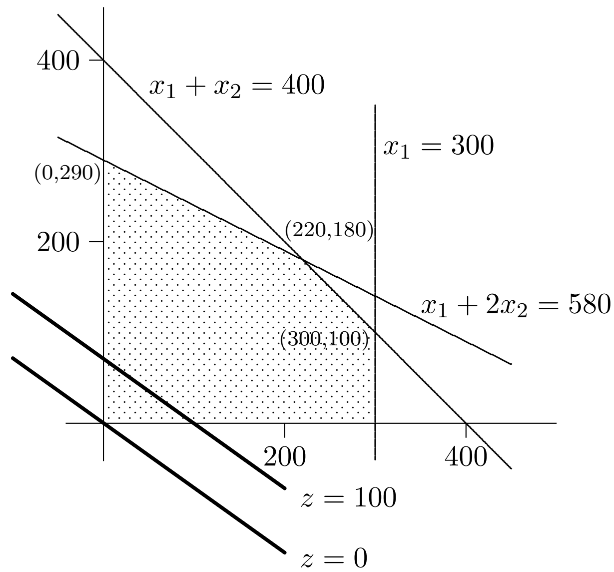


Figura 3.1

La determinación de la región admisible da como resultado un conjunto delimitado por cinco segmentos, cuyos vértices son:

$$
\begin{array}{l}
(\quad 0, \quad 0), \\
(\,300, \quad 0), \\
(\,300, \; 100), \\
(\,220, \; 180), \\
(\quad 0, \; 290).
\end{array}
$$

Al dar a z los valores 0 y 100, dos valores arbitrarios, se obtienen las rectas

$$0 = x_1 + 1.4x_2,$$
$$100 = x_1 + 1.4x_2.$$

Al observar el dibujo y las dos rectas se puede saber en qué dirección se debe mover una recta paralela para mejorar el valor de z (más o menos en la dirección noreste), o sea, hasta el punto $(220, 180)$, con un valor de z igual a 472. Un mejor valor de z daría como resultado una recta que no pasa por la región admisible. Entonces

$$\begin{aligned} x^* &= (220, 180), \\ z^* &= 472. \qquad \diamond \end{aligned}$$

Cuando la región admisible es acotada se puede, en lugar de dibujar dos rectas correspondientes a dos valores diferentes de z, calcular el valor de z para cada uno de los vértices y escoger el mejor vértice (o los mejores vértices).

Ejemplo 3.2. En el ejemplo anterior la región es acotada y el cálculo de z da los siguientes resultados:

$$\begin{array}{rrrl} (& 0, & 0), & z = 0, \\ (& 300, & 0), & z = 300, \\ (& 300, & 100), & z = 440, \\ (& 220, & 180), & z = 472, \\ (& 0, & 290), & z = 406. \end{array}$$

Entonces el punto óptimo es $x^* = (220, 180)$ y el valor óptimo de la función objetivo es $z^* = 472$. $\diamond$

3.2. Región no acotada

Ejemplo 3.3.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 10x_2 \\ & x_1 + \ 2x_2 \geq 4 \\ & 5x_1 + \ 2x_2 \geq 12 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

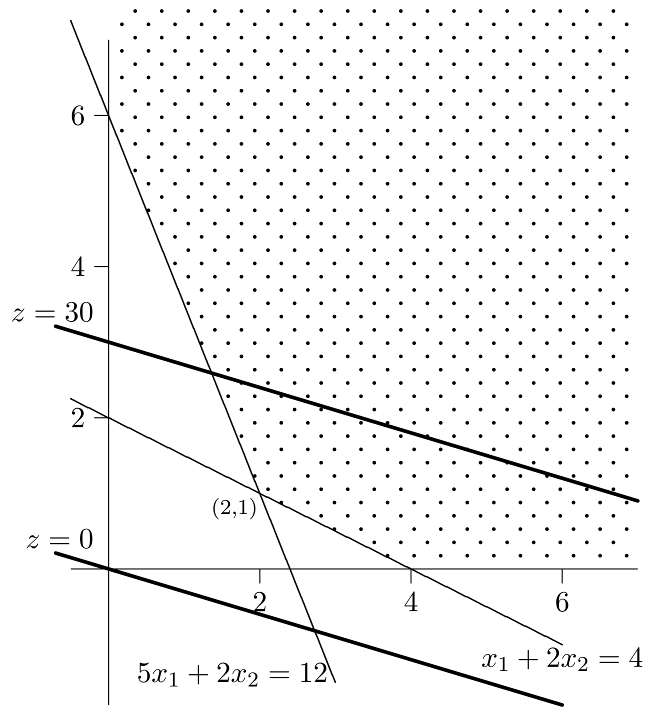


Figura 3.2

Dando a z los valores 0 y 30 se obtienen las rectas

$$3x_1 + 10x_2 = 0,$$
$$3x_1 + 10x_2 = 30.$$

y se sabe entonces que el valor de z mejora al desplazar las rectas en la dirección suroeste (aproximadamente).

Los vértices de la figura son: $(2,1)$, $(4,0)$, $(0,6)$. Sin embargo, la región admisible no está totalmente determinada por estos tres vértices. Además, es claro que el conjunto factible no es acotado, pero el valor óptimo de z se obtiene en el punto $x^* = (4,0)$ con $z^* = 12$. $\diamond$

3.3. Óptimo no acotado

Ejemplo 3.4.

$$\max \quad z = 10x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

En este ejemplo la región admisible es la misma. La función z mejora en la dirección noreste y no hay límite para encontrar una recta z mejor que las anteriores y que pase por un punto admisible. En este caso hablamos de un **óptimo no acotado o no finito**. Lo ideal es que x_1, x_2 tomen valores muy grandes. ◇

3.4. Otros casos

Ejemplo 3.5.

$$\min \quad z = 8x_1 + 16x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + \ \ 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

En este caso los puntos que están en el segmento que une $(2, 1)$ con $(4, 0)$, para los cuales $z = 32$, son puntos óptimos. Un punto del segmento óptimo es un punto de la forma

$$x^* = (1 - \lambda)(2, 1) + \lambda(4, 0), \quad \lambda \in [0, 1].$$

En el ejemplo anterior hay un número infinito de soluciones, pero este conjunto es acotado. ◇

Ejemplo 3.6.

$$\min \quad z = 7x_1$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

En este caso los puntos de la semirrecta que parte del punto $(0, 6)$ y sigue en la dirección del eje x_2, son puntos óptimos con un valor óptimo de $z^* = 0$.

Los puntos de esta semirrecta óptima son de la forma:

$$x^* = (0,6) + \mu(0,1)\ , \quad \mu \geq 0.$$

En este ejemplo, ni el conjunto admisible ni el conjunto de puntos óptimos son acotados. $\diamond$

Ejemplo 3.7.

$$\min \ \ z = 7x_1 + 9x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 + \ \ x_2 &\leq \ 1 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Al hacer la intersección de los conjuntos determinados por cada restricción se obtiene el conjunto vacío. Esto se ve con facilidad ya que se trata simplemente del conjunto admisible de los anteriores ejemplos, intersectado con el semiplano $x_1 + x_2 \leq 1$. Es decir, no hay puntos que cumplan todas las restricciones, o más simplemente, el problema no tiene solución. $\diamond$

EJERCICIOS

Resolver por el método gráfico los ejercicios 3.1 a 3.10. Averiguar si hay puntos factibles. Si hay puntos factibles averiguar si hay puntos óptimos. Si hay puntos óptimos, encontrarlos todos.

3.1. Maximizar $z = x_1 + x_2$, sujeto a $x_1 \leq 4$, $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $x_2 \leq 3$, $x \geq 0$.

3.2. Minimizar $z = x_1 + x_2$, sujeto a $x_1 \leq 4$, $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $x_2 \leq 3$, $x \geq 0$.

3.3. Minimizar $z = -2x_1 - 4x_2$, sujeto a $x_1 \leq 4$, $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $x_2 \leq 3$, $x \geq 0$.

3.4. Minimizar $z = -2x_1 - 4x_2$, sujeto a $x_1 \leq 4$, $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $2x_1 + x_2 \geq 11$, $x_2 \leq 3$, $x \geq 0$.

3.5. Minimizar $z = 5x_1 + 4x_2$, sujeto a $-x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $x \geq 0$.

3.6. Minimizar $z = 2x_1 + 4x_2$, sujeto a $-x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $x \geq 0$.

3.7. Minimizar $z = -2x_1 - 3x_2$, sujeto a $-x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $x \geq 0$.

3.8. Minimizar $z = 3x_1 - 3x_2$, sujeto a $-x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $x \geq 0$.

3.9. Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$, sujeto a $-x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $x \geq 0$.

3.10. Maximizar $z = -3x_1 + 3x_2$, sujeto a $-x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $x \geq 0$.

Capítulo 4

CONJUNTOS CONVEXOS

Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. La mayoría de las definiciones y resultados que siguen, se pueden generalizar fácilmente a otros espacios vectoriales.

4.1. Convexos, envolventes, combinaciones

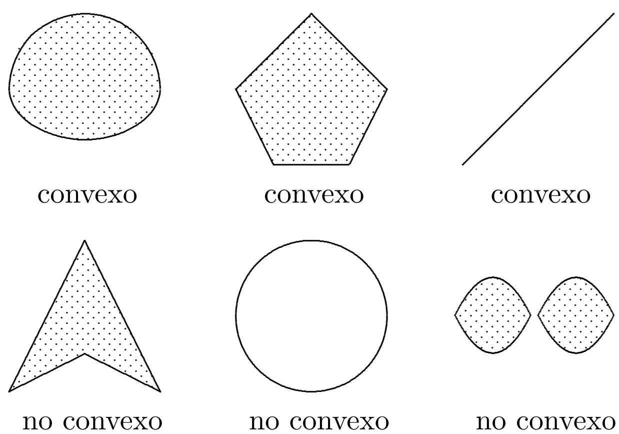


Figura 4.1

Definición 4.1. Sea C un subconjunto de V. Se dice que C es **convexo** si dados x, y en C, λ un escalar en el intervalo $[0, 1]$, entonces $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ también está en C. Gráficamente, un conjunto C es convexo si dados dos puntos x, y en C, cualquier punto del segmento de recta que los une, también está en C.

Ejemplos triviales de conjuntos convexos son: V, $\emptyset$, $\{\bar{x}\}$.

Ejemplo 4.1. $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ es convexo. $\diamond$

$\diamond$

Ejemplo 4.2. $\{(x_1, x_2) : x_2 = x_1^2\}$ no es convexo ya que $(0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1)$ no está en el conjunto. $\diamond$

Definición 4.2. Dados $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se llama **hiperplano** al siguiente conjunto:

$$H = H_{c,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}} x = \alpha\}$$

Este hiperplano genera dos semiespacios:

$$\begin{aligned} H^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}} x \geq \alpha\}, \\ H^- &= \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}} x \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

En $\mathbb{R}$ un hiperplano es un punto y los semiespacios semirrectas. En $\mathbb{R}^2$ los hiperplanos son las rectas y los semiespacios los semiplanos. En $\mathbb{R}^3$ los hiperplanos son los planos.

Los tres conjuntos H, H^+, H^- son convexos. Veamos que H es convexo. Sean: $x, y \in H$, $\lambda \in [0, 1]$, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. El punto z está en H si y solamente si $c^{\mathrm{T}} z = \alpha$; efectuando el cálculo:

$$c^{\mathrm{T}} z = c^{\mathrm{T}}((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)c^{\mathrm{T}} x + \lambda c^{\mathrm{T}} y = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha.$$

Luego z está en H, luego H es convexo. En esta demostración no se utilizó que $\lambda \in [0, 1]$, entonces no solo los puntos del segmento de recta están en H, sino que todos los puntos de la recta que pasa por x y y también están en H (H es una variedad lineal o variedad afín).

Sean: $x, y \in H^+$, $\lambda \in [0, 1]$, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Entonces $c^{\mathrm{T}} x \geq \alpha$, $c^{\mathrm{T}} y \geq \alpha$, λ, $1 - \lambda \geq 0$.

$$c^{\mathrm{T}} z = c^{\mathrm{T}}((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)c^{\mathrm{T}} x + \lambda c^{\mathrm{T}} y \geq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha.$$

Entonces H^+ también es convexo, y de manera semejante se comprueba que el semiespacio H^- es convexo.

Es fácil demostrar que la intersección de dos convexos es un conjunto convexo. Sean: C, D convexos, $x, y \in C \cap D$, $\lambda \in [0,1]$, $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Como C es convexo, entonces $z \in C$. Como D es convexo $z \in D$. Luego $z \in C \cap D$.

Más aún, la intersección de cualquier familia de conjuntos convexos es un convexo, independientemente de que la familia sea finita, infinita enumerable o infinita no enumerable. En cambio no se puede afirmar que la unión de dos convexos sea siempre un convexo.

Las restricciones de un problema de optimización lineal son igualdades, es decir representan hiperplanos, o bien, son desigualdades y en este caso representan semiespacios. Así, cualquier conjunto admisible de un problema de optimización lineal es simplemente la intersección de hiperplanos y semiespacios, luego es un conjunto convexo. En particular

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}, \\
&\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}, \\
&\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}.
\end{aligned}$$

son conjuntos convexos.

Definición 4.3. Dados x^1, x^2, ..., x^m en V, se llama **combinación convexa** de x^1, x^2, ..., x^m a una combinación lineal en la que todos los escalares son no negativos y, además, su suma es uno, es decir:

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_m x^m, \quad \lambda_i \geq 0,\ \forall i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Si todos los escalares son positivos la combinación convexa se llama **estricta**.

La combinación convexa es la generalización de la expresión $(1-\lambda)x+\lambda y$ con λ en el intervalo $[0,1]$.

Ejemplo 4.3. Dados $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$, son ejemplos de combinaciones convexas:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) &= \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{4}(0,0) + \frac{1}{4}(0,1), \\
(0,1) &= 0(1,0) + 0(0,0) + 1(0,1). \ \diamond
\end{aligned}$$

Definición 4.4. Sea A un subconjunto de V. Se llama **envolvente convexa** de A, o convexo generado por A, o casco convexo de A, denotado $\text{co}(A)$, al conjunto convexo más pequeño que contenga a A. Esto quiere decir que si C es un conjunto convexo que contiene a A, entonces necesariamente $\text{co}(A)$ está contenido en C.

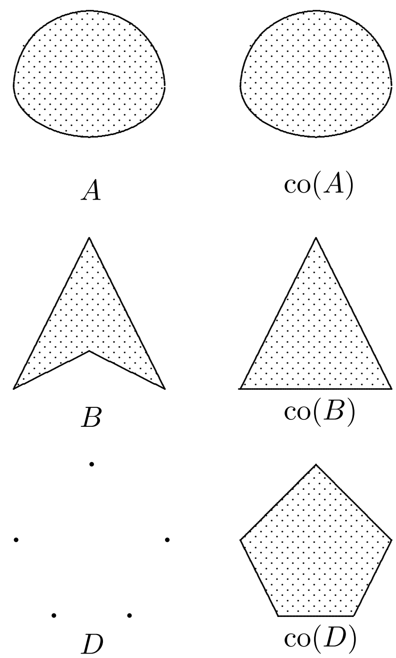


Figura 4.2

La anterior definición es descriptiva, pero no constructiva. El convexo generado por A se puede caracterizar "constructivamenteçomo la intersección de todos los convexos que contienen a A.

$$\text{co}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexo} \\ A \subseteq C}} C.$$

Esta intersección está bien definida ya que por lo menos existe un conjunto convexo que contiene a A: el espacio completo $\mathbb{R}^n$.

También se puede demostrar que $\text{co}(A)$ es exactamente $\text{cc}(A)$, el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A, es decir, el conjunto de todas las combinaciones convexas de subconjuntos finitos de A.

Ejemplo 4.4. $\mathrm{co}(\{(1,0),(0,1),(0,0)\}) = \{(x_1,x_2)\colon x_1+x_2 \le 1, x \ge 0\}$.

$\mathrm{co}(\{(x_1,x_2)\colon x_1x_2 = 0, x_1^2+x_2^2 \le 1, x \ge 0\}) =$

$\{(x_1,x_2)\colon x_1+x_2 \le 1, x \ge 0\}$.

$\mathrm{co}(\{(x_1,x_2)\colon x_2 = x_1^2\}) = \{(x_1,x_2)\colon x_2 \ge x_1^2\}$. ◇

4.2. Puntos y direcciones extremos

Definición 4.5. Sean: C convexo, x en C. Se dice que x es **punto extremo** de C, si no es posible expresar x como combinación convexa estricta de dos puntos distintos de C, es decir:

$$\left.\begin{array}{r} x = (1-\lambda)u + \lambda v \\ u, v \in C \\ \lambda \in]0,1[\end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad u = v = x.$$

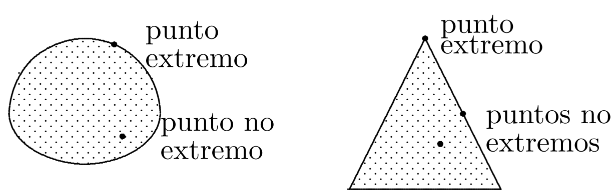


Figura 4.3

Ejemplo 4.5. Dado el conjunto convexo

$$\{(x_1,x_2)\colon x_1^2+x_2^2 \le 1\},$$

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ es punto extremo. El punto $(0.2, 0.4)$ no es punto extremo. ◇

Ejemplo 4.6. El punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ no es punto extremo de $\{(x_1,x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. ◇

Ejemplo 4.7. Dado el conjunto admisible del ejemplo 3.1, entonces: el punto $(300, 100)$ es punto extremo; $(250, 150)$ no es punto extremo; el punto $(260, 150)$ no es extremo. ◇

Se puede mostrar que otra definición equivalente de punto extremo es la siguiente. Sean: C convexo, x en C. Se dice que x es punto extremo de C si $C\backslash\{x\} = \{y \in C : y \ne x\}$ es convexo.

Definición 4.6. Sean: C un convexo, d en V, $d \neq 0$. Se dice que d es una **dirección** de C si para todo x en C y para todo μ positivo, $x + \mu d$ también está en C.

Es claro que un conjunto acotado no tiene direcciones y que un conjunto con direcciones no es acotado.

Definición 4.7. Dos direcciones d^1, d^2 son **equivalentes** si una es múltiplo positivo de la otra, es decir, si $d^1 = \mu d^2$ con $\mu > 0$.

Definición 4.8. Una dirección d de un convexo C, se llama **dirección extrema** si no existen dos direcciones de C: d^1, d^2 no equivalentes, tales que d sea combinación lineal positiva de d^1, d^2. Dicho de otra manera:

$$\left.\begin{array}{c} d = \mu_1 d^1 + \mu_2 d^2 \\ d^1, d^2 \text{ direcciones de } C \\ \mu_1, \mu_2 > 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad d, d^1, d^2 \text{ son equivalentes} .$$

Ejemplo 4.8. Consideremos el conjunto admisible del ejemplo 3.3 , es decir, el conjunto C definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Este conjunto es convexo, esto se puede observar al mirar la gráfica correspondiente (ejemplo 3.3) o se puede demostrar analíticamente.

Los puntos extremos de este conjunto son: $(2, 1)$, $(4, 0)$, $(0, 6)$.

Para el mismo conjunto, $(1, 4)$, $(0, 0.001)$, $(345, 0)$, $(2, 8)$ son direcciones, y no lo son $(0, 0)$, $(-0.01, 100)$, $(-3, -4)$.

Son direcciones extremas $(0, 0.001)$, $(10, 0)$, o sus direcciones equivalentes. $\diamond$

Definición 4.9. Se llama un **politopo** (convexo) a cualquier conjunto que se pueda expresar como la intersección de un número finito de semiespacios (o de semiespacios e hiperplanos). Cuando el politopo (convexo) es acotado se llama **poliedro**.

Ejemplo 4.9. El conjunto admisible del ejemplo 3.1 es un politopo y también es poliedro. $\diamond$

Ejemplo 4.10. El conjunto admisible del ejemplo 3.3 es un politopo. $\diamond$

Ejemplo 4.11. El conjunto $\{(x_1, x_2) \colon x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ se puede expresar como intersección de semiespacios (semiplanos):

$$\bigcap_{0 \le \theta \le 2\pi} \{(x_1, x_2) \colon \cos\theta x_1 + \operatorname{sen}\theta x_2 \le 1\},$$

pero no se puede por un número finito, luego no es un politopo. $\diamond$

EJERCICIOS

4.1. Determine si los siguientes conjuntos son convexos:

a) $\{(x_1, x_2) \colon x_1^2 + x_2 \le 4\}$

b) $\{(x_1, x_2) \colon x_1^2 \le x_2,\ \ x_1 + x_2 = 1\}$

c) $\{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1^2 \le x_2,\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

d) $\{(x_1, x_2) \colon |x_1| + |x_2| \le 1\}$

e) $\{(x_1, x_2) \colon |x_1 + x_2| \le 1\}$

4.2. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto abierto. ¿Minimizar $z = c^{\mathrm{T}}x$, $x \in \mathcal{A}$, tiene solución?

4.3. Sea $A = \{(x_1, x_2) \colon x_1^2 \le x_2\}$. Halle $\operatorname{co}(A)$.

4.4. Sea $A = \{(x_1, x_2) \colon x_1^3 = x_2\}$. Halle $\operatorname{co}(A)$.

4.5. Sea $A = \{(x_1, x_2) \colon x_1^3 \le x_2\}$. Halle $\operatorname{co}(A)$.

4.6. Sea $A = \{(x_1, x_2) \colon x_1 > 0, x_1|x_2| \ge 1\}$. ¿$A$ es cerrado? Halle $\operatorname{co}(A)$. ¿$\operatorname{co}(A)$ es cerrado? Dé condiciones suficientes para que si A es cerrado, entonces $\operatorname{co}(A)$ sea cerrado.

4.7. Sea $C = \{(x_1, x_2) \colon |x_1| \le x_2\}$. Halle los puntos extremos, las direcciones y las direcciones extremas de C.

4.8. Sea $C = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 + x_2 + x_3 \le 6,\ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12,\ \ x \ge 0\}$. Halle los puntos extremos, las direcciones y las direcciones extremas de C.

4.9. Sea $C = \{(x_1, x_2) \colon x_1^2 \le x_2\}$. Halle los puntos extremos, las direcciones y las direcciones extremas de C.

4.10. Sea $C = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1^2 \le x_2, x_1 + x_2 + x_3 \le 1\}$. Halle los puntos extremos, las direcciones y las direcciones extremas de C.

4.11. Sea $C = \{(x_1, x_2) \colon |x_1| + |x_2| \le 1\}$. Halle los puntos extremos, las direcciones y las direcciones extremas de C.

4.12. Sea $C = \{(x_1, x_2) \colon |x_1 + x_2| \le 1\}$. Halle los puntos extremos, las direcciones y las direcciones extremas de C.

4.13. Sea C un convexo, A una matriz $m \times n$, $D = \{y \colon y = Ax, x \in C\}$. Muestre que D es convexo.

4.14. Sea $H = H_{c\alpha}$ un hiperplano y H^+ uno de los semiespacios correspondientes. Halle los puntos extremos y las direcciones extremas de H y de H^+.

4.15. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Muestre que $\mathrm{cc}(A) = \mathrm{co}(A)$. Puede usar las siguientes etapas: mostrar que $A \subseteq \mathrm{cc}(A)$; mostrar que $\mathrm{cc}(A)$ es convexo; mostrar que $\mathrm{co}(A) \subseteq \mathrm{cc}(A)$; mostrar por inducción, sobre el número de elementos de una combinación convexa, que $\mathrm{cc}(A) \subseteq \mathrm{co}(A)$.

Capítulo 5

CONVEXOS EN OPTIMIZACIÓN LINEAL

5.1. Puntos extremos

Se considerará de aquí en adelante (salvo indicación contraria) que los problemas de optimización lineal están en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \min\, z &= c^{\mathrm{T}}x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0\,, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \min\, z &= c^{\mathrm{T}}x \\ x &\in F\,, \end{aligned}$$

donde

$$F = \{x \colon Ax = b, x \geq 0\}\,,$$

A es una matriz $m \times n$, $m \leq n$, rango$(A) = r(A) = m$; b es un vector columna de m componentes; x es un vector columna de n componentes (las variables); 0 es el vector columna de n componentes nulas. El conjunto F formado por los puntos que cumplen todas las restricciones es convexo y es llamado la región o conjunto factible, admisible o realizable. Es claro que F es un politopo y en algunos casos poliedro.

Siempre se puede suponer que $r(A) = m$. Si $r(A) < m$, entonces existen una o varias filas de A que se pueden expresar como combinación lineal de otras filas. Dependiendo del valor de los b_i, las restricciones correspondientes son, o bien, redundantes y en ese caso se pueden suprimir o bien incompatibles con las otras y en este caso no hay solución del sistema $Ax = b$ y, por lo tanto, tampoco hay solución al problema de programación lineal.

Ejemplo 5.1. Las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= \ 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \ 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= \ 6 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

se pueden reemplazar por

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= \ 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \ 4 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

En cambio

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= \ 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \ 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= \ 5 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

es un sistema inconsistente, no tiene solución. $\diamond$

Definición 5.1. Se llama **base** de A, a una matriz B $m \times m$, invertible, submatriz (matriz obtenida al quitar algunas filas o algunas columnas) de A. Dicho de otra forma, B se obtiene escogiendo m columnas de A, linealmente independientes y desechando las $p = n - m$ restantes. Es cierto que existe por lo menos una, ya que $r(A) = m$. Sea L la submatriz de A de tamaño $m \times p$, obtenida al quitar de A las columnas que conforman B. Las columnas de B se llaman **básicas**. Las columnas de L se llaman columnas **libres**, no básicas o independientes. Aquí la palabra independiente no se refiere a independencia lineal, se refiere simplemente a que, como se verá posteriormente, las variables básicas se pueden expresar en función de las variables libres o independientes.

Es evidente que, salvo permutación de columnas, la matriz A es exactamente la matriz $[B \quad L]$, es decir, la matriz obtenida al colocar las m columnas de B y a continuación (a la derecha) las $p = n - m$ columnas de L, por lo tanto, se puede escribir

$$A = [B \quad L]\,.$$

Las variables x_1, x_2, ..., x_n también se pueden agrupar de manera semejante y se llamarán **básicas** unas, y **libres** las otras (o no básicas o independientes). También, salvo permutación de las variables, se puede escribir

$$x = (x_B, x_L) = \begin{bmatrix} x_B \\ x_L \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0\,, \end{aligned}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} Bx_B + Lx_L &= b \\ x_B \geq 0,\ x_L &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Una solución del sistema $Ax = b$ de la forma

$$\begin{aligned} & x_L = 0 \\ & x_B \text{ solución única de } Bx_B = b, \text{ es decir, } x_B = B^{-1}b\,, \end{aligned}$$

se llama una **solución básica**.

Aunque las expresiones $Bx_B = b, x_B = B^{-1}b$ son equivalentes desde el punto de vista teórico, en la práctica es mucho más sencillo resolver el sistema $Bx_B = b$ que hallar una inversa y efectuar enseguida el producto.

Si además,

$$x_B \geq 0\,,$$

entonces se tiene una **solución básica factible**.

Si

$$x_B > 0\,,$$

la solución se llama básica factible **no degenerada**.

Si

$$x_B \geq 0\,,\ \text{pero}\ x_B \not> 0\,,$$

es decir, si se trata de una solución básica factible, pero alguna coordenada básica es nula, la solución se llama básica factible **degenerada**. Una solución básica factible no degenerada tiene exactamente m componentes positivas, una solución básica factible degenerada tiene menos de m componentes positivas.

Ejemplo 5.2.

$$\begin{array}{rl} \min & z = -x_1 - 1.4x_2 \\ & \begin{array}{rrrrrl} x_1 + & x_2 + & x_3 & & & = 400 \\ x_1 + & 2x_2 & & + x_4 & & = 580 \\ x_1 & & & & + x_5 & = 300 \\ & & & & x \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea

$$B = [A_{\cdot 2} \quad A_{\cdot 4} \quad A_{\cdot 5}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{invertible.}$$

Entonces

$$L = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Bx_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$x_B = \begin{bmatrix} 400 \\ -220 \\ 300 \end{bmatrix},$$

además

$$x_L = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se dice entonces que

$$x = (x_B, x_L) = (0, 400, 0, -220, 300)$$

es una solución básica; pero como no se cumple que $x_B \geq 0$, entonces no es realizable.

Sea

$$B = [A_{\cdot 3} \quad A_{\cdot 4} \quad A_{\cdot 5}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{invertible.}$$

Entonces

$$Bx_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix},$$

$$x = (x_B, x_L) = (0, 0, 400, 580, 300),$$

es una solución básica, realizable, no degenerada. $\diamond$

Ejemplo 5.3.

$$\begin{array}{ll} \min & z = 4x_1 + 5x_2 \\ & \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 6 \\ 2x_1 + x_2 \quad - x_4 & = 6 \\ x_1 + x_2 \quad\quad - x_5 & = 4 \\ & x \geq 0. \end{array} \end{array}$$

Sea

$$B = [A_{\cdot 1} A_{\cdot 2} A_{\cdot 4}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{invertible.}$$

$$Bx_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$x = (2, 2, 0, 0, 0)$$

es una solución básica, realizable, degenerada. $\diamond$

Los puntos extremos de F (y en general de un politopo) son importantes ya que, como se verá más adelante de manera precisa, una función lineal acotada inferiormente en F siempre alcanza su valor mínimo en un punto extremo.

Proposición 5.1. *Sea F el conjunto factible del problema de programación lineal en la forma estándar. Los puntos extremos de F son exactamente las soluciones básicas realizables.*

Corolario 5.1. *El conjunto F tiene un número finito de puntos extremos.*

Demostración: El número máximo de posibles bases extraídas de A (sin tener en cuenta el orden) es el número de combinaciones de m elementos tomados entre n elementos $= C_m^n = n!/((n-m)!m!)$; de estas posibles escogencias algunas pueden corresponder a una matriz B no invertible; además, algunas de las soluciones básicas obtenidas pueden ser no realizables. $\square$

Estos resultados permiten utilizar un procedimiento preciso para calcular los puntos extremos de F:

- escoger m columnas independientes de A para formar B,
- $x_L = 0$,
- resolver $Bx_B = b$,
- si la solución básica obtenida es realizable, entonces es un punto extremo.

Ejemplo 5.4. Hallar los puntos extremos de F donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Si

$$B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 2}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

la solución básica correspondiente es $x = (2, 1, 0, 0)$, que es realizable, luego es un punto extremo de F.

$$\begin{aligned}
&B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 3}]\,, \ x = (2.4, 0, -1.6, 0) \text{ no es factible.}\\
&B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 4}]\,, \ x = (4, 0, 0, 8) \text{ es admisible.}\\
&B = [A_{\cdot 2} \quad A_{\cdot 3}]\,, \ x = (0, 6, 8, 0) \text{ es admisible.}\\
&B = [A_{\cdot 2} \quad A_{\cdot 4}]\,, \ x = (0, 2, 0, -8) \text{ no es realizable.}\\
&B = [A_{\cdot 3} \quad A_{\cdot 4}]\,, \ x = (0, 0, -4, -12) \text{ no es realizable.}
\end{aligned}$$

Luego los puntos extremos de F son:

$$\begin{aligned}
&(2, 1, 0{,}0)\,,\\
&(4, 0, 0{,}8)\,,\\
&(0, 6, 8{,}0)\,. \quad \diamond
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5. Los puntos extremos del conjunto realizable del ejemplo 5.2 son:

$$\begin{array}{l}
(\,300, 100, \quad 0, \ \ 80, \quad 0\,)\,,\\
(\,220, 180, \quad 0, \quad 0, \ \ 80\,)\,,\\
(\,300, \quad 0, 100, 280, \quad 0\,)\,,\\
(\quad 0, 290, 110, \quad 0, 300\,)\,,\\
(\quad 0, \quad 0, 400, 580, 300\,)\,. \quad \diamond
\end{array}$$

Proposición 5.2. *Si F es un poliedro, es decir, si F es acotado, entonces todo punto de F es combinación convexa de sus puntos extremos.*

5.2. Direcciones

Para la caracterización de los puntos de un politopo no acotado es necesario estudiar la obtención de las direcciones y las direcciones extremas.

Proposición 5.3. *Sea* $F \neq \emptyset$. $d \neq 0$ *es dirección de* F *si y solamente si* $Ad = 0$, $d \geq 0$.

Demostración: $\Rightarrow$) Sea d dirección de F. Para todo x en F, para todo $\mu \geq 0$

$$y = x + \mu d \text{ está en } F\,,$$

es decir, $Ay = b$, $y \geq 0$, entonces $b = Ay = A(x+\mu d) = Ax+\mu Ad = b+\mu Ad$, de donde $\mu Ad = 0$ para todo $\mu \geq 0$, luego $Ad = 0$; $y \geq 0$, es decir, $y_i = x_i + \mu d_i \geq 0$ para todo i y para todo $\mu \geq 0$, entonces $d_i \geq 0$ para todo i, o sea, $d \geq 0$.

$\Leftarrow$) La demostración de esta implicación es inmediata. $\square$

Se deduce, según la proposición, que las direcciones de $F \neq \emptyset$ no dependen de b.

Ejemplo 5.6. Hallar las direcciones de F, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Estos datos son los mismos del ejemplo 5.2 , entonces $F \neq \emptyset$. Para resolver $Ad = 0$, hay que convertir la matriz $[A \;\; 0]$ en una matriz equivalente, escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solución general se puede expresar en función de d_4 y d_5. Por ejemplo, la segunda fila de esta matriz significa que $d_2 + d_4/2 - d_5/2 = 0$. Entonces $d_2 = -d_4/2 + d_5/2$. Así la expresión general de la posible dirección es:

$$d = (-d_5, -d_4/2 + d_5/2, d_4/2 + d_5/2, d_4, d_5) \geq 0\,.$$

Como $-d_5, d_5 \geq 0$, entonces $d_5 = 0$. Entonces $-d_4/2, d_4/2 \geq 0$, luego $d_4 = 0$. Es claro que no hay soluciones de esta forma tales que $d \geq 0$, $d \neq 0$. Es decir, F no tiene direcciones y, por lo tanto, es acotado.

En este ejemplo particular hubiera sido muy sencillo intercambiar columnas para dejar primero las columnas tres, cuatro y cinco y enseguida las correspondientes a d_1, d_2 obteniéndose inmediatamente la matriz escalonada reducida; entonces:

$$d = (d_1, d_2, -d_1 - d_2, -d_1 - 2d_2, -d_1) \geq 0\,,$$

y las conclusiones finales son las mismas. $\diamond$

Ejemplo 5.7. Hallar las direcciones de F, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\,,\; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Estos datos son los mismos del ejemplo 5.4 , entonces $F \neq \emptyset$. Al resolver $Ad = 0$ (intercambiando las columnas 1 , 2 con las columnas 3 , 4) se obtiene la solución general:

$$d = (d_1, d_2, d_1 + 2d_2, 5d_1 + 2d_2) \geq 0\,.$$

En este caso siempre que d_1, $d_2 \geq 0$, d_1 o $d_2 \neq 0$, se tendrá una dirección de F. Por lo tanto, F no es acotado. Por ejemplo: $(1, 0, 1, 5)$, $(0, 2, 4, 4)$, $(3, 1, 5, 17)$ son direcciones de F. $\diamond$

Ejemplo 5.8. Considere el conjunto F, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\,,\; b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $F \neq \emptyset$ $(x = (0, 2, 3, 0) \in F)$. Por ejemplo $d = (1, 1, 0, 0)$ es una dirección de F ya que $Ad = 0, d \geq 0$

Si los datos cambian ligeramente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\,,\; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

aunque $d = (1, 1, 0, 0)$ cumple con $Ad = 0, d \geq 0$, no es dirección de F ya que éste es vacío. $\diamond$

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de direcciones de $F\dot{\text{D}}$e este conjunto se puede tomar un representante de cada clase de direcciones equivalentes. Esta escogencia puede hacerse por normalización, es decir, escogiendo de cada clase un representante cuya norma valga uno. Al utilizar como norma $\sum |d_i|$ y como en este caso particular todos los elementos de d son no negativos, entonces $\sum |d_i| = \sum d_i\dot{\text{S}}$ea $\mathcal{D}_1$ el conjunto de direcciones de F tales que la suma de sus coordenadas sea uno, es decir,

$$\mathcal{D}_1 = \{d\colon Ad = 0, d \geq 0,\ d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1\}.$$

Proposición 5.4. *El conjunto de direcciones extremas de F es, salvo equivalencia, el conjunto de puntos extremos del conjunto $\mathcal{D}_1$*

Dicho de otra manera, las direcciones extremas de F son, salvo equivalencia, las soluciones básicas realizables del sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d \geq 0\,.$$

Corolario 5.2. *Las direcciones extremas de F son, salvo equivalencia, soluciones no negativas de*

$$\begin{aligned} Bd_B &= -A_{\cdot k}\ ,\ A_{\cdot k} \textit{ no forma parte de } B\,, \\ d_k &= 1\,, \\ d_j &= 0 \textit{ en los demás casos}\,, \end{aligned}$$

para todas las posibles submatrices B, de tamaño $m \times m$ invertibles y todas las posibles escogencias de $A_{\cdot k}$.

Ejemplo 5.9. Utilizando la proposición 5.4 , hallar las direcciones extremas de F, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\ ,\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar las direcciones extremas hay que empezar por hallar las soluciones básicas de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d \geq 0\,.$$

Estas son:

$$\begin{array}{l} (-2/11,\ 5/11, 8/11,\ \ 0\,)\,, \\ (\ \ 2/9, -1/9,\ \ 0, 8/9\,)\,, \\ (\ \ 1/7,\ \ 0,\ 1/7, 5/7\,)\,, \\ (\ \ 0,\ 1/5,\ 2/5, 2/5\,)\,. \end{array}$$

Las dos últimas soluciones básicas son realizables y, por lo tanto, son (salvo equivalencia) las direcciones extremas de F. $\diamond$

Ejemplo 5.10. Utilizando el corolario 5.2 para la misma matriz A y el mismo vector columna b del ejemplo anterior se tiene:

Si $B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 2}]$ y si $Bd_B = -A_{\cdot 3}$, entonces $d_B = (-2/8, 5/8)$ y $d = (-2/8, 5/8, 1, 0)$ no es dirección extrema.

Si $B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 2}]$ y $-A_{\cdot k} = -A_{\cdot 4}$, entonces $d_B = (-2/8, -1/8)$ y $d = (2/8, -1/8, 0, 1)$ no es dirección extrema.

Si $B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 3}]$ y $-A_{\cdot k} = -A_{\cdot 2}$, entonces $d_B = (-2/5, 8/5)$ y $d = (-2/5, 1, 8/5, 0)$ no es dirección extrema.

Si $B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 3}]$ y $-A_{\cdot k} = -A_{\cdot 4}$, entonces $d_B = (1/5, 1/5)$, $d = (1/5, 0, 1/5, 1)$. Esta dirección es equivalente a $(1/7, 0, 1/7,\ 5/7)$.

Así, sucesivamente, se escogen todas las posibilidades para B y en cada caso todas las posibilidades para $-A_{\cdot k}$. Es posible que diferentes parejas $B, -A_{\cdot k}$ den lugar a direcciones iguales o equivalentes. $\diamond$

EJERCICIOS

En los ejercicios 5.1 a 5.8 convierta el problema a la forma estándar, halle los puntos extremos del conjunto factible, halle las direcciones, halle las direcciones extremas usando la proposición 5.4, halle las direcciones extremas usando el corolario 5.2.

5.1. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

5.2. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 6$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $2x_1 + 3x_2 \leq 12$, $x \geq 0$.

5.3. Minimizar $z = 4x_1+5x_2$ con las restricciones $x_1+x_2 \geq 12$, $4x_1+3x_2 \geq 18$, $x \geq 0$.

5.4. Minimizar $z = 4x_1+5x_2$ con las restricciones $x_1+x_2 \geq 12$, $4x_1-3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

5.5. Minimizar $z = 4x_1+5x_2$ con las restricciones $x_1+x_2 \geq 12$, $4x_1-3x_2 = 18$, $x \geq 0$.

5.6. Minimizar $z = 4x_1+5x_2$ con las restricciones $4x_1 - 3x_2 \leq -2$, $-4x_1 + 3x_2 \leq 3$, $x \geq 0$.

5.7. Minimizar $z = 4x_1+5x_2$ con las restricciones $4x_1 - 3x_2 \leq -2$, $-4x_1 + 3x_2 \leq 1$, $x \geq 0$.

5.8. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 12$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

5.9. Sea $F' = \{x : Ax \geq b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$. Encuentre una caracterización para las direcciones de F', análoga a la de la proposición 5.3.

Capítulo 6

DOS TEOREMAS

Los teoremas presentados en este capítulo son muy importantes en OL, en especial para la justificación del método simplex y para la deducción del método de descomposición. El método de descomposición de Dantzig y Wolfe sirve para resolver problemas de OL muy grandes que tienen una estructura angular por bloques [Las70].

6.1. Representación

Proposición 6.1. ***Teorema de representación***. *Todo punto de F (conjunto admisible de un problema de optimización lineal en la forma estándar) no vacío, se puede expresar como una combinación convexa de los puntos extremos, más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas, es decir, F también se puede representar como*

$$F = \{x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k + \mu_1 d^1 + \mu_2 d^2 + \ldots + \mu_s d^s : \\ \lambda_i \geq 0 \forall i \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1, \mu_j \geq 0 \forall j\},$$

siendo x^1, x^2, ..., x^k los puntos extremos ($k \geq 1$)

y d^1, d^2, ..., d^s las direcciones extremas ($s \geq 0$) .

En particular F es acotado si y solamente si $s = 0$. Este teorema también es válido sobre otros politopos.

Ejemplo 6.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Los puntos extremos de F son: $(2,1,0,0)$, $(4,0,0,8)$, $(0,6,8,0)$ y sus direcciones extremas (salvo equivalencia) son: $(0,1,2,2)$, $(1,0,1,5)$.

El punto $x = (2,3,4,4)$ está en F ya que $Ax = b$, $x \geq 0$.

$$x = 0(2,1,0,0) + 1/2(4,0,0,8) + 1/2(0,6,8,0) + 0(0,1,2,2) + 0(1,0,1,5).$$

También

$$x = 1(2,1,0,0) + 0(4,0,0,8) + 0(0,6,8,0) + 2(0,1,2,2) + 0(1,0,1,5). \ \diamond$$

La expresión de un punto x de F, en función de los puntos extremos y las direcciones extremas, no es necesariamente única.

Ejemplo 6.2. Sea C el conjunto de parejas (x_1, x_2) tales que

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Sus puntos extremos son $(1,1), (3,0), (0,3)$ y sus direcciones extremas (salvo equivalencia) son $(1,0), (0,1)$.

Los puntos $(1,1), (3,1)$ están en C.

$$\begin{aligned} (1,1) &= 1(1,1) + 0(3,0) + 0(0,3), \\ (3,1) &= 0(1,1) + 1(3,0) + 0(3,0) + 1(0,1), \\ (3,1) &= 1(1,1) + 0(3,0) + 0(0,3) + 2(1,0). \ \diamond \end{aligned}$$

Corolario 6.1. *El conjunto F es vacío si y solamente si no tiene puntos extremos.*

6.2. Optimalidad

Proposición 6.2. *El valor óptimo z^* de minimizar $z = c^T x$ en F, es acotado (inferiormente), si F es acotado, o sea, si no tiene direcciones, o bien, si para toda dirección extrema d de F se tiene que $c^T d \geq 0$.*

Demostración: Supongamos que F es acotado. Como F es cerrado, entonces es compacto y como z es continua, por el teorema de Weierstrass se tiene que z alcanza su mínimo en un punto de F.

Supongamos ahora que F no es acotado. De acuerdo con el teorema de representación, resolver el problema

$$\begin{aligned} &\min z = c^{\mathrm{T}} x \\ &\text{en } \ F = \{x \colon Ax = b, x \geq 0\}, \end{aligned}$$

es equivalente a resolver este otro problema

$$\min z = c^{\mathrm{T}} x$$
$$x \in \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j d^j \ : \ d\lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \mu_j \geq 0 \right\}.$$

Es decir, hay que minimizar el valor de z dado por:

$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^{\mathrm{T}} x^i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j c^{\mathrm{T}} d^j, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \mu_j \geq 0.$$

Sean x^u, x^v tales que

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}} x^u &= \min_{1 \leq i \leq k} \{c^{\mathrm{T}} x^i\}, \\ c^{\mathrm{T}} x^v &= \max_{1 \leq i \leq k} \{c^{\mathrm{T}} x^i\}. \end{aligned}$$

Entonces, como $\lambda_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^{\mathrm{T}} x^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^{\mathrm{T}} x^u = c^{\mathrm{T}} x^u \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = c^{\mathrm{T}} x^u.$$

De manera análoga

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^{\mathrm{T}} x^i \leq c^{\mathrm{T}} x^v,$$

y así

$$c^{\mathrm{T}} x^v + \sum_{j=1}^{s} \mu_j c^{\mathrm{T}} d^j \geq z \geq c^{\mathrm{T}} x^u + \sum_{j=1}^{s} \mu_j c^{\mathrm{T}} d^j, \ \ \mu_j \geq 0.$$

Luego, cuando F no es acotado, el valor de z es acotado inferiormente, si y solamente si, $c^{\mathrm{T}} d \geq 0$ para toda dirección extrema d. $\square$

Corolario 6.2. *Si el problema de minimizar $z = c^T x$ en F es acotado (inferiormente), entonces el óptimo se obtiene en un punto extremo (por ejemplo en x^u).*

Corolario 6.3. *Si el problema de minimizar $z = c^T x$ en F es acotado (inferiormente), entonces cualquier combinación convexa de puntos extremos óptimos también es un punto óptimo.*

Proposición 6.3. ***Teorema de optimalidad*** . *Consideremos el problema de minimizar $z = c^T x$ en F, con z acotado inferiormente. El valor óptimo z^* se obtiene en por lo menos un punto extremo, y todos los puntos óptimos se pueden expresar como una combinación convexa de puntos extremos óptimos (puede haber varios) más una combinación lineal no negativa de direcciones extremas tales que $c^T d = 0$.*

Ejemplo 6.3. Minimizar $z = c^{\mathrm{T}} x$ en $F = \{x\colon Ax = b, x \geq 0\}$ donde A, b están dados en el ejemplo 6.1 , para diferentes coeficientes de la función objetivo.

a) $c = (3, 2, 0, 0)$

b) $c = (3, 0, 0, 0)$

c) $c = (-2, -1, 0, 0)$

d) $c = (4, 8, 0, 0)$.

a)

$$
\begin{aligned}
c^{\mathrm{T}} x^1 &= 8, \\
c^{\mathrm{T}} x^2 &= 12, \\
c^{\mathrm{T}} x^3 &= 12, \\
c^{\mathrm{T}} d^1 &= 2, \\
c^{\mathrm{T}} d^2 &= 3.
\end{aligned}
$$

Entonces z es acotado inferiormente.

$$z^* = 8, \qquad x^* = x^1 = (2, 1, 0, 0).$$

En este ejemplo la solución óptima es única.

b)

$$\begin{aligned}
c^{\mathrm{T}}x^1 &= 6,\\
c^{\mathrm{T}}x^2 &= 12,\\
c^{\mathrm{T}}x^3 &= 0,\\
c^{\mathrm{T}}d^1 &= 0,\\
c^{\mathrm{T}}d^2 &= 3.
\end{aligned}$$

Entonces z es acotado inferiormente.

$$\begin{aligned}
z^* = 0, \qquad x^* &= x^3 + \mu d^1 = (0,6,8,0) + \mu(0,1,2,2)\\
&= (0, 6+\mu, 8+2\mu, 2\mu), \quad \text{con} \quad \mu \geq 0.
\end{aligned}$$

El conjunto de soluciones óptimas tiene un número infinito de puntos y, además, no es acotado.

c)

$$\begin{aligned}
c^{\mathrm{T}}x^1 &= -5,\\
c^{\mathrm{T}}x^2 &= -8,\\
c^{\mathrm{T}}x^3 &= -6,\\
c^{\mathrm{T}}d^1 &= -1,\\
c^{\mathrm{T}}d^2 &= -2.
\end{aligned}$$

Entonces z no es acotado inferiormente.

d)

$$\begin{aligned}
c^{\mathrm{T}}x^1 &= 16,\\
c^{\mathrm{T}}x^2 &= 16,\\
c^{\mathrm{T}}x^3 &= 48,\\
c^{\mathrm{T}}d^1 &= 8,\\
c^{\mathrm{T}}d^2 &= 4.
\end{aligned}$$

Entonces z es acotado inferiormente.

$$z^* = 16, \quad x^* = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

El conjunto de puntos óptimos tiene un número infinito de puntos y es acotado. $\diamond$

Ejemplo 6.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & c = (-1, -1.4, 0, 0, 0), \\ \text{b)} & c = (-2, -2, 0, 0, 0). \end{array}$$

Los puntos extremos de F son:

$$\begin{array}{lrrrrrr} (& 0, & 0, & 400, & 580, & 300 &), \\ (& 300, & 0, & 100, & 280, & 0 &), \\ (& 300, & 100, & 0, & 80, & 0 &), \\ (& 220, & 180, & 0, & 0, & 80 &), \\ (& 0, & 290, & 110, & 0, & 300 &). \end{array}$$

F no tiene direcciones extremas, entonces es acotado y cualquier problema de optimización lineal en este conjunto tiene óptimo acotado.

a)

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}}x^1 &= 0, \\ c^{\mathrm{T}}x^2 &= -300, \\ c^{\mathrm{T}}x^3 &= -440, \\ c^{\mathrm{T}}x^4 &= -472, \\ c^{\mathrm{T}}x^5 &= -406, \end{aligned}$$

$$z^* = -472, \quad x^* = x^4 \ = (220, 180, 0, 0, 80).$$

En este ejemplo la solución óptima es única.

b)

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}}x^1 &= 0, \\ c^{\mathrm{T}}x^2 &= -600, \\ c^{\mathrm{T}}x^3 &= -800, \\ c^{\mathrm{T}}x^4 &= -800, \\ c^{\mathrm{T}}x^5 &= -580, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^* = -800, \quad x^* &= \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4 \\ &= \lambda_1(300, 100, 0, 80, 0) + \lambda_2(220, 180, 0, 0, 80), \\ &\quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

El conjunto de puntos óptimos de este ejemplo es infinito y acotado. ◇

Considérese la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \text{conjunto de puntos extremos de } F, \\
\mathcal{D} &= \text{conjunto de direcciones extremas de } F \text{ salvo equivalencia (en} \\
&\quad\ \mathcal{D} \text{ no hay dos direcciones extremas equivalentes),} \\
\mathcal{D}^- &= \{d \in \mathcal{D} \colon c^{\mathrm{T}} d < 0\}, \\
\mathcal{D}^o &= \{d \in \mathcal{D} \colon c^{\mathrm{T}} d = 0\}, \\
F^* &= \text{conjunto de puntos óptimos de } F \text{ (cuando } F \neq \emptyset \text{ y } z \text{ es acotado} \\
&\quad\ \text{inferiormente),} \\
\mathcal{P}^* &= \{x \in \mathcal{P} \neq \emptyset \colon c^{\mathrm{T}} x = \min\{c^{\mathrm{T}} y \colon y \in \mathcal{P}\}\}, \\
\operatorname{cnn}(X) &= \text{conjunto de combinaciones lineales no negativas (con escalares} \\
&\quad\ \text{no negativos) de elementos de } X, \\
z^* &= \text{valor óptimo de } z, \text{ cuando } F \neq \emptyset \text{ y } z \text{ está acotado inferiormente,} \\
z^* &= -\infty, \text{ cuando } F \neq \emptyset \text{ y } z \text{ no está acotado inferiormente,} \\
z^* &= +\infty, \text{ cuando } F = \emptyset.
\end{aligned}$$

El teorema de representación se puede expresar así:

$$\begin{aligned} F \neq \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{P} \neq \emptyset, \\ F \neq \emptyset \quad &\Longrightarrow \quad F = \operatorname{cc}(\mathcal{P}) + \operatorname{cnn}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

El teorema de optimalidad se puede expresar así:

$$\begin{aligned} F^* \neq \emptyset \ &\Longleftrightarrow \ F \neq \emptyset, \mathcal{D}^- = \emptyset, \\ F \neq \emptyset, \mathcal{D}^- = \emptyset \ &\Longrightarrow \ F^* = \operatorname{cc}(\mathcal{P}^*) + \operatorname{cnn}(\mathcal{D}^o). \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de optimalidad se puede resolver cualquier problema de OL, de manera bien precisa. Este proceso finito se basa en el hecho de que el número de puntos extremos y el número de direcciones extremas son finitos. Más aún, para hallar todos los puntos extremos, basta con estudiar todas las posibilidades para las soluciones básicas. De manera semejante, para hallar todas las direcciones extremas, basta con estudiar todas las posibilidades de uno de los dos métodos (proposición 5.4 y corolario 5.2). El proceso para resolver un problema de OL en la forma estándar es el siguiente:

hallar $\mathcal{P}$
si $\mathcal{P} = \emptyset$ **ent** $F = \emptyset$
sino
    hallar $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^-$, $\mathcal{D}^o$
    si $\mathcal{D}^- \neq \emptyset$ **ent** $z^* = -\infty$
    sino
        si $\mathcal{D}^o = \emptyset$
            F^* es acotado
            si $|\mathcal{P}^*| = 1$ **ent** $F^* = \mathcal{P}^*$
            sino $|F^*| = \infty$, $F^* = \mathrm{cc}(\mathcal{P}^*)$
        sino
            $|F^*| = \infty$, F^* no es acotado
            $F^* = \mathrm{cc}(\mathcal{P}^*) + \mathrm{cnn}(\mathcal{D}^o)$
        fin-si
    fin-si
fin-si

Los resultados anteriores sirven para entender mejor el método simplex y para interpretar, de manera más adecuada, algunos de sus resultados. Sin embargo, salvo para ejemplos muy pequeños, estos resultados no son prácticos para resolver problemas de Optimización Lineal.

EJERCICIOS

En los ejercicios 6.1 a 6.10 convierta el problema a la forma estándar, halle los puntos extremos del conjunto factible, halle las direcciones extremas, y aplicando el teorema de optimalidad encuentre la solución del problema.

6.1. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

6.2. Minimizar $z = -0.8x_1 - 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

6.3. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

6.4. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

6.5. Minimizar $z = 5x_1 + 5x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

6.6. Minimizar $z = x_1 - 2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

6.7. Minimizar $z = -2.5x_1 + x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

6.8. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 12$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

6.9. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 6$, $2x_1 + 3x_2 \leq 12$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

6.10. Minimizar $z = 4x_1 + 5x_2$ con las restricciones $4x_1 - 3x_2 \leq -2$, $-4x_1 + 3x_2 \leq 1$, $x \geq 0$.

Capítulo 7

EL MÉTODO SIMPLEX

Los teoremas y resultados vistos anteriormente permiten hallar el óptimo de un problema de optimización lineal en la forma estándar, en un número finito de pasos: buscar todos los puntos extremos (todas las soluciones básicas realizables) y entre ellos escoger el mejor o los mejores; además, es necesario buscar las direcciones extremas para saber si el óptimo está acotado o no lo está. Pero este proceso es muy dispendioso y largo, aún con la ayuda de un computador. El método simplex, creado por G. B. Dantzig al final de la década del cuarenta, permite hacer una búsqueda de soluciones básicas realizables, pero con la ventaja de ir siempre mejorando el valor de z al pasar de una solución básica realizable a otra (si no hay soluciones básicas degeneradas), hasta llegar a un punto extremo óptimo o hasta saber que el valor de z no es acotado (inferiormente).

Salvo indicación contraria, se supondrá la **ausencia de soluciones básicas realizables degeneradas**.

Recuérdese además que, de acuerdo con la notación utilizada, siempre que haya operaciones entre matrices (multiplicaciones o adiciones) se consideran los vectores de $\mathbb{R}^l$ como matrices columna, es decir, matrices $l \times 1$.

7.1. Condiciones de optimalidad

Antes de pasar al método simplex en sí, es conveniente estudiar las condiciones de optimalidad para una solución básica realizable cualquiera, sin tener que compararla con otros puntos extremos.

Considérese el problema de optimización lineal tal como se ha supuesto hasta ahora, es decir, un problema de minimización en la forma estándar con una matriz de coeficientes de tamaño $m \times n$, con $m \leq n$ y de rango m.

Dada una matriz B, de tamaño $m \times m$, invertible, submatriz de A, tal que la solución básica correspondiente sea realizable, es decir,

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b \geq 0, \\ x_L &= 0, \end{aligned}$$

se desea saber si este punto extremo $x = (x_B, x_L)$ es óptimo o no.

Como la matriz A es de rango m, entonces en el sistema lineal $Ax = b$ hay $p = n - m$ variables independientes y m variables que dependen de ellas. De esta forma, todo el problema se puede plantear únicamente en función de las variables independientes, llamadas también libres o no básicas.

El problema

$$\begin{aligned} \min \quad z = c^{\mathrm{T}}x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{aligned}$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} \min \quad z = c_B^{\mathrm{T}}x_B + c_L^{\mathrm{T}}x_L \\ Bx_B + Lx_L = b \\ x_B \geq 0, \quad x_L \geq 0, \end{aligned}$$

entonces

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Lx_L,$$

y así se tiene el problema únicamente en función de las variables libres x_L:

$$\begin{aligned} \min \quad z = c_B^{\mathrm{T}}(B^{-1}b - B^{-1}Lx_L) + c_L^{\mathrm{T}}x_L \\ x_L \geq 0. \end{aligned}$$

La expresión de z se puede agrupar así:

$$\begin{aligned} z &= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}Lx_L + c_L^{\mathrm{T}}x_L \\ &= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b + (c_L^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}L)x_L \\ &= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b + (c_L - L^{\mathrm{T}}{B^{-1}}^{\mathrm{T}}c_B)^{\mathrm{T}}x_L. \end{aligned}$$

Si se define
$$\tilde{c}_L = c_L - L^{\mathrm{T}} B^{-1^{\mathrm{T}}} c_B,$$
entonces
$$z = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b + \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} x_L.$$
El vector $\tilde{c}_L$ tiene exactamente $p = n - m$ componentes, es decir, una por cada variable libre; estos coeficientes se llaman usualmente **costos reducidos** o relativos de las variables libres. También se les acostumbra a denotar por $c_j - z_j$.

Es posible definir de manera análoga los costos reducidos para las variables básicas:
$$\tilde{c}_B = c_B - B^{\mathrm{T}} B^{-1^{\mathrm{T}}} c_B = 0.$$
Esta propiedad es una característica muy importante: **los costos reducidos de las variables básicas son nulos**.

Utilizando únicamente las variables libres y sus costos reducidos, el problema de optimización lineal queda ahora así:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b + \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} x_L \\ & x_L \geq 0. \end{aligned}$$

Supongamos, por el momento, que las variables básicas son las m primeras y que las p siguientes son las variables libres. Esta suposición no es restrictiva, pues simplemente se puede considerar como un reordenamiento de las variables.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b + \tilde{c}_{m+1} x_{m+1} + \tilde{c}_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \tilde{c}_n x_n \\ & x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

De lo anterior se puede deducir lo siguiente:

- z es igual a una constante ($c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b$), más una expresión lineal de las variables libres.
- Para la solución básica realizable en estudio, las variables libres son nulas y el valor de z está dado por $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b$.
- z está expresado únicamente en función de las variables libres y si se considera que alguna de éstas cambia, tiene que ser necesariamente aumentando su valor, es decir, pasando de cero a un valor positivo, ya que ninguna variable puede ser negativa.

- Si el costo reducido $\tilde{c}_j$ de una variable libre es negativo, al pasar ésta de cero a un valor positivo, el valor de z disminuye indicando que sí es conveniente modificar esta variable libre x_j aumentando su valor.

- Si los costos reducidos de todas las variables libres son no negativos, ninguna de esas variables debería modificarse, es decir, la solución básica realizable no debe ser modificada, es decir, es óptima.

Proposición 7.1. *Para una solución básica realizable, si los costos reducidos de las variables libres son no negativos, entonces esta solución es óptima. Una solución básica realizable no degenerada es óptima si y solamente si los costos reducidos de las variables libres son no negativos*

$$\tilde{c}_L = c_L - L^T {B^{-1}}^T c_B \geq 0.$$

Ejemplo 7.1.

$$\begin{array}{llllll}
\min & z = -x_1 - 1.4x_2 & & & & \\
& x_1 + \quad x_2 + x_3 & & & & = 400 \\
& x_1 + \quad 2x_2 & & + x_4 & & = 580 \\
& x_1 & & & + x_5 & = 300 \\
& & & & x & \geq \quad 0.
\end{array}$$

Sea

$$B = [A_{\cdot 3} \quad A_{\cdot 4} \quad A_{\cdot 5}].$$

La solución básica correspondiente es $x = (0, 0, 400, 580, 300)$.

$$\tilde{c}_L = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{c}_L = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.4 \end{bmatrix}.$$

Luego este punto extremo (no degenerado) no es óptimo.

Para este mismo problema, si:

$$B = [A_{\cdot 1} \quad A_{\cdot 2} \quad A_{\cdot 5}] \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 220 \\ 180 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

El punto extremo correspondiente es $x = (220, 180, 0, 0, 80)$,

$$\tilde{c}_L = \begin{bmatrix} \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_L = \begin{bmatrix} \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Luego este punto extremo es óptimo y el valor óptimo de z es: $z^* = -472$, valor que se puede obtener de dos formas:

$$z = c^{\mathrm{T}}x = \begin{bmatrix} -1 & -1.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \\ 80 \end{bmatrix} = -472,$$

$$z = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b = \begin{bmatrix} -1 & -1.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 180 \\ 80 \end{bmatrix} = -472. \ \diamond$$

Ejemplo 7.2. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min \ \ z = -x_1 - \ x_2 & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad & = 3 \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad + x_4 \qquad & = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 9 \\ x & \geq 0. \end{aligned}$$

y el punto

$$x = (1, 1, 0, 0, 0).$$

Esta solución básica factible degenerada se puede obtener con

$$B = \begin{bmatrix} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & A_{\cdot 4} \end{bmatrix}.$$

Entonces al calcular los costos reducidos de las variables libres x_3 y x_5 se obtiene

$$\tilde{c}_L^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Como la solución es degenerada, no se puede concluir que el punto no sea óptimo. Este mismo punto se puede obtener considerando

$$B = \left[\begin{array}{ccc} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & A_{\cdot 3} \end{array} \right] \quad \text{y así} \quad \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{c}_4 & \tilde{c}_5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1/6 & 1/6 \end{array} \right],$$

lo cual indica que el punto sí es óptimo. $\diamond$

7.2. Deducción matricial del método simplex

La deducción matricial del método simplex que aparece a continuación, es la que provee la justificación de las tablas del simplex. . Sin embargo, en la práctica, esta deducción no se utiliza, pero en cambio, sí se utilizan las tablas. Para ayudar a la comprensión de la deducción puede ser útil seguir las diferentes partes del desarrollo del ejemplo 7.3 en las páginas siguientes.

Para aplicar el método simplex a un problema de minimización en la forma estándar se requiere además (ejemplo 7.3.1) :

- $b \geq 0$,
- se puede formar I_m (matriz identidad de orden m) con m columnas de A.

La primera suposición es muy fácil de cumplir, pues cuando hay un b_i negativo se multiplica toda la igualdad por -1. Más adelante se verá como tratar el caso en el que no se cumple la segunda suposición.

Sean:

$$\begin{aligned} A^1 &= A, \\ b^1 &= b. \end{aligned}$$

En esta primera iteración es muy fácil obtener la solución básica realizable (ejemplo 7.3.1), pues basta tomar:

$$\begin{array}{l} B^1 = I_m \\ L^1 \;\; \text{conformada por las columnas restantes,} \end{array}$$

y la solución básica realizable es:

$$\begin{aligned} x_B^1 &= b^1, \\ x_L^1 &= 0, \\ x^1 &= (x_B^1, x_L^1). \end{aligned}$$

Para pasar a la siguiente solución básica realizable x^2, que, además, debe ser mejor (su valor de z debe ser menor), únicamente se cambiará una columna de B^1: una columna de B^1 dejará de ser básica y pasará a ser libre y también una columna de L^1 dejará de ser libre para convertirse en básica. De manera análoga, una variable básica se volverá libre, y una variable libre se convertirá en básica.

Además, se pasará del sistema

$$A^1x = b^1 \text{ donde } \quad \begin{aligned} B^1 &= I_m, \\ b^1 &\geq 0, \end{aligned}$$

a otro sistema equivalente (que tiene exactamente las mismas soluciones):

$$A^2x = b^2 \text{ donde también } \quad \begin{aligned} B^2 &= I_m, \\ b^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Este proceso se repite hasta llegar al óptimo o hasta saber que el óptimo no es acotado.

Al precisar más estas ideas, es necesario detallar varios pasos:

- ¿Cómo son las condiciones de optimalidad?
- ¿Cómo se escoge la variable libre que se convierte en básica (la variable que "entra" a la base)?
- ¿Cuándo el valor óptimo de z no es finito, es decir, el valor de z no es acotado (inferiormente)?
- ¿Cuál es la variable que deja de ser básica y se convierte en libre (la variable que "sale" de la base)?
- ¿Cómo se modifican los coeficientes de A^k, b^k para pasar a A^{k+1}, b^{k+1}?

En lo que sigue sobre el método simplex, salvo indicación contraria, para no recargar demasiado las fórmulas, se suprimirá el superíndice, es decir, cuando no haya superíndice se supondrá que es k y cuando el superíndice sea ' (una comilla) se supondrá que es $k+1$.

Con las suposiciones del método simplex ($B^k = I_m$) el cálculo de los costos reducidos se simplifica bastante y las **condiciones de optimalidad** resultan muy sencillas. (ejemplo 7.3.3):

$$\tilde{c}_L = c_L - L^{\mathrm{T}} c_B \geq 0.$$

Además, el valor de z es muy sencillo de calcular:

$$z = c_B^{\mathrm{T}} b$$

Sean: β la m-upla formada por los índices de las columnas (y de las variables) básicas en el orden adecuado (para formar la matriz identidad), λ el vector de $p = n - m$ componentes, formado por los índices de las columnas libres.

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m),$$
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p),$$

entonces, por ejemplo,

$$x_B = (x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_m}),$$
$$x_L = (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_p}).$$

El cálculo de los costos reducidos de las variables libres $(c_L - L^{\mathrm{T}} c_B)$ se puede explicitar así:

$$\tilde{c}_L = c_L - \begin{bmatrix} (L^{\mathrm{T}})_{1\cdot} \\ (L^{\mathrm{T}})_{2\cdot} \\ \vdots \\ (L^{\mathrm{T}})_{p\cdot} \end{bmatrix} c_B$$

$$\tilde{c}_L = c_L - \begin{bmatrix} (L^{\mathrm{T}})_{1\cdot} c_B \\ (L^{\mathrm{T}})_{2\cdot} c_B \\ \vdots \\ (L^{\mathrm{T}})_{p\cdot} c_B \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_L = c_L - \begin{bmatrix} (A_{\cdot\lambda_1})^{\mathrm{T}} c_B \\ (A_{\cdot\lambda_2})^{\mathrm{T}} c_B \\ \vdots \\ (A_{\cdot\lambda_p})^{\mathrm{T}} c_B. \end{bmatrix}$$

El resultado anterior se puede presentar, individualmente, para cada costo reducido:

$$\tilde{c}_{\lambda_i} = c_{\lambda_i} - (A_{\cdot\lambda_i})^{\mathrm{T}} c_B \quad i = 1, \ldots, p,$$

o también

$$\tilde{c}_j = c_j - (A_{\cdot j})^{\mathrm{T}} c_B = c_j - c_B^{\mathrm{T}} A_{\cdot j} \quad \text{para la variable libre } \ x_j.$$

La igualdad anterior es válida también para las variables básicas, pero para estas variables no es necesario calcular el costo reducido ya que es nulo. Efectuando el producto matricial se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_j &= c_j - (a_{1j}c_{\beta_1} + a_{2j}c_{\beta_2} + \ldots + a_{mj}c_{\beta_m}) \\ &= c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_{\beta_i}.\end{aligned}$$

Si $\tilde{c}_j^k < 0$ para alguna variable libre (y x^k es un solución básica realizable no degenerada), entonces x^k no es una solución óptima.

Si $\tilde{c}_j^k \geq 0$ para todas las variables libres, entonces x^k sí es una solución óptima.

En el caso óptimo hay dos posibilidades:

i) para todas las variables libres $\tilde{c}_j > 0$,

ii) para alguna variable libre $\tilde{c}_j = 0$.

En el caso ii) la(s) variable(s) libre(s) tal(es) que $\tilde{c}_j = 0$ puede(n) tomar valores positivos sin que esto haga aumentar el valor de z, es decir, el valor óptimo z^* permanece óptimo al variar x_j de cero a un valor positivo. Esto quiere decir, si no se trata de una solución realizable básica degenerada, que hay varios puntos extremos óptimos, más aún, hay un número infinito de puntos óptimos (cualquier combinación convexa de puntos extremos óptimos).

En el caso i), si el punto no es degenerado, cualquier modificación de una variable libre x_j, por pequeña que sea, hace aumentar (empeorar) el valor de z; o sea, el punto x^k es el único óptimo.

Hay varios criterios para escoger una variable, entre las libres, con coeficiente $\tilde{c}_j < 0$, para que deje de ser nula y tome un valor positivo, volviéndose también variable básica. Uno de estos criterios, tal vez el más usado, es escoger la variable con costo reducido más pequeño, es decir, la de costo reducido "más negativo". Así se escoge la variable libre que hace disminuir más la función objetivo z por cada unidad que aumente esta variable libre.

Otro criterio consiste simplemente en escoger cualquier variable libre con costo reducido negativo, por ejemplo, la primera encontrada.

Finalmente, el mejor criterio es escoger la variable libre que más hace disminuir, en total, el valor de z. Por ejemplo, si $\tilde{c}_1 = -3$ y $\tilde{c}_3 = -5$ y si x_1 puede aumentar hasta 11 y x_3 puede aumentar hasta 6, entonces es mucho mejor escoger la variable x_1 pues produce, en total, una disminución de 33. Aunque este criterio es el mejor, en la práctica no se usa pues requiere conocer el máximo valor que puede tomar cada variable libre con costo reducido negativo, y esto implica muchas más operaciones y comparaciones.

Sea x_e la variable que "entra" a la base.

$$\tilde{c}_e = \min\{\tilde{c}_j : \tilde{c}_j < 0\}.$$

Al tomar x_e un valor positivo, las variables básicas pueden modificarse, pues son función de las variables libres (ej. 7.3.4).

$$\begin{aligned}
x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Lx_L = b - Lx_L \\
x_B &= b - [L_{\cdot 1} \quad \dots \quad L_{\cdot p}] \begin{bmatrix} x_{\lambda_1} \\ \vdots \\ x_{\lambda p} \end{bmatrix} \\
&= b - \sum_{i=1}^{p} L_{\cdot i} x_{\lambda_i} \\
x_B &= b - \sum_{i=1}^{p} A_{\cdot \lambda_i} x_{\lambda_i}.
\end{aligned}$$

Como únicamente la variable libre x_e se vuelve positiva, las demás variables libres siguen siendo nulas, entonces

$$\begin{aligned}
x_B &= b - x_e A_{\cdot e}, \\
x_{\beta_i} &= b_i - x_e a_{ie}, \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

La variable x_e, que vale cero, va a tomar valores positivos y entre más grande sea, más disminuye el valor de z. Se puede presentar un inconveniente si alguna (o algunas) variable básica se vuelve negativa, pues esto no está permitido. Es claro que ello podría suceder únicamente para las variables básicas con coeficiente a_{ie} positivo. Entonces la solución es muy sencilla, basta aumentar x_e hasta cuando la primera variable básica con a_{ie} positivo se anule.

$$x_{\beta_i} = 0 \quad \text{si} \quad x_e = \frac{b_i}{a_{ie}}\cdot$$

El nuevo valor de x_e será el máximo valor que pueda tomar, o sea, el mayor valor sin que ninguna variable básica sea negativa, o sea,

$$x'_e = \frac{b_\sigma}{a_{\sigma e}} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ie}} : \; a_{ie} > 0, \; i = 1, ..., m \right\}.$$

Este hecho determina, al mismo tiempo, cuál es la primera variable básica que se anula con valores positivos de x_e, es decir, cuál es la variable básica que "sale" de las básicas (ejemplo 7.3.5). Si se llega a presentar "empate" en el cociente mínimo para dos o más variables básicas, se puede escoger como variable básica que sale cualquiera de las "empatadas", por ejemplo, la primera encontrada; en la siguiente tabla la solución básica realizable obtenida será degenerada.

$$x_s = x_{\beta_\sigma} = \text{ variable que "sale" de las básicas.}$$

El subíndice s indica la posición de la variable de 1 a n; el subíndice σ indica la posición de la variable de 1 a m, es decir, entre las variables básicas.

Si la variable x_e (u otra variable libre con coeficiente $\tilde{c}_j < 0$) puede aumentar de manera ilimitada sin disminuir el valor de las variables básicas, entonces también el valor de z puede disminuir ilimitadamente y así el óptimo no es acotado. Esto se tiene cuando todos los elementos de la columna correspondiente $A_{\bullet e}$ son menores o iguales a cero.

Si $a_{ie} \leq 0$ **para** $i = 1, 2, \ldots, m$**, entonces el óptimo no es acotado.**

Lo que resta de una iteración cualquiera del método simplex, es simplemente hacer las modificaciones adecuadas para pasar de A^k, b^k a A^{k+1}, b^{k+1} de tal manera que $B^{k+1} = I_m$.

En la iteración k

$$\beta^k = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma, \ldots, \beta_m),$$

en la iteración k+1 (ejemplo 7.3.6)

$$\beta^{k+1} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, e, \ldots, \beta_m).$$

Al tomar las columnas de A^k correspondientes a β^k se tiene, obviamente, la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} A^k_{\cdot\beta_1} & A^k_{\cdot\beta_2} & \dots & A^k_{\cdot\beta_\sigma} & \dots & A^k_{\cdot\beta_m} \end{bmatrix} = I_m.$$

Pero al tomar la columnas de A^k correspondientes a β^{k+1} ya no se tiene la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} A^k_{\cdot\beta_1} & A^k_{\cdot\beta_2} & \dots & A^k_{\cdot e} & \dots & A^k_{\cdot\beta_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & a^k_{1e} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a^k_{2e} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^k_{\sigma e} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^k_{me} & \dots & 1 \end{bmatrix} = Q^k$$

Esta matriz Q^k es muy fácil de construir, se toma la matriz identidad de orden m y se cambia su columna σ por la columna $A_{\cdot e}$.

El determinante de Q^k es $a_{\sigma e}$, valor no nulo (más aún, es positivo), entonces Q^k es invertible (y $(Q^k)^{-1}$ también es invertible), así el sistema $A^k x = b^k$ se puede premultiplicar por $Q^{k^{-1}}$, obteniéndose el sistema equivalente

$$A^{k+1}x = b^{k+1},$$

donde

$$A^{k+1} = (Q^k)^{-1}A^k, \qquad b^{k+1} = (Q^k)^{-1}b^k.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} A^{k+1}_{\cdot\beta_1} & A^{k+1}_{\cdot\beta_2} & \dots & A^{k+1}_{\cdot e} & \dots & A^{k+1}_{\cdot\beta_m} \end{bmatrix} = I_m,$$

que es exactamente lo deseado.

Fácilmente se comprueba que $Q^{k^{-1}}$ tiene la siguiente forma (ver ejemplo 7.3.7):

$$(Q^k)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -a^k_{1e}/a^k_{\sigma e} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -a^k_{2e}/a^k_{\sigma e} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a^k_{\sigma e} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a^k_{me}/a^k_{\sigma e} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Explicitando los productos $(Q^k)^{-1}A^k$ y $(Q^k)^{-1}b^k$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{k+1} &= a_{ij}^k - \frac{a_{ie}^k a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}, \ \ i = 1, ..., m \ , \ \ i \neq \sigma, \ \ j = 1, ..., n, \\
b_i^{k+1} &= b_i^k - \frac{a_{ie}^k b_\sigma^k}{a_{\sigma e}^k}, \ \ i = 1, ..., m, \ \ i \neq \sigma, \\
a_{\sigma j}^{k+1} &= \frac{a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}, \ \ \ j = 1, ..., n, \\
b_\sigma^{k+1} &= \frac{b_\sigma^k}{a_{\sigma e}^k}.
\end{aligned}
$$

Se puede comprobar que las fórmulas anteriores pueden ser vistas simplemente como el resultado de efectuar operaciones elementales sobre las filas de A^k, b^k utilizando la fila σ, para obtener el valor uno en la posición (σ, e) y el valor cero en las otras posiciones (i, e) de la columna e (ejemplo 7.3.8).

Con el nuevo sistema $A^{k+1}x = b^{k+1}$ se efectúa el mismo proceso y así sucesivamente (ejemplo 7.3.9).

En el método simplex, casi siempre se pasa de un punto x^k a un punto mejor x^{k+1}. En el peor de los casos x^k y x^{k+1} son igualmente buenos. Más precisamente, si x^k no es degenerado, entonces $c^{\mathrm{T}}x^{k+1} < c^{\mathrm{T}}x^k$. En general, $c^{\mathrm{T}}x^{k+1} \leq c^{\mathrm{T}}x^k$.

Puesto que el número de puntos extremos (soluciones básicas realizables) es finito y (en ausencia de soluciones básicas realizables degeneradas) siempre se pasa de un punto extremo a uno estrictamente mejor, entonces el método simplex es un proceso iterativo finito. Más aún, las estadísticas muestran [Dan63] que, para n bastante mayor que m, el número promedio de iteraciones varía aproximadamente entre m y $3m$, valores mucho menores que $C_m^n = n!/(m!(n-m)!)$ (número de combinaciones de m elementos tomados dentro de n elementos).

En presencia de degeneramiento, ciertas reglas (perturbación infinitesimal, reglas lexicográficas, método de Bland) permiten evitar que en algún momento el proceso se vuelva cíclico, impidiendo la obtención del óptimo. Además, en aplicaciones reales, el degeneramiento aparece muy pocas veces, y de estas pocas veces, la mayoría de las veces no da lugar a un ciclo sin fin. Más aún, casi todos los ejemplos de ciclos sin fin conocidos, han sido construidos expresamente con esta finalidad. Por esta razón, casi siempre, como en la mayoría de los programas de computador comerciales, no es necesario preocuparse por el ciclado. Sin embargo, sí es útil colocar un número máximo de iteraciones. Si se llegara a alcanzar este número máximo de iteraciones se tendría, o bien, un número máximo de iteraciones muy pequeño, o bien, se trata posiblemente de un problema cíclico.

Ejemplo 7.3.

$$\max \quad z = x_1 + 1.4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\leq 400 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq 580 \\ x_1 \qquad &\leq 300 \\ x &\geq \quad 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura

$$\min \quad z = -x_1 - 1.4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + x_3 \qquad &= 400 \\ x_1 + \quad 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 580 \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 300 \\ x &\geq \quad 0. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 7.3.1 : Es claro que se cumplen las condiciones del método simplex: $b \geq 0$ y las columnas tercera, cuarta y quinta de A forman la matriz identidad.

Ejemplo 7.3.2 :

$$L^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_B^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_L^1 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.4 \end{bmatrix}.$$

De manera inmediata se tiene el primer punto extremo (solución básica realizable) dado por el método simplex.

$$\begin{aligned} x_B^1 &= (x_3, x_4, x_5) = (400, 580, 300), \\ x^1 &= (0, 0, 400, 580, 300), \\ z &= c_{B^1}^{\mathrm{T}} b^1 = [0 \quad 0 \quad 0] b^1 = 0. \end{aligned}$$

El paso que sigue es averiguar si x^k es óptimo.

Ejemplo 7.3.3 :

$$\tilde{c}_L^1 = c_L^1 - L^{1\,\mathrm{T}} c_B^1 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_L^1 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.4 \end{bmatrix},$$

luego x^1 no es óptimo.

Ejemplo 7.3.4 : La variable que "entra" a la base es entonces

$$x_e = x_2.$$

Ejemplo 7.3.5 : Para escoger la variable que sale de la base hay que efectuar los cocientes:

$$\frac{b_1^1}{a_{12}^1} = \frac{400}{1} = 400,$$
$$\frac{b_2^1}{a_{22}^1} = \frac{580}{2} = 290,$$
$$\frac{b_3^1}{a_{32}^1} : \text{ no se calcula ya que } a_{32}^1 \leq 0.$$

La variable que "sale" es la segunda variable básica.

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_2},$$
$$x_s = x_4.$$

Ejemplo 7.3.6 : En la segunda iteración las variables básicas serán: x_3, x_2, x_5 y las variables libres x_1, x_4.

Ejemplo 7.3.7 :

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (Q^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 7.3.8 : Ahora se pasa a un sistema equivalente $A^2 x = b^2$ donde A^2, b^2 se pueden obtener de dos maneras, bien sea premultiplicando A^1, b^1

por la matriz $(Q^1)^{-1}$, es decir, $A^2 = (Q^1)^{-1}A^1$, $b^2 = (Q^1)^{-1}b^1$, o bien, por medio de operaciones elementales sobre las filas de A^1, b^1 para obtener un uno en la posición (2,2) y ceros en el resto de la segunda columna.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^2 = \begin{bmatrix} 110 \\ 290 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 7.3.9 :

$$\begin{aligned} x_B^2 &= (x_3, x_2, x_5) = (110, 290, 300), \\ x^2 &= (0, 290, 110, 0, 300), \\ z &= -406. \end{aligned}$$

El valor de z^2 se puede obtener de tres maneras:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad z^2 = c^{\mathrm{T}} x^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 290 & 110 & 0 & 300 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ &\text{ii)} \quad z^2 = c_{B^2}^{\mathrm{T}} b^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 & 290 & 300 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ &\text{iii)} \quad z^2 = z^1 + \tilde{c}_e^1 \frac{b_\sigma^1}{a_{\sigma e}^1} = z^1 + \tilde{c}_e^1 x_e^1 = 0 + (-1.4)(290). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_L^2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{c}_L^2 &= \begin{bmatrix} -3/10 \\ 7/10 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

luego x^2 no es óptimo.

$$x_e = x_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{b_1^2}{a_{11}^2} &= \frac{110}{1/2} = 220, \\ \frac{b_2^2}{a_{21}^2} &= \frac{290}{1/2} = 580, \\ \frac{b_3^2}{a_{31}^2} &= \frac{300}{1} = 300, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_3. \end{aligned}$$

Ahora las nuevas variables básicas serán: x_1, x_2, x_5 y las variables libres x_3, x_4.

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (Q^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El nuevo sistema equivalente está dado por:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^3 = \begin{bmatrix} 220 \\ 180 \\ 80. \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_B^3 &= (x_1, x_2, x_5) = (220, 180, 80), \\ x^3 &= (220, 180, 0, 0, 80), \\ z &= -472. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_L^3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.4 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{c}_L^3 &= \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

luego x^3 sí es óptimo ya que $\tilde{c}_L^3 \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} x^* &= (220, 180, 0, 0, 80) \text{ es el único punto óptimo }, \\ z^* &= -472 \text{ es el valor mínimo de } z. \end{aligned}$$

Como el problema inicial era de maximización, entonces

$$z^* = 472. \ \diamond$$

EJERCICIOS

En los ejercicios 7.1 a 7.6 convierta el problema a la forma estándar, averigüe si cada uno de los puntos dados es factible. Si lo es, calcule los costos reducidos para saber si el punto es óptimo.

7.1. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

a) $x = (0, 0)$.

b) $x = (1, 4)$.

c) $x = (1, 1)$.

d) $x = (7, 0)$.

7.2. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

a) $x = (1, 4)$.

b) $x = (3, 2)$.

c) $x = (1, 1)$.

d) $x = (2, 3)$.

7.3. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

a) $x = (0, 12)$.

b) $x = (4, 8)$.

c) $x = (5, 10)$.

d) $x = (2, 10)$.

7.4. Minimizar $z = -2x_1 - 3x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

a) $x = (0, 12)$.

b) $x = (4, 8)$.

c) $x = (2, 10)$.

7.5. Minimizar $z = -2.5x_1 + x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

a) $x = (4, 8)$.

b) $x = (0, 12)$.

c) $x = (6, 13)$.

d) $x = (8, 18)$.

e) $x = (10, 20)$.

7.6. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 \geq 3$, $2x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 + x_2 \geq 2$, $x \geq 0$.

a) $x = (1, 1)$.

b) $x = (0, 3)$.

En los ejercicios 7.7 a 7.12 convierta el problema a la forma estándar. Si se cumplen las condiciones, aplique el método simplex hasta encontrar el óptimo, o hasta saber que no hay óptimo acotado.

7.7. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

7.8. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

7.9. Minimizar $z = x_5$ con las restricciones $x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 12$, $5x_1 - 2x_2 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

7.10. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_2 - 5x_3 - x_4 = 8$, $x_1 - 2.5x_3 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

7.11. Minimizar $z = 4x_1 - 3x_2$ con las restricciones $x_2 - 5x_3 - x_4 = 8$, $x_1 - 2.5x_3 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

7.12. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

Capítulo 8

TABLAS DEL MÉTODO SIMPLEX

8.1. Una primera tabla para el simplex

Los datos y valores del método simplex se pueden organizar en una tabla, de tal manera que se facilite la solución manual de un problema pequeño de programación lineal.

$$
\begin{array}{cc|cccc c|c|c}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & & x_n & & \\
\cline{3-7}
 & & c_1 & c_2 & c_3 & & c_n & & \\
\cline{2-8}
x_{\beta_1} & c_{\beta_1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} & b_1 & \frac{b_1}{a_{1e}} \\
x_{\beta_2} & c_{\beta_2} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} & b_2 & \mathrm{X} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
x_{\beta_m} & c_{\beta_m} & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} & b_m & \frac{b_m}{a_{me}} \\
\cline{2-8}
 & & \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \mathrm{X} & & \tilde{c}_n & z & \\
\cline{3-7}
\end{array}
$$

Algunos valores de esta tabla se obtienen de manera inmediata: c_1, c_2, ..., c_n, $\ldots$, a_{ij}, ..., b_1, ..., b_m.

A la izquierda, fuera de la tabla, hay una columna indicando las variables básicas $x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_m}$. La primera columna, dentro de la tabla, contiene los elementos de c_B: c_{β_1}, ..., c_{β_m}, es decir, los coeficientes de la función objetivo correspondientes a las variables básicas (en el orden adecuado). En la última fila están los valores $\tilde{c}_j$. Para las variables básicas su valor es cero, y no hay necesidad de calcularlo; se puede escribir el número 0 o también se podría indicar con un signo X . Para las variables libres

$$\tilde{c}_j = c_j - (c_{\beta_1} a_{1j} + c_{\beta_2} a_{2j} + \dots + c_{\beta_m} a_{mj}),$$

es decir, es el valor de c_j correspondiente, menos la suma de los productos, término a término, de los elementos de la columna c_B y la j- ésima columna de A.

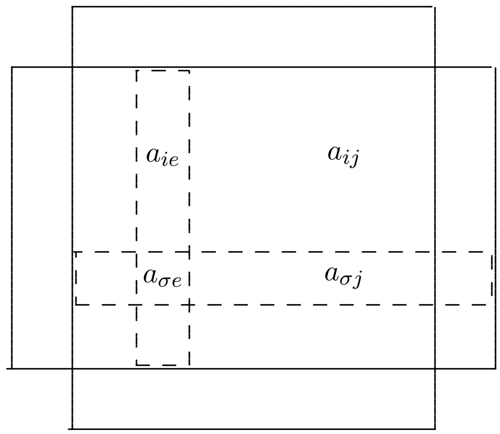
A partir de la tabla se sabe inmediatamente el valor de cada variable x_j. El valor de cada una de las variables básicas (las que están señaladas en la columna izquierda) es exactamente el valor del término independiente b_i que está, al frente, en la última columna de la tabla (a la derecha). Las demás variables tienen valor 0 por ser libres.

El valor de z corresponde simplemente a la suma de los productos, término a término, de los elementos de la columna c_B y de la columna de términos independientes (los b_i), que está al lado derecho.

$$z = c_{\beta_1} b_1 + c_{\beta_2} b_2 + \dots + c_{\beta_m} b_m.$$

Una vez calculados los costos reducidos $\tilde{c}_j$, se puede saber si la tabla es óptima o no. Recordemos que se tiene el óptimo si los costos reducidos $\tilde{c}_j$ son no negativos, para todas las variables libres.

Si la tabla no es óptima se escoge la variable que entra a la base (aquella cuyo coeficiente $\tilde{c}_j$ sea el menor). Para visualizar mejor, se resalta la columna correspondiente de A, es decir, $A_{\bullet e}$.



Los valores del extremo derecho de la tabla b_i/a_{ie}, son simplemente los cocientes de los términos independientes b_i y los elementos de la columna resaltada (la columna que entra), cuando éstos son positivos. Cuando los coeficientes a_{ie} son menores o iguales a cero el cociente no se efectúa (y se puede indicar por un signo x). La escogencia de la variable básica que sale x_{β_σ} se hace buscando el mínimo de los cocientes. De nuevo para visualizar mejor, se resalta la fila correspondiente.

Si ninguno de los cocientes b_i/a_{ie} se efectúa, el valor de z no es acotado (inferiormente).

Para empezar la iteración siguiente únicamente queda por calcular la nueva tabla, con base en las fórmulas, pero teniendo en cuenta algunas simplificaciones:

- Las columnas de la nueva tabla correspondientes a las nuevas variables básicas forman la matriz identidad y, por lo tanto, no es necesario hacer operaciones sino simplemente dar los valores adecuados.

- Para el cálculo de la fila σ únicamente hay que dividir todos sus elementos por el elemento $a_{\sigma e}$, llamado **pivote**.

- Para los otros valores

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ie}^k a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k},$$

es decir, el nuevo valor de a_{ij} es igual al antiguo valor menos el producto de los dos elementos “resaltadosçorrespondientes, dividido por el elemento pivote $a_{\sigma e}$. Los elementos “resaltadosçorrespondientes son: el elemento de la misma fila de a_{ij} (la fila i) que está en la columna de la variable que entra (la columna e), es decir, a_{ie}, y el elemento de la misma columna de a_{ij} (columna j) que está en la fila correspondiente a la variable básica que sale (fila σ), es decir, $a_{\sigma j}$.

Es claro que si en la fila resaltada (fila de la variable básica que sale) hay un elemento nulo, entonces los elementos de esa columna no se alteran al pasar a la siguiente tabla. De manera semejante, si en la columna resaltada (columna de la variable que entra) hay un elemento nulo, entonces los elementos de esta fila no se alteran al pasar a la siguiente tabla.

Ejemplo 8.1.

$$\min \quad z = -x_1 - 1.4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\leq 400 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq 580 \\ x_1 \qquad &\leq 300 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Ante todo se colocan en la primera tabla los valores “inmediatos”.

		-1	-1.4	0	0	0	
x_3	0	1	1	1	0	0	400
x_4	0	1	2	0	1	0	580
x_5	0	1	0	0	0	1	300

$$x = (0, 0, 400, 580, 300).$$

Luego se calculan los costos reducidos.

		-1	-1.4	0	0	0	
x_3	0	1	1	1	0	0	400
x_4	0	1	2	0	1	0	580
x_5	0	1	0	0	0	1	300
		-1	-1.4	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	0

Se averigua si la tabla es óptima. Si no lo es, se escoge la variable que entra a la base.

$$x_e = x_2.$$

		-1	-1.4	0	0	0	
x_3	0	1	1	1	0	0	400
x_4	0	1	2	0	1	0	580
x_5	0	1	0	0	0	1	300
		-1	-1.4	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	0

Si en la columna de la variable que entra hay elementos positivos, se efectúan los cocientes b_i/a_{ie} para $a_{ie} > 0$.

		-1	-1.4	0	0	0		
x_3	0	1	1	1	0	0	400	400
x_4	0	1	2	0	1	0	580	290
x_5	0	1	0	0	0	1	300	X
		-1	-1.4	**0**	**0**	**0**	0	

Se escoge la variable básica que sale.

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_2},$$
$$x_s = x_4.$$

		-1	-1.4	0	0	0		
x_3	0	1	1	1	0	0	400	400
x_4	0	1	2	0	1	0	580	290
x_5	0	1	0	0	0	1	300	X
		-1	-1.4	**0**	**0**	**0**	0	

Ahora hay que construir la nueva tabla. En ella se colocan los valores inmediatos. En las columnas 3, 2, 5 debe estar la matriz identidad.

		-1	-1.4	0	0	0	
x_3	0		0	1		0	
x_2	-1.4		1	0		0	
x_5	0		0	0		1	
			$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{0}$	

Se calculan los demás valores de A y de b. He aquí el ejemplo de un cálculo: $a^2_{11} = 1 - \dfrac{(1 \times 1)}{2} = 1/2.$

		-1	-1.4	0	0	0	
x_3	0	0.5	0	1	-0.5	0	110
x_2	-1.4	0.5	1	0	0.5	0	290
x_5	0	1	0	0	0	1	300
			$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{0}$	-406

$$x = (0, 290, 110, 0, 300).$$

Se calculan los nuevos costos reducidos, se verifica si la tabla es óptima, se escoge la variable que entra, se escoge la variable que sale, ...

		-1	-1.4	0	0	0		
x_3	0	0.5	0	1	-0.5	0	110	220
x_2	-1.4	0.5	1	0	0.5	0	290	580
x_5	0	1	0	0	0	1	300	300
		-0.3	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	0.7	$\mathbf{0}$	-406	

$$
\begin{aligned}
x_e &= x_1,\\
x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1},\\
x_s &= x_3.
\end{aligned}
$$

		-1	-1.4	0	0	0	
x_1	-1	1	0	2	-1	0	220
x_2	-1.4	0	1	-1	1	0	180
x_5	0	0	0	-2	1	1	80
		$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	0.6	0.4	$\mathbf{0}$	-472

$$x^* = (220, 180, 0, 0, 80).$$

Como los costos reducidos $\tilde{c}_3, \tilde{c}_4 \geq 0$, entonces el x obtenido es óptimo; este x^* es óptimo único ya que $\tilde{c}_3$, $\tilde{c}_4 > 0$; el valor óptimo de la función objetivo es $z^* = -472$. $\diamond$

Ejemplo 8.2.

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & z = & & x_5 + x_6 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 & + x_5 & = \ 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 & + x_6 & = 12 \\
& & & x \geq \ 0.
\end{array}
$$

En este ejemplo también se puede aplicar directamente el método simplex, ya que $b \geq 0$ y, además, con las columnas quinta y sexta se tiene la matriz identidad.

		0	0	0	0	1	1		
x_5	1	1	2	-1	0	1	0	4	4
x_6	1	5	2	0	-1	0	1	12	2.4
		-6	-4	1	1	**0**	**0**	16	

$$
\begin{aligned}
x &= (0, 0, 0, 0, 4, 12), \\
x_e &= x_1, \\
x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\
x_s &= x_6.
\end{aligned}
$$

		0	0	0	0	1	1		
x_5	1	0	1.6	-1	0.2	1	-0.2	1.6	1
x_1	0	1	0.4	0	-0.2	0	0.2	2.4	6
		0	-1.6	1	-0.2	**0**	1.2	1.6	

$$
\begin{aligned}
x &= (2.4, 0, 0, 0, 1.6, 0), \\
x_e &= x_2, \\
x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\
x_s &= x_5.
\end{aligned}
$$

		0	0	0	0	1	1	
x_2	0	0	1	$-5/8$	$1/8$	$5/8$	$-1/8$	1
x_1	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	$-1/4$	$1/4$	2
		0	**0**	0	0	1	1	0

$$x^* = (2, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Esta solución básica realizable es óptima puesto que todos los costos reducidos de variables libres son no negativos. Como, además, algunos de éstos son nulos y la solución no es degenerada, entonces se puede afirmar que hay un número infinito de soluciones óptimas para este problema. $\diamond$

8.2. Una tabla más compacta para el simplex

La tabla del método simplex se puede ver de otra manera, muy semejante, pero con la diferencia de que hay menos fórmulas para pasar de una tabla a la siguiente. Las pequeñas diferencias se basan en los siguientes hechos:

Se puede demostrar que los costos reducidos de la tabla $k+1$ se pueden calcular directamente a partir de los costos reducidos de la tabla k, mediante la siguiente fórmula:

$$\tilde{c}_j^{k+1} = \tilde{c}_j^k - \frac{\tilde{c}_e^k a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}.$$

Como se veía en el capítulo 7 , el nuevo valor de z se puede calcular directamente mediante la siguiente fórmula:

$$z^{k+1} = z^k + \frac{\tilde{c}_e^k b_\sigma^k}{a_{\sigma e}^k},$$

o también:

$$-z^{k+1} = -z^k - \frac{\tilde{c}_e^k b_\sigma^k}{a_{\sigma e}^k}.$$

Si se supone que los costos reducidos forman la fila $m+1$, que el valor de $-z$ es el elemento en la posición $(m+1, n+1)$ y que los términos independientes de las igualdades hacen parte de la columna $n+1$, entonces se tiene una matriz $\hat{A}^k$ de tamaño $(m+1)\ \times(n+1)$ con la siguiente estructura:

$$\hat{A}^k \quad = \quad \begin{bmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & \dots & a_{1n}^k & b_1^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \dots & a_{2n}^k & b_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^k & a_{m2}^k & \dots & a_{mn}^k & b_m^k \\ \tilde{c}_1^k & \tilde{c}_2^k & \dots & \tilde{c}_n^k & -z^k \end{bmatrix}$$

Así las fórmulas para calcular b_i^{k+1}, $\tilde{c}_j^{k+1}$, $-z^{k+1}$ se convierten en:

$$\begin{aligned} a_{i,n+1}^{k+1} &= a_{i,n+1}^k - \frac{a_{ie}^k a_{\sigma,n+1}^k}{a_{\sigma e}^k}, \quad i=1,\dots,m, \\ a_{m+1,j}^{k+1} &= a_{m+1,j}^k - \frac{a_{m+1,e}^k a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}, \quad j=1,\dots,n, \\ a_{m+1,n+1}^{k+1} &= a_{m+1,n+1}^k - \frac{a_{m+1,e}^k a_{\sigma,n+1}^k}{a_{\sigma e}^k}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que las fórmulas del capítulo 7 son válidas también para $i=m+1$ y para $j=n+1$.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{k+1} &= a_{ij}^k - \frac{a_{ie}^k a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}, \ \ i=1,...,m+1, \ \ i\neq\sigma, \ \ j=1,...,n+1, \\ a_{\sigma j}^{k+1} &= \frac{a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}\ , \quad j=1,...,n+1. \end{aligned}$$

Mediante estas fórmulas se calculan todos los elementos para pasar de la tabla k a la tabla $k+1$.

Queda por ver cómo se construye la primera tabla $\hat{A}^1$. Esta se puede construir utilizando las fórmulas para calcular los primeros costos reducidos y el valor de $-z$, o bien se puede obtener a partir de la construcción de una tabla inicial $\hat{A}^0$ donde estén A, b, los costos c_j y el valor de $-z=0$.

$$\hat{A}^0 \quad = \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 \end{bmatrix}$$

Para pasar de $\hat{A}^0$ a $\hat{A}^1$ basta con efectuar operaciones elementales sobre las filas de $\hat{A}^0$ de tal manera que en la fila $m+1$ se obtenga el valor cero para las variables básicas, es decir, se obtiene así, al mismo tiempo, en la fila $m+1$ los costos reducidos $\tilde{c}_j$ y el valor de $-z$.

Una convención muy utilizada es resaltar el elemento pivote $a_{\sigma e}$, encerrándolo entre un círculo o un cuadrado, mostrando con esto al mismo tiempo la columna de la variable que entra y la fila de la variable básica que sale.

Ejemplo 8.3. Consideremos los mismos datos del ejemplo 8.2:

$$\begin{aligned} \min\ z = & \qquad\qquad\qquad x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad = 4 \\ & 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 = 12 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La columnas que forman la matriz identidad 2×2 son la quinta y la sexta, entonces hay que buscar, mediante operaciones elementales entre filas, el valor cero en las posiciones (3,5) y (3,6). Esto se obtiene fácilmente sustrayendo de la tercera fila una vez la primera fila y una vez la segunda fila.

$$\hat{A}^1 \quad : \quad \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{5} & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ -6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= (0,0,0,0,4,12), \\ z &= 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_e &= x_1, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_6. \end{aligned}$$

Un ejemplo del cálculo de los costos reducidos en la segunda tabla es:

$$\begin{aligned} a_{34}^2 &= a_{34}^1 - \frac{a_{31}^1 a_{24}^1}{a_{21}^1}, \\ a_{34}^2 &= 1 - \frac{(-6)(-1)}{5} = -0.2. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^2 \quad : \quad \begin{array}{c} x_5 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1.6} & -1 & 0.2 & 1 & -0.2 & 1.6 \\ 1 & 0.4 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 2.4 \\ 0 & -1.6 & 1 & -0.2 & 0 & 1.2 & -1.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= (2.4, 0, 0, 0, 1.6, 0), \\ z &= 1.6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_e &= x_2, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_5. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^3 \quad : \quad \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 5/8 & -1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^* &= (2, 1, 0, 0, 0, 0), \\ z^* &= 0. \ \diamond \end{aligned}$$

Los costos reducidos $\tilde{c}_j$ son denotados frecuentemente como $c_j - z_j$ o también $z_j - c_j$ (dependiendo de la convención utilizada). También es muy frecuente colocar la fila de costos reducidos como primera fila, es decir, encima de las filas de A.

Ejemplo 8.4. Consideremos los mismos datos del ejemplo 8.1 , la matriz inicial $\hat{A}^0$ es:

$$\hat{A}^0 \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 580 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ -1.0 & -1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las variables básicas son x_3, x_4, x_5. En la cuarta fila se tiene el valor cero para estas columnas, o sea, ya se tienen los costos reducidos, es decir, en este caso la matriz $\hat{A}^1$ es igual a la matriz $\hat{A}^0$.

$$\hat{A}^1 \quad : \quad \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 580 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ -1.0 & -1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= (0, 0, 400, 580, 300), \\ z &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_e &= x_2, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_4. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^2 \quad : \quad \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1/2} & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 110 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 290 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ -3/10 & 0 & 0 & 7/10 & 0 & 406 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= (0, 290, 110, 0, 300), \\ z &= -406. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_e &= x_1, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_3. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^3 \quad : \quad \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & 472 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^* &= (220, 180, 0, 0, 80). \\ z^* &= -472. \ \diamond \end{aligned}$$

EJERCICIOS

En los ejercicios 8.1 a 8.6 convierta el problema a la forma estándar. Si se cumplen las condiciones, aplique el método simplex hasta encontrar el óptimo, o hasta saber que no hay óptimo acotado.

8.1. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

8.2. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

8.3. Minimizar $z = x_5$ con las restricciones $x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 12$, $5x_1 - 2x_2 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

8.4. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_2 - 5x_3 - x_4 = 8$, $x_1 - 2.5x_3 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

8.5. Minimizar $z = 4x_1 - 3x_2$ con las restricciones $x_2 - 5x_3 - x_4 = 8$, $x_1 - 2.5x_3 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

8.6. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

Capítulo 9

MÉTODO DE LAS DOS FASES

9.1. Problema artificial

Para poder utilizar el método simplex se requiere tener términos independientes no negativos ($b \geq 0$) y, además, poder obtener la matriz identidad escogiendo adecuadamente m columnas de la matriz A. Esto no sucede con frecuencia, pero se puede obviar este inconveniente mediante el siguiente artificio.

Introducir tantas variables como se necesiten para que con las columnas correspondientes se obtengan las columnas faltantes de la matriz identidad. Estas se llaman **variables artificiales** y como han sido forzadas a hacer parte de igualdades su valor debería ser cero.

Con estas variables artificiales se obtiene una solución básica factible de un problema artificial, pero no del problema real. Para obligar a estas variables artificiales a anularse, en una primera fase, se minimiza una función objetivo artificial cuyo valor es la suma de las variables artificiales.

Si al obtener el óptimo de la función objetivo artificial, éste no es cero, es decir, en el óptimo artificial alguna(s) variable(s) artificial(es) no es(son) nula(s), entonces el problema no tiene solución, es decir, no hay puntos factibles.

En el mejor de los casos al obtener el óptimo de la función objetivo artificial todas las variables artificiales son libres (todas son nulas), se habrá obtenido así una solución factible básica con variables básicas no artificiales. Esto permite utilizar el método simplex con la función objetivo original, suprimiendo las columnas correspondientes a todas las variables artificiales (libres y nulas). Esta es la segunda fase.

Si en la primera fase (minimización de la función objetivo artificial) se desea disminuir el número de cálculos, se puede, en cada iteración, eliminar la columna correspondiente a la variable que sale (variable básica que se vuelve libre, nula) si ésta es artificial.

De todas maneras hay que evitar en la primera fase y en la segunda fase, que las variables artificiales libres vuelvan a ser básicas.

Ejemplo 9.1.

$$\min \ z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura se tiene:

$$\min \ z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 - x_3 \qquad &= \ 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 \qquad - x_4 &= 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

En este caso no se tiene la matriz identidad y es necesario introducir dos variables artificiales: x_5, x_6 para formar con sus columnas la matriz identidad de tamaño 2×2.

Primera fase:

$$\min \ z_a = \qquad x_5 + x_6$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 &= 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Estos datos de la primera fase corresponden exactamente a los ejemplos 8.2 y 8.3 resueltos anteriormente, con la única salvedad de que se hubieran podido suprimir las columnas quinta y sexta a medida que salían de la base. Entonces la tabla óptima de la primera fase, habiendo suprimido las columnas de las variables artificiales que se volvieron libres (x_5 y x_6) es la siguiente:

$$\hat{A}^3 \quad : \quad \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= (2,1,0,0), \\ z_a &= 0. \end{aligned}$$

Como todas las variables artificiales son nulas, entonces el problema sí tiene soluciones factibles; además, se tiene ahora la matriz identidad con variables no artificiales.

Segunda Fase:

Ahora es necesario colocar en esta tabla los coeficientes de la verdadera función objetivo:

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la última fila deberían aparecer los costos reducidos, en particular el valor cero para las variables básicas (la segunda y la primera); esto no se tiene, pero se puede conseguir fácilmente al sustraer de la tercera fila tres veces la segunda fila y diez veces la primera fila.

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & \boxed{1/8} & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1/2 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= 16, \\ x_e &= x_4, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} x_4 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^* &= (4,0,0,8), \\ z^* &= 12. \end{aligned}$$

Puesto que los costos reducidos son positivos, entonces el punto extremo obtenido es la única solución óptima. $\diamond$

Ejemplo 9.2.

$$\min \ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

La primera fase es exactamente la misma del ejemplo anterior. La diferencia está en la fila de costos al empezar la segunda fase.

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A la tercera fila hay que restarle tres veces la segunda y cuatro veces la primera fila para obtener los costos reducidos.

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 7/4 & 1/4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^* &= (2, 1, 0, 0), \\ z^* &= 10. \end{aligned}$$

El punto óptimo es único. En este ejemplo se obtuvo directamente el punto óptimo al finalizar la primera fase. $\diamond$

9.2. Conjunto no factible

Ejemplo 9.3.

$$\min \ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 + \ x_2 &\leq \ 1 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura:

$$
\begin{array}{rl}
\min & z = 3x_1 + 4x_2 \\
& \begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 - x_3 & & = \ 4 \\
5x_1 + 2x_2 \quad - x_4 & & = 12 \\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 & & = \ 1 \\
& x \geq & 0.
\end{array}
\end{array}
$$

Como no se tiene la matriz identidad de tamaño 3×3 es necesario introducir dos variables artificiales x_6, x_7.

Primera fase

$$
\begin{array}{rl}
\min & z_a = x_6 + x_7 \\
& \begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 & & = \ 4 \\
5x_1 + 2x_2 \quad - x_4 \qquad\qquad + x_7 & & = 12 \\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 & & = \ 1 \\
& x \geq & 0.
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\hat{A}^0 \quad : \quad \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Para obtener los costos reducidos en la cuarta fila es necesario restarle una vez la primera fila y una vez la segunda fila.

$$
\hat{A}^1 \quad : \quad \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ -z_a \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\
\boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
x_a &= (0,0,0,0,1,4,12), \\
z_a &= 16, \\
x_e &= x_1, \\
x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_3}, \\
x_s &= x_5.
\end{aligned}
$$

$$
\hat{A}^2 \quad : \quad \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_1 \\ -z_a \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrrr}
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & -3 & 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & 7 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & -10
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
x_a^* &= (1, 0, 0, 0, 0, 3, 7), \\
z_a^* &= 10.
\end{aligned}
$$

Aquí se tiene el óptimo de la función objetivo artificial, con variables artificiales no nulas ($x_6 = 3$, $x_7 = 7$), esto quiere decir que el problema original no tiene solución, es decir, no hay puntos que cumplan todas las restricciones. El anterior ejemplo es exactamente el 3.7 resuelto mediante el método gráfico. $\diamond$

En resumen, para resolver el siguiente problema de OL con variables no negativas y con restricciones $\leq$, $=$, o $\geq$,

$$
\begin{aligned}
\min \ \ z = c^{\mathrm{T}} x& \\
A_{i\cdot} x \lesseqqgtr b_i&, \ \ i = 1, ..., m, \\
x \geq 0&
\end{aligned}
$$

el esquema general es el siguiente:

datos: : c, A, b, tipos de restricciones
modificar restricciones para que $b_i \geq 0$, $\forall i$
introducir variables de holgura
si $B \neq I$
    introducir variables artificiales
    resolver la primera fase
    si $z_a^* > 0$
        $z^* = +\infty$, es decir, $F = \emptyset$
        parar
    fin-si
fin-si
$F \neq \emptyset$
resolver segunda fase
en el resultado final hay dos posibilidades:
    z^* es finito
    $z^* = -\infty$

En la primera fase, cuando es necesaria, siempre $z_a^* \geq 0$, es decir, nunca se da que $z_a^* = -\infty$. Si se puede llegar a la segunda fase, entonces no es posible que $z^* = +\infty$.

EJERCICIOS

En los ejercicios 9.1 a 9.7 convierta el problema a la forma estándar. Aplique el método simplex o el método de las dos fases.

9.1. Minimizar $z = -x_1 - 0.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_2 \geq 2$, $x_1 + 2x_2 \leq 6$, $x \geq 0$.

9.2. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2 + 1.3x_3 + 1.4x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \geq 1$, $x_2 + 2x_4 \geq 2$, $x_1 + 3x_4 \geq 3$, $x \geq 0$.

9.3. Minimizar $z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \geq 1$, $x_2 + 2x_4 \geq 2$, $x_1 + 3x_4 \geq 3$, $x \geq 0$.

9.4. Minimizar $z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \geq 1$, $x_2 + 2x_4 \geq 2$, $x_1 + 3x_4 \geq 3$, $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 1$, $x \geq 0$.

9.5. Minimizar $z = 10x_1 + 11x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x \geq 0$.

9.6. Minimizar $z = 10x_1 + 25x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x \geq 0$.

9.7. Minimizar $z = 10x_1 + 25x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

Capítulo 10

CASOS ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX

10.1. Óptimo no acotado

En un problema real generalmente no se presenta un óptimo no acotado, pues es casi imposible aumentar sin límite las ganancias o disminuir de manera indefinida los costos. Lo que sí puede haber sucedido es que no se tuvo en cuenta alguna restricción. Sin embargo, es útil poder hacer el análisis del caso de óptimo no acotado.

A partir de la última tabla del método simplex, cuando el óptimo no es acotado, se puede obtener, de manera inmediata, una dirección del conjunto de puntos factibles, a lo largo de la cual la función objetivo disminuye indefinidamente. Para esto basta con tomar $B = I$ y considerar como columna $A_{\cdot k}$ la columna correspondiente a la variable que entra, en la cual no hay ningún elemento positivo:

$$
\begin{aligned}
Bd_B &= -A_{\cdot k}, \quad \text{entonces} \\
d_B &= -A_{\cdot k} \geq 0, \\
d_k &= 1, \\
d_j &= 0 \quad \text{en los demás casos.}
\end{aligned}
$$

Se puede mostrar, además, que el valor $c^{\mathrm{T}}d$ está dado exactamente por el costo reducido de la variable que entra $\tilde{c}_e$.

Ejemplo 10.1.

$$\begin{aligned} \min \quad z = -10x_1 - 8x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura se tiene:

$$\begin{aligned} \min \quad z = -10x_1 - 8x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 &= 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Como no se tiene la matriz identidad es necesario introducir dos variables artificiales, x_5 y x_6. La primera fase para este problema es exactamente la misma del ejemplo 9.1 y así en el óptimo de la primera fase se tiene:

$$\hat{A}^3 \quad : \quad \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z_a \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Colocando los costos originales

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ -10 & -8 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Calculando los costos reducidos

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{1/4} & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & -5/2 & -3/2 & 28 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (2, 1, 0, 0), \\ z &= -28, \\ x_e &= x_3, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_1. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} x_2 \\ x_3 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 5/2 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 10 & 0 & 0 & -4 & 48 \end{array} \right],$$

$$
\begin{aligned}
x &= (0, 6, 8, 0),\\
z &= -48,\\
x_e &= x_4
\end{aligned}
$$

En este caso, al buscar cuál variable sale de la base, se observa que no hay coeficientes a_{i4} positivos, esto quiere decir que, cuando x_4 aumenta, ninguna de las variables básicas disminuye, entonces no hay restricciones que impidan que x_4 aumente indefinidamente, disminuyendo así el valor de la función objetivo también indefinidamente. Se dice entonces que el óptimo no es acotado.

$$
d_B = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
d_4 &= 1,\\
d_j &= 0 \quad \text{en los demás casos},\\
d &= (0, 1/2, 1, 1),\\
c^{\mathrm{T}} d &= \tilde{c}_e = \tilde{c}_4 = -4.
\end{aligned}
$$

Es decir, los puntos de la forma

$$
x + \mu d = (0, 6, 8, 0) + \mu(0, 1/2, 1, 1), \quad \mu \geq 0,
$$

son puntos factibles para los cuales la función objetivo vale

$$
z = -48 + \mu(-4), \quad \mu \geq 0. \ \diamond
$$

10.2. Conjunto de puntos óptimos infinito y acotado

Este caso se presenta cuando hay más de un punto extremo óptimo, y para todas las direcciones extremas (si las hay) $c^{\mathrm{T}} d > 0$.

Si en la tabla óptima del simplex el punto extremo óptimo no es degenerado, y una variable libre tiene costo reducido nulo, y su columna tiene algún elemento positivo, entonces con seguridad se puede obtener otro punto extremo óptimo, entrando esa variable libre a la base. Si el punto extremo óptimo es degenerado, entonces no hay seguridad de obtener otro punto extremo óptimo.

Ejemplo 10.2.

$$\min \quad z = 8x_1 + 16x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Estas restricciones son exactamente las mismas del ejemplo anterior. Entonces es necesario introducir dos variables de holgura, dos variables artificiales, efectuar la primera fase y colocar los costos originales.

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 8 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando los costos reducidos

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -32 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x^* &= (2, 1, 0, 0), \\ z^* &= 32. \end{aligned}$$

Como el costo reducido de la variable libre x_4 es nulo y, además, la solución básica no es degenerada, entonces se puede afirmar que hay un número infinito de soluciones óptimas.

La tabla del método simplex permite en este caso encontrar otro punto extremo óptimo. Como la variable libre x_4 tiene costo reducido nulo, entonces al incrementar el valor de esta variable, entrándola a la base, el valor de $z = 32$, que es óptimo, no se modifica, y entonces sigue siendo óptimo. Así se obtiene otro punto extremo óptimo. Efectuando combinaciones convexas de puntos extremos óptimos se obtienen puntos óptimos.

$$\begin{aligned} x_e &= x_4, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_2. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} x_4 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -32 \end{bmatrix},$$

$$x^* = (4, 0, 0, 8), \text{es otro punto extremo óptimo.}$$
$$z^* = 32 \quad (\text{¡obviamente!}).$$

Las observaciones sobre la penúltima tabla son también válidas para la tabla anterior. Para obtener otro punto extremo óptimo se entraría a la base la variable x_2 y saldría la variable x_4. Al hacer las operaciones correspondientes se tendría de nuevo la penúltima tabla.

En este sencillo ejemplo únicamente hay dos puntos extremos óptimos. Sus combinaciones convexas dan todos los puntos óptimos.

$$x^* = (2 + 2\lambda, 1 - \lambda, 0, 8\lambda), \quad \lambda \in [0, 1]. \ \diamond$$

10.3. Conjunto de puntos óptimos no acotado

Este caso se presenta cuando el valor de z es acotado, es decir, hay óptimo finito, pero hay por lo menos una dirección extrema tal que $c^{\mathrm{T}}d = 0$.

Si en la tabla óptima del simplex hay una variable libre con costo reducido nulo y su columna no tiene ningún elemento positivo, entonces al tratar de entrar la variable libre de costo reducido nulo, no se puede escoger una variable que salga de la base. Esto permite obtener fácilmente una dirección extrema tal que $c^{\mathrm{T}}d = 0$.

Ejemplo 10.3.

$$\min \ z = 7x_1$$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Estas restricciones son exactamente las mismas del ejemplo anterior. Entonces es necesario introducir dos variables de holgura, dos variables artificiales, efectuar la primera fase. En seguida hay que colocar los costos originales.

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando los costos reducidos

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/8 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{1/4} & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & -7/4 & 7/4 & -14 \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
x &= (2,1,0,0),\\
z &= 14,\\
x_e &= x_3,\\
x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2},\\
x_s &= x_1.
\end{aligned}
$$

$$
\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 5/2 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],
$$

$$
\begin{aligned}
x^* &= (0,6,8,0),\\
z^* &= 0,\\
x_e &= x_4.
\end{aligned}
$$

La variable libre x_4 tiene costo reducido nulo y, como la solución no es degenerada, entonces hay infinitos puntos óptimos. Para tratar de encontrar más puntos extremos óptimos habría que tratar de entrar la variable x_4 a la base. Sin embargo, no hay ningún elemento positivo en la cuarta columna, esto quiere decir que no se puede escoger cuál variable sale de la base. Así se puede obtener una dirección d, a lo largo de la cual el valor de z no se modifica y, por lo tanto, sigue siendo óptimo.

$$
d_B = \left[\begin{array}{c} d_2 \\ d_3 \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{r} -1/2 \\ -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} 1/2 \\ 1 \end{array} \right],
$$

$$
\begin{aligned}
d_4 &= 1,\\
d_j &= 0 \quad \text{en los demás casos},\\
d &= (0,1/2,1,1),\\
c^{\mathrm{T}} d &= \tilde{c}_e = \tilde{c}_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Es decir los puntos de la forma

$$
x^* + \mu d = (0,6,8,0) + \mu(0,1/2,1,1), \quad \mu \geq 0,
$$

son puntos óptimos para los cuales la función objetivo vale

$$
\begin{aligned}
z^* &= 0 + \mu(0), \quad \mu \geq 0,\\
z^* &= 0. \ \diamond
\end{aligned}
$$

10.4. Variables artificiales básicas nulas

Un caso particular se presenta cuando se llega al óptimo de la primera fase con todas las variables artificiales nulas, pero algunas de ellas son todavía básicas. Esto significa dos cosas importantes, la primera es que el problema sí tiene solución, es decir, sí tiene puntos que cumplan todas las restricciones, la segunda es que no se tiene la matriz identidad con variables no artificiales, ya que algunas variables artificiales son todavía básicas.

En este caso hay dos posibilidades:

- la primera consiste en pasar a la segunda fase con las variables artificiales básicas nulas, dándoles un costo nulo para la función objetivo original, con la condición de no volverlas a dejar entrar a la base, si en algún momento se vuelven libres (por ejemplo, suprimiendo la columna correspondiente al salir una variable artificial nula de la base).

- la segunda consiste en sacar primero las variables artificiales nulas de la base, para empezar la segunda fase con todas las variables básicas no artificiales. En esta opción, después de haber suprimido las columnas de las variables artificiales libres, para cada variable artificial básica nula x_j, se puede presentar uno de los dos casos siguientes:

  - en la fila correspondiente a x_j todos los coeficientes son nulos, salvo el de la misma variable x_j cuyo valor es uno. Esto quiere decir que la fila expresa la siguiente igualdad: $x_j = 0$. Lo anterior es cierto, pero no tiene ninguna información adicional, luego esta fila se puede suprimir. Se reduce así el número de restricciones y el orden de la matriz identidad en una unidad.
  - en la misma fila, aparte del coeficiente uno para la misma variable, hay otros coeficientes no nulos. En este caso mediante operaciones elementales ("pivoteando"sobre uno de estos coeficientes no nulos), se puede entrar a la base una variable no artificial y sacar esta variable artificial nula. Entre las variables con coeficiente no nulo en esta fila, se escoge la que entra a la base mediante uno de los siguientes criterios:
    - cualquier variable.
    - aquella variable con costo menor.

- ∘ aquella variable con coeficiente dominante (el mayor en valor absoluto), para buscar precisión numérica, ya que este coeficiente va a ser utilizado como divisor. Este es uno de los pocos casos donde el pivote puede ser negativo.

Ejemplo 10.4.

$$\min \quad z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 15 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Introduciendo 3 variables artificiales x_4, x_5, x_6, la tabla inicial de la primera fase es la siguiente:

$$\hat{A}^0 \quad : \quad \begin{array}{c} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

La tabla óptima de la primera fase, después de suprimir las columnas de las variables artificiales libres x_4, x_5 es la siguiente:

$$\hat{A}^3 \quad : \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ -z_a \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 & \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

En este caso todas las variables artificiales son nulas, luego hay puntos factibles. Pero hay una variable artificial nula en la base: x_6. Si se escoge la opción de ir directamente a la segunda fase, entonces se coloca la fila de costos originales:

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 & \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Calculando costos reducidos:

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} \\ x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 & \\ 1 & \boxed{0.5} & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 0 & -13.5 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (1.5, 0, 1.5, 0), \\ z &= 13.5, \\ x_e &= x_2, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_1. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^k \quad : \quad \begin{array}{r} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 & \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x^* &= (0, 3, 0), \\ z^* &= 6. \end{aligned}$$

Si en este mismo ejemplo se busca quitar las variables artificiales nulas de la base, antes de pasar a la segunda fase, hay que sacar a x_6 de la base. Veamos que pasa con la fila correspondiente, es decir, la tercera fila de la última tabla de la primera fase. Esta fila indica simplemente que $x_6 = 0$, luego se puede suprimir sin ninguna pérdida de información.

En este caso, desde el principio había una restricción redundante. Se puede ver, por ejemplo, que la tercera restricción es simplemente la suma de tres veces la primera y una vez la segunda. Sin embargo, en general, es dispendioso, difícil o casi imposible averiguar si hay restricciones redundantes. Más aún, cuando se plantea un problema es preferible escribir restricciones, que de pronto podrían ser redundantes, que pecar por ausencia de restricciones.

El problema queda entonces con dos restricciones. Al colocar los costos de la función objetivo real se tiene:

$$\begin{array}{r} x_1 \\ x_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1/2 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1.5 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right].$$

Calculando costos reducidos:

$$\hat{A}^k = \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{0.5} & 0 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1.5 \\ 0 & -2.5 & 0 & -13.5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x &= (1.5, 0, 1.5), \\ z &= 13.5, \\ x_e &= x_2, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_1. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^k = \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x^* &= (0, 3, 0), \\ z^* &= 6. \ \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 10.5.

$$\begin{array}{ll} \min & z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 \\ & 6x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 14x_5 + 15x_6 \leq 63 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 \geq 21 \\ & x_1 + x_3 + x_5 = 3 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 7x_6 \geq 30 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Para este problema es necesario introducir tres variables de holgura x_7, x_8, x_9, y cuatro variables artificiales x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}. Inicialmente la base está formada por las variables x_7, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}. Al cabo de tres iteraciones se obtiene la tabla óptima de la primera fase. Entraron las variables x_5, x_6, x_1. Salieron las variables x_{12}, x_{11}, x_7. La tabla óptima, después de suprimir las columnas de las variables artificiales libres x_{12} y x_{11}, es la siguiente:

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{13} & \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 5/4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & \boxed{-2/3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
x_5 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & -5/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
-z_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Como el valor de z_a es cero, entonces sí hay puntos factibles, sin embargo, hay variables artificiales básicas nulas. El objetivo es sacar las variables artificiales de la base antes de pasar a la segunda fase, bien sea suprimiendo la fila correspondiente, bien sea pivoteando para que una variable no artificial entre a la base.

La segunda fila, la de la variable básica x_{10}, no se puede suprimir puesto que hay valores no nulos ($-1/3$ y $-2/3$) fuera del valor uno en la columna de x_{10}. En este caso hay que escoger una variable entre x_7 y x_8 para que entre a la base. Se observa que en este caso (entrar x_7 o x_8), el pivote resulta negativo.

Si el criterio es buscar mayor precisión numérica, debe entrar la variable de coeficiente dominante (mayor en valor absoluto), es decir, la variable x_8.

Si se desea entrar la variable de menor costo hay empate, pues en este ejemplo ambas son variables de holgura y tienen costo nulo.

Al pivotear sobre el coeficiente $-2/3$, para que entre la variable x_8 y salga la variable artificial x_{10}, se obtiene la siguiente tabla

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{13} & \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
x_5 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Como de costumbre, no se calcula la columna de una variable artificial que sale de la base.

Para sacar la variable artificial x_{13} de la base, se puede pivotear sobre el coeficiente -1 para que entre la variable x_9.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_9 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & \end{array}\right].$$

Colocando los costos reales:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_9 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Calculando costos reducidos

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_9 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & \boxed{1/2} & -1/2 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right],$$

$$\begin{aligned} x &= (3,0,0,0,0,3,0,0,0), \\ z &= 15, \\ x_e &= x_3, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_4}, \\ x_s &= x_5. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^k : \begin{array}{c} x_1 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_9 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & -1 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right]$$

$$
\begin{aligned}
x &= (3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0), \\
z &= 15.
\end{aligned}
$$

En este caso se obtuvo el mismo punto de la tabla anterior. Simplemente una variable nula que era básica se volvió libre y una variable libre se volvió básica, pero nula. Obviamente, el valor de z no mejoró de una tabla a la otra. Esta situación se puede presentar únicamente cuando la solución básica realizable es degenerada. Sin embargo, también es cierto que, aún en presencia de soluciones degeneradas, puede haber mejoría de una tabla a la siguiente.

$$
\begin{aligned}
x_e &= x_2, \\
x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\
x_s &= x_1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
x_2 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_9 \\ -z
\end{array}
\left[
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
1/2 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\
-1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -12
\end{array}
\right],
$$

$$
\begin{aligned}
x^* &= (0, 3/2, 3, 0, 0, 3/2, 0, 0, 0), \\
z^* &= 12. \ \diamond
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS

En los ejercicios 10.1 a 10.5 convierta el problema a la forma estándar. Aplique el método simplex o el método de las dos fases. Estudie en detalle la solución (dirección extrema en óptimo no acotado, varios puntos extremos óptimos, dirección extrema en conjunto óptimo no acotado, variables artificiales básicas nulas).

10.1. Maximizar $z = 4x_1 + 5x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 \geq 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $x \geq 0$.

10.2. Minimizar $z = 15x_1 + 30x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 \geq 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $x \geq 0$.

10.3. Minimizar $z = 10x_1 - 10x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 \geq 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $-x_1 + x_2 \leq 7$, $x \geq 0$.

10.4. Minimizar $z = 2x_1 + 8x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 = 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $3x_1 + x_2 \geq 10$, $x \geq 0$.

10.5. Minimizar $z = 2x_1 + 8x_2 + x_3$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 20$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$, $3x_1 + x_2 = 10$, $x \geq 0$.

Capítulo 11

MÉTODO DE PENALIZACIÓN

Este método también es conocido con los nombres: M-grande, gran-M o big-M. Sirve para resolver, en un solo proceso (o fase), un problema de programación lineal. Al mismo tiempo que se busca anular las variables artificiales para obtener un punto factible, también se puede tratar de que ese punto factible no esté muy alejado del óptimo. De esta manera, es posible que el número de iteraciones sea menor que la suma del número de iteraciones de la primera y segunda fase en el método de las dos fases.

11.1. Costos y costos reducidos

En el método de penalización se construye una función objetivo de penalización que tiene en cuenta tanto los costos originales o reales, como los valores artificiales para las variables artificiales. Para las variables originales el coeficiente en la función objetivo de penalización es simplemente el coeficiente real. Para las variables de holgura el coeficiente es cero. Para cada una de las variables artificiales el coeficiente es M, indicando un valor que puede ser muy grande. De esta manera, cualquier costo o costo reducido (o el valor de $-z$) se puede expresar de la forma:

$$\tilde{c}_j = \rho_j + \alpha_j M,$$

Se podría hablar de una parte real ρ_j y de una parte artificial α_j.

Al comparar con cero (para las condiciones de optimalidad) un costo reducido expresado en esta forma, se tiene:

$$\begin{array}{lll}
\tilde{c}_j > 0 & \text{si} & \begin{cases} \alpha_j > 0, \\ \quad \text{o también si} \\ \alpha_j = 0 \quad \text{y} \quad \rho_j > 0. \end{cases} \\
\tilde{c}_j = 0 & \text{si} & \alpha_j = 0 \quad \text{y} \quad \rho_j = 0. \\
\tilde{c}_j < 0 & \text{si} & \begin{cases} \alpha_j < 0, \\ \quad \text{o también si} \\ \alpha_j = 0 \quad \text{y} \quad \rho_j < 0. \end{cases}
\end{array}$$

Como cada costo o costo reducido necesita dos coeficientes: ρ_j y α_j, entonces es necesario tener dos filas para los costos reducidos (en lugar de una): una para los coeficientes ρ_j y otra para los coeficientes α_j.

En el método de las dos fases durante la primera fase no se tienen en cuenta, de ninguna manera, los verdaderos coeficientes de la función objetivo. Esto hace que al obtener un punto factible al final de la primera fase, éste pueda estar muy alejado de un punto óptimo, pues únicamente se han tenido en cuenta los costos artificiales de las variables artificiales.

11.2. Escogencia de la variable que entra

Para la escogencia de la variable que entra a la base en el método de penalización hay dos enfoques posibles:

1) Dar **prioridad parcial** a los coeficientes α_j (provenientes de las variables artificiales) y al mismo tiempo tener en cuenta los coeficientes ρ_j (provenientes de los coeficientes reales de las variables originales). Esto aumenta las posibilidades de que el primer punto factible encontrado esté más cerca de un punto óptimo. Así el número de iteraciones en el método de penalización puede ser menor que la suma de iteraciones de la primera y segunda fase en el método de las dos fases.

2) Dar **prioridad absoluta** a los coeficientes α_j y tener en cuenta los coeficientes ρ_j solamente cuando ya todos los α_j se han anulado o cuando ya no hay variables artificiales básicas. Este enfoque es el mismo del método de las dos fases, salvo que se hace en una sola fase

más general. Así se favorece posiblemente la obtención rápida de un punto factible, pero éste puede estar alejado de un punto óptimo.

La escogencia de la variable que sale de la base se hace exactamente como en el método simplex.

Dando prioridad parcial a los costos artificiales, se tiene el siguiente criterio para escoger la variable libre, no artificial, que entra a la base.

Buscar entre las variables libres no artificiales con $\alpha_j < 0$, aquella cuyo coeficiente ρ_j sea mínimo. Dicho de otra forma:

$$\tilde{c}_e = \rho_e + \alpha_e M \quad \text{tal que} \quad \rho_e = \min\{\rho_j : \alpha_j < 0\}.$$

Si el anterior paso no es posible, es decir, si no hay variables libres no artificiales con $\alpha_j < 0$, entonces es necesario **escoger entre las variables libres no artificiales con $\alpha_j = 0$ y con $\rho_j < 0$, aquella con coeficiente ρ_j mínimo**:

$$\tilde{c}_e = \rho_e + \alpha_e M \quad \text{tal que} \quad \rho_e = \min\{\rho_j : \alpha_j = 0, \rho_j < 0\}.$$

Si esto tampoco es posible, se concluye que la solución actual es óptima para el problema de penalización. Obviamente si hay variables artificiales no nulas el problema real no tiene solución.

De la misma manera que en el método simplex, cuando una variable artificial se vuelve libre, se puede suprimir su columna. También se puede suprimir toda la fila $m+2$, la correspondiente a los coeficientes artificiales α_j, cuando todas las variables artificiales sean libres.

Ejemplo 11.1. Son los mismos datos del ejemplo 9.1.

$$\min \ z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura y artificiales

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 + 2x_2 & - x_3 & & + x_5 & & = & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 & & - x_4 & & + x_6 & = & 12 \\ & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

La función objetivo de penalización será:

$$\min z_p = 3x_1 + 10x_2 \qquad\qquad + Mx_5 + Mx_6,$$

o también

$$\begin{aligned}\min z_p = {} & (3+0M)x_1 + (10+0M)x_2 + (0+0M)x_3 \\ & + (0+0M)x_4 + (0+1M)x_5 + (0+1M)x_6.\end{aligned}$$

Entonces la tabla inicial es:

$$\hat{A}^0 : \begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Para obtener costos reducidos se necesita obtener el valor cero para las variables básicas en las filas de ρ_j y de α_j, es decir, la tercera y cuarta filas; para esto basta con restar de la cuarta fila una vez la primera fila y una vez la segunda fila.

$$\hat{A}^1 : \begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{5} & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right],$$

$$\begin{aligned} x &= (0,0,0,0,4,12), \\ z_p &= 16M. \end{aligned}$$

Aquí las variables libres x_1, x_2 tienen coeficiente α_j negativo y de ellas la de menor coeficiente ρ_j es la variable x_1. Luego x_1 va a entrar a la base. Así entonces sale de la base la variable x_6.

$$\begin{aligned} x_e &= x_1, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_6. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^2 : \begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_1 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 0 & 1.6 & -1 & \boxed{0.2} & 1 & 1.6 \\ 1 & 0.4 & 0 & -0.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 8.8 & 0 & 0.6 & 0 & -7.2 \\ 0 & -1.6 & 1 & -0.2 & 0 & -1.6 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (2.4, 0, 0, 0, 1.6), \\ z_p &= 7.2 + 1.6M. \end{aligned}$$

Las variables libres x_2, x_4 tienen coeficiente α_j negativo. De ellas la de menor coeficiente ρ_j es la variable x_4. Luego x_4 va a entrar a la base.

$$\begin{aligned} x_e &= x_4, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_5. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^3 : \begin{array}{c} x_4 \\ x_1 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 8 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x^* &= (4, 0, 0, 8), \\ z^* &= 12. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior, hubo únicamente dos iteraciones; en cambio la solución del mismo problema por el método de las dos fases (ejemplo 9.1) requirió tres iteraciones: dos en la primera fase y una en la segunda. $\diamond$

Si se da prioridad absoluta a los costos artificiales, se tiene el siguiente criterio para escoger la variable libre no artificial que entra a la base.

Buscar entre las variables libres no artificiales con $\alpha_j < 0$, aquella cuyo coeficiente α_j sea mínimo. Dicho de otra forma:

$$\tilde{c}_e = \rho_e + \alpha_e M \quad \text{tal que} \quad \alpha_e = \min\{\alpha_j : \alpha_j < 0\}.$$

Si el anterior paso no es posible, es decir, si no hay variables libres no artificiales con $\alpha_j < 0$, entonces es necesario **escoger entre las variables**

libres no artificiales con $\alpha_j = 0$ y con $\rho_j < 0$, aquella con coeficiente ρ_j mínimo.

$$\tilde{c}_e = \rho_e + \alpha_e M \quad \text{tal que} \quad \rho_e = \min\{\rho_j : \alpha_j = 0, \rho_j < 0\}.$$

Si esto tampoco es posible, se concluye que la solución actual es óptima para el problema de penalización. Es obvio que si hay variables artificiales no nulas el problema real no tiene solución.

La aplicación de la prioridad absoluta para los costos artificiales, como se aprecia en el siguiente ejemplo, dará los mismos pasos del método de las dos fases.

Ejemplo 11.2.

$$\min \ z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &\geq 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Este es exactamente el mismo enunciado del ejemplo anterior, pero ahora se dará prioridad total a los costos artificiales.

La tabla inicial es:

$$\hat{A}^0 : \begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

La tabla con costos reducidos es la siguiente:

$$\hat{A}^1 : \begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{5} & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -16 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (0, 0, 0, 0, 4, 12), \\ z_p &= 16M. \end{aligned}$$

Es claro que hasta acá no hay ninguna diferencia con el método anterior.

Aquí las variables libres x_1, x_2 tienen coeficiente α_j negativo. De ellas la de menor coeficiente α_j es la variable x_1. Luego x_1 va a entrar a la base.

$$\begin{aligned} x_e &= x_1, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_6. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^2 : \begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_1 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 0 & \boxed{1.6} & -1 & 0.2 & 1 & 1.6 \\ 1 & 0.4 & 0 & -0.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 8.8 & 0 & 0.6 & 0 & -7.2 \\ 0 & -1.6 & 1 & -0.2 & 0 & -1.6 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (2.4, 0, 0, 0, 1.6), \\ z_p &= 7.2 + 1.6M. \end{aligned}$$

Las variables libres x_2, x_4 tienen coeficiente α_j negativo. De ellas la de menor coeficiente α_j es la variable x_2. Luego x_2 va a entrar a la base.

$$\begin{aligned} x_e &= x_2, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_5. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^3 : \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -5/8 & \boxed{1/8} & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 5.5 & -0.5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (2, 1, 0, 0), \\ z &= 16. \end{aligned}$$

Como la fila de coeficientes α_j tiene únicamente ceros se puede suprimir.

$$\begin{aligned} x_e &= x_4, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_2. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^4 : \begin{array}{c} x_4 \\ x_1 \\ \rho_j \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 8 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -12 \end{array} \right],$$

$$x^* = (4,0,0,8),$$
$$z^* = 12. \ \diamond$$

11.3. Conjunto no factible

Ejemplo 11.3.

$$\min \ z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura x_3, x_4 y x_5 y las artificiales x_6 y x_7, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 & = & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 & = & 12 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 \qquad\qquad & = & 1 \\ x & \geq & 0. \end{array}$$

La función objetivo de penalización será:

$$z_p = 3x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + Mx_6 + Mx_7.$$

Entonces la tabla inicial es:

$$\hat{A}^0 : \begin{array}{c} \\ x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Calculando costos reducidos

$$\hat{A}^1 : \begin{array}{c} \\ x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (0,0,0,0,1,4,12), \\ z_p &= 16M, \\ x_e &= x_1, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_3}, \\ x_s &= x_5. \end{aligned}$$

$$\hat{A}^2: \quad \begin{array}{c} \\ x_6 \\ x_7 \\ x_1 \\ \rho_j \\ \alpha_j \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrrr} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right],$$

$$\begin{aligned} x &= (1,0,0,0,0,3,7), \\ z_p^* &= 3 + 10M. \end{aligned}$$

Todos los coeficientes α_j de las variables libres son positivos, entonces los costos reducidos son positivos, luego ya se alcanzó el óptimo. Como hay variables artificiales no nulas, x_6 y x_7, entonces se puede afirmar que el problema no tiene puntos realizables, es decir, no tiene solución. $\diamond$

EJERCICIOS

En los ejercicios 11.1 a 11.12 convierta el problema a la forma estándar. Aplique el método simplex o el método de penalización.

11.1. Minimizar $z = -x_1 - 0.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \le 4$, $x_2 \ge 2$, $x_1 + 2x_2 \le 6$, $x \ge 0$.

11.2. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2 + 1.3x_3 + 1.4x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \ge 1$, $x_2 + 2x_4 \ge 2$, $x_1 + 3x_4 \ge 3$, $x \ge 0$.

11.3. Minimizar $z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \ge 1$, $x_2 + 2x_4 \ge 2$, $x_1 + 3x_4 \ge 3$, $x \ge 0$.

11.4. Minimizar $z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \ge 1$, $x_2 + 2x_4 \ge 2$, $x_1 + 3x_4 \ge 3$, $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1$, $x \ge 0$.

11.5. Minimizar $z = 10x_1 + 11x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x \geq 0$.

11.6. Minimizar $z = 10x_1 + 25x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x \geq 0$.

11.7. Minimizar $z = 10x_1 + 25x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

11.8. Maximizar $z = 4x_1 + 5x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 \geq 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $x \geq 0$.

11.9. Minimizar $z = 15x_1 + 30x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 \geq 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $x \geq 0$.

11.10. Minimizar $z = 10x_1 - 10x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 \geq 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $-x_1 + x_2 \leq 7$, $x \geq 0$.

11.11. Minimizar $z = 2x_1 + 8x_2$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 = 20$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $3x_1 + x_2 \geq 10$, $x \geq 0$.

11.12. Minimizar $z = 2x_1 + 8x_2 + x_3$ con las restricciones $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 20$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$, $3x_1 + x_2 = 10$, $x \geq 0$.

Capítulo 12

MÉTODO SIMPLEX REVISADO

12.1. Generalidades

En el método simplex, se parte de una matriz $\hat{A}^0$ de tamaño $(m+1) \times (n+1)$ y mediante operaciones elementales se construye $\hat{A}^1$, después $\hat{A}^2$,..., $\hat{A}^k$, hasta obtener una solución óptima, o hasta saber que el óptimo no es acotado (únicamente en la segunda fase), o bien hasta llegar a la conclusión de que el problema no tiene puntos realizables (únicamente en la primera fase).

Las operaciones elementales que permiten pasar de $\hat{A}^k$ a $\hat{A}^{k+1}$ se pueden expresar mediante la premultiplicación de $\hat{A}^k$ por una matriz $\widehat{T}^k$, de tamaño $(m+1) \times (m+1)$, invertible.

$$\begin{aligned}
\hat{A}^1 &= \widehat{T}^0 \hat{A}^0, \\
\hat{A}^2 &= \widehat{T}^1 \hat{A}^1, \\
&\vdots \\
\hat{A}^{k+1} &= \widehat{T}^k \hat{A}^k.
\end{aligned}$$

Sea $\widehat{T}^0$ la matriz que permite pasar de $\hat{A}^0$ a $\hat{A}^1$, es decir, la que permite obtener los costos reducidos iniciales. Es fácil comprobar que

$$\widehat{T}^0 = \begin{bmatrix} & 0 \\ I_m & \vdots \\ & 0 \\ -c_B^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}.$$

De manera semejante, la matriz $\widehat{T}^k$ que permite pasar de $\hat{A}^k$ a $\hat{A}^{k+1}$, es decir, la que permite obtener la matriz identidad para las nuevas variables básicas y al mismo tiempo actualizar los costos reducidos, es simplemente una ampliación de la matriz $(Q^k)^{-1}$ definida en el capítulo 7:

$$\widehat{T}^k = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & (Q^k)^{-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & -\tilde{c}_e^k/a_{\sigma e}^k & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 12.1. La obtención de los costos reducidos para los datos del ejemplo 8.3 se puede representar mediante la premultiplicación de $\hat{A}^0$ por $\widehat{T}^0$ para obtener $\hat{A}^1$.

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{T}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}^1 = \widehat{T}^0 \hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ -6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}. \ \diamond$$

Ejemplo 12.2. Para el mismo ejemplo 8.3 , la matriz $\widehat{T}^1$ representa el paso de $\hat{A}^1$ a $\hat{A}^2$.

$$\widehat{T}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 6/5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}^2 = \widehat{T}^1 \hat{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.6 & -1 & 0.2 & 1 & -0.2 & 1.6 \\ 1 & 0.4 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 2.4 \\ 0 & -1.6 & 1 & -0.2 & 0 & 1.2 & -1.6 \end{bmatrix}. \ \diamond$$

Todas las operaciones elementales efectuadas sobre la matriz $\hat{A}^0$ se pueden agrupar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^1 &= \widehat{T}^0 \hat{A}^0,\\
\hat{A}^2 &= \widehat{T}^1 \hat{A}^1 = \widehat{T}^1 \widehat{T}^0 \hat{A}^0,\\
&\vdots\\
\hat{A}^k &= \widehat{T}^{k-1} \widehat{T}^{k-2} \dots \widehat{T}^2 \widehat{T}^1 \widehat{T}^0 \hat{A}^0,\\
\hat{A}^k &= \widehat{S}^k \hat{A}^0,
\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{S}^k = \widehat{T}^{k-1}\ \widehat{T}^{k-2} \dots \widehat{T}^2 \widehat{T}^1 \widehat{T}^0.$$

Por construcción $\widehat{S}^k$ es cuadrada, de orden $m+1$, invertible (por ser producto de matrices invertibles) y representa todas las operaciones elementales que se efectúan sobre $\hat{A}^0$, para obtener $\hat{A}^k$. En particular

$$\begin{aligned}
\widehat{S}^0 \quad &= I_{m+1},\\
\widehat{S}^1 \quad &= \widehat{T}^0,\\
\widehat{S}^{k+1} &= \widehat{T}^k \widehat{S}^k.
\end{aligned}$$

Al comparar la última igualdad con la igualdad $\hat{A}^{k+1} = \widehat{T}^k \hat{A}^k$, se deduce que **para pasar de $\widehat{S}^k$ a $\widehat{S}^{k+1}$ hay que efectuar exactamente las mismas operaciones elementales requeridas para pasar de $\hat{A}^k$ a $\hat{A}^{k+1}$** , o sea, para pasar de $\widehat{S}^k$ a $\widehat{S}^{k+1}$ hay que utilizar fórmulas sencillas iguales a las de método simplex.

Se puede mostrar que la matriz $\widehat{S}^k$ tiene la siguiente forma:

$$\widehat{S}^k = \begin{bmatrix} & 0 \\ B^{k^{-1}} & \vdots \\ & 0 \\ -c_{B^k}^{\mathrm{T}} B^{k^{-1}} & 1 \end{bmatrix},$$

donde $B^{k^{-1}}$ es la inversa de la matriz B^k formada por las columnas de la matriz $A^0 = A$, correspondientes a las variables básicas en la k-ésima iteración, y $c_{B^k}^{\mathrm{T}}$ es el vector fila formado por los costos (en el orden correspondiente) de las variables básicas.

Ejemplo 12.3. Considérese la tabla $\hat{A}^2$ del ejemplo 8.3 . Allí las variable básicas son x_5 y x_1, entonces:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B^{2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$c_{B^2}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-c_{B^2}^{\mathrm{T}} B^{2^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{S}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -1 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fácilmente se comprueba que $\hat{A}^2 = \widehat{S}^2 \hat{A}^0$. $\diamond$

En el método simplex revisado, MSR, la matriz $\hat{A}^0$ no se modifica, en cambio, en cada iteración se va construyendo explícitamente la matriz $\widehat{S}^k$, y algunas partes de $\hat{A}^k$ que son absolutamente indispensables para aplicar el método simplex.

Las partes de la matriz $\hat{A}^k$, que estrictamente se necesitan son:

- los términos independientes (incluyendo el valor de $-z^k$) : $\widehat{b}^k$,
- los costos reducidos de las variables libres : c_L^k,
- la columna de la variable que entra : $\hat{A}_{\bullet e}^k$.

Entonces toda la información indispensable para el MSR se puede agrupar en una matriz de tamaño $(m+1) \times (m+3)$:

$$\widehat{R}^k = \begin{bmatrix} \widehat{S}^k & \widehat{b}^k & \hat{A}_{\bullet e}^k \end{bmatrix}.$$

De manera más explícita:

$$\widehat{R}^k = \left[\begin{array}{c|ccc} & 0 & b_1^k & a_{1e}^k \\ B^{k^{-1}} & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & b_m^k & a_{me}^k \\ -c_{B^k}^{\mathrm{T}} B^{k^{-1}} & 1 & -z^k & \tilde{c}_e^k \end{array} \right].$$

El valor de $-z^k$ se puede obtener como cualquier otro elemento de la matriz $\widehat{R}^k$. Pero también se puede hallar mediante la siguiente fórmula (la misma del método simplex).

$$-z^k = -c_{B^k}^{\mathrm{T}} B^{k^{-1}} b^0.$$

Esta fórmula se puede efectuar de dos maneras equivalentes:

i) $\quad -z^k = (-c_{B^k}^{\mathrm{T}} B^{k^{-1}}) b^0,$

ii) $\quad -z^k = -c_{B^k}^{\mathrm{T}} (B^{k^{-1}} b^0).$

La primera forma consiste en multiplicar los m primeros elementos de la fila $m+1$ de $\widehat{R}^k$, por los términos independientes iniciales y después sumar. La segunda consiste en multiplicar $-c_{B^k}^{\mathrm{T}}$ (los costos de las variables básicas de la iteración) por los términos independientes de la misma iteración y después sumar.

La columna $m+3$ de $\widehat{R}^k$, correspondiente a la variable que entra, no se necesita cuando se llega al óptimo.

Conocer la matriz $\widehat{R}^k$, saberla utilizar y saberla modificar para obtener $\widehat{R}^{k+1}$ es, ni más ni menos, el MSR.

Antes de pasar a detallar el procedimiento para la construcción de $\widehat{R}^0$ o de $\widehat{R}^1$ y de los pasos necesarios para pasar de $\widehat{R}^k$ a $\widehat{R}^{k+1}$, veamos en un ejemplo las principales ventajas del MSR. Consideremos un problema en la forma estándar con muchas más variables que restricciones: 9 restricciones y 99 variables.

- La tabla del método simplex tiene entonces $10 \times 100 = 1000$ elementos, la mayoría de los cuales son modificados en cada iteración. La tabla del MSR tiene $10 \times 12 = 120$ elementos que también son modificados en cada iteración. Obviamente es mucho más económico (menos tiempo, luego más barato) modificar 120 elementos que 1000.

- Es posible corregir o volver a calcular de manera más precisa $B^{k^{-1}}$ al cabo de cierto número de iteraciones.

- En problemas muy grandes puede suceder lo siguiente: $\hat{A}^k$ no cabe en memoria central (aunque sí en disco) y, sin embargo, $\widehat{R}^0$ sí cabe en memoria central; es claro que el acceso a memoria central es mucho más rápido que a cualquier unidad de disco.

Para empezar a aplicar el MSR se requieren las mismas condiciones que para empezar el método simplex:

1. problema de minimización en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= c^{\mathrm{T}} x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

2. $b \geq 0$,

3. m columnas de A forman la matriz identidad.

12.2. Algoritmo del MSR

A continuación está el esquema general del algoritmo del MSR y, posteriormente, están los detalles sobre cada paso del algoritmo:

verificar que el problema cumple las condiciones
construir las primeras $m+2$ columnas de la matriz $\widehat{R}^1$.
calcular los costos reducidos de las variables libres
mientras la solución no sea óptima
    escoger la variable que entra
    construir la columna de la variable que entra $\hat{A}^k_{\bullet e}$
    si el óptimo es no acotado, $(A^k_{\bullet e} \leq 0)$, **ent** parar
    escoger la variable que sale
    modificar los elementos de las primeras $m+2$ columnas de $\widehat{R}$
    calcular los nuevos costos reducidos
fin-mientras

La construcción de $\widehat{R}^0$ no es necesaria; además, si se construyera no habría que hacer ningún cálculo:

$$\widehat{R}^0 = \left[\begin{array}{ccc} I_{m+1} & \widehat{b}^0 & ? \end{array} \right],$$

$$\widehat{R}^0 = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1^0 & ? \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots & b_2^0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_m^0 & ? \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & ? \end{array} \right].$$

La única diferencia entre la tabla $\hat{A}^0$ y la tabla $\hat{A}^1$ está en la última fila: la tabla $\hat{A}^0$ tiene los costos c_j y la tabla $\hat{A}^1$ tiene los costos reducidos $\tilde{c}_j$. Esto hace que la única diferencia entre $\widehat{R}^0$ y $\widehat{R}^1$ esté en la última fila. Entonces para obtener $\widehat{R}^1$ son necesarios los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} -c_{B^1}^{\mathrm{T}} {B^1}^{-1} &= -c_{B^1}^{\mathrm{T}} I_m = -c_{B^1}^{\mathrm{T}}, \\ -z^1 &= -c_{B^1}^{\mathrm{T}} b^1 = -c_{B^1}^{\mathrm{T}} b^0. \end{aligned}$$

Hasta el momento se ha construido la mayor parte de $\widehat{R}^1$, sólo falta por obtener (cuando sea necesario) la columna de la variable que entra.

$$\widehat{R}^1 = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 & ? \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b_2 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_m & ? \\ & -c_{B^1}^{\mathrm{T}} & & & 1 & -z^1 & ? \end{array} \right].$$

Los costos reducidos de las variables libres, en cualquier iteración, se obtienen multiplicando escalarmente el vector fila conformado por los primeros $m+1$ elementos de la fila $m+1$ de $\widehat{R}^k$, es decir, multiplicar $\widehat{S}^k_{m+1,\cdot}$ por las columnas de $\hat{A}^0$ correspondientes a las variables libres de la iteración k:

$$c_{L^k}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}^k_{m+1,\cdot}\ \widehat{L}^{0,k}.$$

Así el valor de un costo reducido está dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j &= \left[\begin{array}{cc} -c_{B^k}^{\mathrm{T}} {B^k}^{-1} & 1 \end{array} \right] \hat{A}^0_{\cdot j} = \left[\begin{array}{cc} -c_{B^k}^{\mathrm{T}} {B^k}^{-1} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A^0_{\cdot j} \\ c_j \end{array} \right] \\ &= c_j - c_{B^k}^{\mathrm{T}} {B^k}^{-1} A^0_{\cdot j}. \end{aligned}$$

El criterio de optimalidad es exactamente el mismo del método simplex. Si

$$\tilde{c}_{L^k} \geq 0,$$

entonces la solución factible obtenida es óptima.

La escogencia de la variable libre que entra a la base se hace exactamente de la misma forma que en el método simplex: aquella variable libre de costo reducido mínimo.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_e^k &= \min_{1\leq j\leq n} \{\tilde{c}_j^k : x_j \text{ es variable libre}\}\\ e &= \operatorname*{argmin}_{1\leq j\leq n}\{\tilde{c}_j^k : x_j \text{ es variable libre}\}.\end{aligned}$$

La columna de la variable que entra $\hat{A}_{\bullet e}^k$ está compuesta por $A_{\bullet e}^k$ y por $\tilde{c}_e^k$ en la posición $m+1$. El vector columna de m componentes $A_{\bullet e}^k$ se obtiene multiplicando la matriz $B^{k^{-1}}$, que ocupa las primeras m filas y las primeras m columnas de $\widehat{R}^k$, por la columna de A^0 correspondiente a la variable que entra.

$$\hat{A}_{\bullet e}^k = \begin{bmatrix} A_{\bullet e}^k \\ \tilde{c}_e^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k^{-1}} A_{\bullet e}^0 \\ \tilde{c}_e^k \end{bmatrix}.$$

Esta construcción es exactamente equivalente a:

$$\hat{A}_{\bullet e}^k = \widehat{S}^k \hat{A}_{\bullet e}^0.$$

Recuérdese que $\widehat{S}^k$ corresponde a las primeras $m+1$ columnas de $\widehat{R}^k$.

La escogencia de la variable básica que sale de la base, también se hace de la misma forma que en el método simplex:

$$\begin{aligned} x_s &= x_{\beta_\sigma},\\ \frac{b_\sigma^k}{a_{\sigma e}^k} &= \min_{1\leq i\leq m}\{\frac{b_i^k}{a_{ie}^k} \ :\ a_{ie}^k > 0\},\\ \sigma &= \operatorname*{argmin}_{1\leq i\leq m}\{\frac{b_i^k}{a_{ie}^k} \ :\ a_{ie}^k > 0\}.\end{aligned}$$

En términos de elementos de $\widehat{R}^k$:

$$\sigma = \operatorname*{argmin}_{1\leq i\leq m}\{\frac{r_{i,m+2}^k}{r_{i,m+3}^k} \ :\ r_{i,m+3}^k > 0\}.$$

La actualización de la matriz $\widehat{R}^k$ para obtener las primeras $m+2$ columnas de $\widehat{R}^{k+1}$ se hace mediante operaciones elementales, tomando como elemento pivote $a^k_{\sigma e} = r^k_{\sigma,m+3}$, es decir, las fórmulas son semejantes a las del método simplex.

$$\begin{aligned} r^{k+1}_{ij} &= r^k_{ij} - \frac{r^k_{\sigma j} r^k_{ie}}{r^k_{\sigma e}}, \ \ i \neq \sigma, \ \ j = 1, \ldots, m+2, \\ r^{k+1}_{\sigma j} &= \frac{r^k_{\sigma j}}{r^k_{\sigma,m+3}}, \ \ j = 1, \ldots, m+2. \end{aligned}$$

Ejemplo 12.4. El enunciado de este ejemplo es exactamente el mismo del ejemplo 7.1:

$$\begin{aligned} \min \ \ z = -x_1 - 1.4x_2 & \\ x_1 + \ \ \ x_2 &\leq 400 \\ x_1 + \ 2x_2 &\leq 580 \\ x_1 \qquad &\leq 300 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura

$$\begin{aligned} \min \ \ z = -x_1 - 1.4x_2 & \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad\quad &= 400 \\ x_1 + \ 2x_2 \qquad + x_4 \quad &= 580 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 300 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

La matriz $\hat{A}^0$ es entonces:

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 580 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ -1 & -1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las variables básicas en la primera iteración son: x_3, x_4, x_5. La obtención de la matriz $\widehat{R}^0$ es inmediata:

$$\widehat{R}^0 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 400 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 580 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 300 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ? \end{bmatrix}.$$

Para pasar a $\widehat{R}^1$ basta con colocar, en el sitio de los primeros $m = 3$ elementos de la fila $m + 1 = 4$, el vector fila $-c_{B^1}^{\mathrm{T}}$. Además, es necesario calcular el valor de $-z^1 = -c_{B^1}^{\mathrm{T}} b^0$.

$$
\begin{aligned}
-c_{B^1}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
-z^1 &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

En este ejemplo sencillo no hubo ninguna modificación al pasar de $\widehat{R}^0$ a $\widehat{R}^1$:

$$
\widehat{R}^1 = \begin{array}{r} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 400 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 580 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 300 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ? \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
x &= (0, 0, 400, 580, 300), \\
z &= 0.
\end{aligned}
$$

El cálculo de los primeros costos reducidos de las variables libres, x_1 y x_2, da:

$$
\tilde{c}_{L^1}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}_{4\bullet}^1 \widehat{L}^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1.4 \end{bmatrix}.
$$

Esto indica que la solución factible actual no es óptima y que la variable que entra es $x_e = x_2$.

Ahora se requiere calcular la columna $\hat{A}_{\bullet e}^1$:

$$
A_{\bullet e}^1 = B^{1^{-1}} A_{\bullet e}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Entonces

$$
\hat{A}_{\bullet e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1.4 \end{bmatrix},
$$

$$\widehat{R}^1 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{cccccr} 1 & 0 & 0 & 0 & 400 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 580 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1.4 \end{array} \right].$$

En esta iteración no se puede afirmar que el óptimo sea no acotado, entonces el proceso continua con la escogencia de la variable que sale de la base, efectuando los cocientes

$$\frac{400}{1} = 400, \qquad \frac{580}{2} = 290.$$

La variable que sale es entonces

$$\begin{aligned} x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_4. \end{aligned}$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$ modificando las $m+2 = 5$ primeras columnas. Se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{26} = 2$.

$$\widehat{R}^2 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{lrcccc} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 110 & ? \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 290 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 300 & ? \\ 0 & 0.7 & 0 & 1 & 406 & ? \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (0, 290, 110, 0, 300), \\ z &= -406. \end{aligned}$$

$$\tilde{c}_{L^2}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}_{4\bullet}^2 \widehat{L}^{0,2} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0.7 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{rc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -0.3 & 0.7 \end{array} \right].$$

Esto indica que la solución factible actual no es óptima y que la variable que entra es $x_e = x_1$.

Ahora se requiere calcular la columna $\hat{A}_{\bullet e}^2$:

$$A_{\bullet e}^2 = B^{2^{-1}} A_{\bullet e}^0 = \left[\begin{array}{lrc} 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{array} \right].$$

Entonces

$$\hat{A}^1_{\cdot e} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^2 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 110 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 290 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 300 & 1 \\ 0 & 0.7 & 0 & 1 & 406 & -0.3 \end{bmatrix}.$$

En esta iteración tampoco se puede afirmar que el óptimo sea no acotado, entonces el proceso continua con la escogencia de la variable que sale de la base, efectuando los cocientes

$$\frac{110}{0.5} = 220, \qquad \frac{290}{0.5} = 580, \qquad \frac{300}{1} = 300.$$

La variable que sale es entonces

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_1},$$
$$x_s = x_3.$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$, modificando las $m+2 = 5$ primeras columnas. Se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{16} = 0.5$.

$$\widehat{R}^3 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 220 & ? \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 180 & ? \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 80 & ? \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 1 & 472 & ? \end{bmatrix},$$

$$x = (220, 180, 0, 0, 80),$$
$$z = -472.$$

$$\tilde{c}^{\mathrm{T}}_{L^3} = \widehat{S}^3_{4\cdot}\widehat{L}^{0,3} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Esto indica que la solución factible obtenida es óptima y única.

En cualquier iteración del MSR se puede verificar la construcción de la tabla. Esto, además de ilustrativo, podría ser útil para detectar errores en ejemplos pequeños hechos a mano. La última tabla se puede tomar como ejemplo para verificar: B^{-1}, $-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$, $b = B^{-1}b^0$, $-z$.

Las variables básicas son x_1, x_2, x_5. Al efectuar el producto de B (tomando de $\hat{A}^0$ las columnas básicas) por la matriz conformada por las primeras m filas y m columnas de $\widehat{R}^k$, se debe obtener la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

En las primeras m posiciones de la fila $m+1$ de $\widehat{R}^k$ debe esta el vector fila $-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$:

$$-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}. \checkmark$$

Comprobación de b^k, o sea, de los primeros m elementos de la columna $m+2$ de $\widehat{R}^k$:

$$B^{-1}b^0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 180 \\ 80 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

La comprobación del valor de $-z$ se puede hacer de dos maneras:

$$-z = (-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1})b^0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix} = -472, \quad \checkmark$$

$$-z = -c_B^{\mathrm{T}}(B^{-1}b^0) = -\begin{bmatrix} 1 & 1.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 180 \\ 80 \end{bmatrix} = -472. \ \diamond$$

La tabla del MSR presentada aquí, puede diferir de las tablas presentadas en algunos libros. Las diferencias pueden ser dos: con respecto a la columna $m+1$ y a la fila $m+1$. Como la columna $m+1$ siempre tiene la forma: 0 0 ... 1, entonces puede ser suprimida. La fila $m+1$ algunas veces es colocada como primera fila.

EJERCICIOS

En los ejercicios 12.1 a 12.6 convierta el problema a la forma estándar. Si se cumplen las condiciones, aplique el MSR.

12.1. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.2x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

12.2. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 12$, $5x_1 - 2x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

12.3. Minimizar $z = x_5$ con las restricciones $x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 12$, $5x_1 - 2x_2 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

12.4. Minimizar $z = 4x_1 + 3x_2$ con las restricciones $x_2 - 5x_3 - x_4 = 8$, $x_1 - 2.5x_3 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

12.5. Minimizar $z = 4x_1 - 3x_2$ con las restricciones $x_2 - 5x_3 - x_4 = 8$, $x_1 - 2.5x_3 + x_4 = 4$, $x \geq 0$.

12.6. Minimizar $z = -1.1x_1 - 1.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + 3x_2 \leq 14$, $4x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x \geq 0$.

Capítulo 13

EL MÉTODO DE LAS DOS FASES Y EL MÉTODO SIMPLEX REVISADO

13.1. De la primera a la segunda fase

La adaptación del método de las dos fases al MSR es muy fácil: en la primera fase se trabaja con los coeficientes de la función objetivo artificial y, además, no se calculan los costos reducidos para las variables artificiales libres. Para pasar a la segunda fase (si hay soluciones factibles) es necesario tener en cuenta los verdaderos coeficientes de la función objetivo, esto hace cambiar en la tabla del MSR, únicamente $-c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ y $-z$.

Ejemplo 13.1. El enunciado de este ejemplo es exactamente el mismo del ejemplo 9.1 :

$$\min \ z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura se tiene:

$$\min \ z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 - x_3 \qquad &= \ 4 \\ 5x_1 + \ 2x_2 \qquad - x_4 &= 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Es necesario introducir variables artificiales y considerar durante la primera fase la función objetivo artificial.

$$\begin{array}{lrcl}
\min \ z_a = & & & x_5 + x_6 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 & = & 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 & = & 12 \\
& x & \geq & 0.
\end{array}$$

La matriz $\hat{A}^0$ es entonces:

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las variables básicas en la primera iteración son: x_5 y x_6. La obtención de la matriz $\widehat{R}^0$ es inmediata:

$$\widehat{R}^0 = \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 12 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ? \end{bmatrix}.$$

Para pasar a $\widehat{R}^1$ basta con colocar en el sitio de los primeros $m = 2$ elementos de la fila $m + 1 = 3$, el vector fila $-c_{B^1}^{\mathrm{T}}$ y además, calcular el valor de $-z^1 = -c_{B^1}^{\mathrm{T}} b^0$.

$$-c_{B^1}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$-z^1 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = -16.$$

En este ejemplo sí hubo cambios al pasar de $\widehat{R}^0$ a $\widehat{R}^1$.

$$\widehat{R}^1 = \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 12 & ? \\ -1 & -1 & 1 & -16 & ? \end{bmatrix},$$

$$x = (0, 0, 0, 0, 4, 12),$$

$$z_a = 16.$$

El cálculo de los primeros costos reducidos de las variables libres, x_1, x_2, x_3 y x_4, da:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{L^1}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}_{3\cdot}^1 \widehat{L}^{0,1} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esto indica que la solución factible artificial no es óptima y que la variable que entra es

$$x_e = x_1.$$

Ahora se requiere calcular la columna $A^1_{\bullet e}$:

$$A^1_{\bullet e} = B^{1^{-1}} A^0_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\hat{A}^1_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^1 = \begin{array}{r} x_5 \\ x_6 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & \boxed{5} \\ -1 & -1 & 1 & -16 & -6 \end{bmatrix}.$$

En esta iteración no se puede afirmar que el óptimo sea no acotado (en la primera fase nunca se presenta el caso de óptimo artificial no acotado), entonces el proceso continua con la escogencia de la variable que sale de la base, efectuando los cocientes

$$\frac{4}{1} = 4, \quad \frac{12}{5} = 2.4.$$

La variable que sale es entonces

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_2},$$
$$x_s = x_6.$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$ modificando las $m+2 = 4$ primeras columnas; se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{25} = 5$.

$$\widehat{R}^2 = \begin{array}{r} x_5 \\ x_1 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 & 1.6 & ? \\ 0 & 0.2 & 0 & 2.4 & ? \\ -1 & 0.2 & 1 & -1.6 & ? \end{bmatrix},$$

$$x = (2.4, 0, 0, 0, 1.6, 0),$$
$$z_a = 1.6.$$

Como la variable artificial x_6 se volvió libre, entonces no se le calcula su costo reducido.

$$\begin{aligned}\tilde{c}^{\mathrm{T}}_{L^2} = \widehat{S}^2_{3\bullet}\widehat{L}^{0,2} &= \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.6 & 1 & -0.2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Esto indica que la solución artificial actual no es óptima y que la variable que entra es:

$$x_e = x_2.$$

Ahora se requiere calcular la columna $A_{\bullet e}$:

$$A^2_{\bullet e} = B^{2^{-1}} A^0_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\hat{A}^2_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.4 \\ -1.6 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^2 = \begin{array}{r} x_5 \\ x_1 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 & 1.6 & \boxed{1.6} \\ 0 & 0.2 & 0 & 2.4 & 0.4 \\ -1 & 0.2 & 1 & -1.6 & -1.6 \end{bmatrix}.$$

En esta iteración no se puede afirmar que el óptimo sea no acotado, entonces el proceso continua con la escogencia de la variable que sale de la base, efectuando los cocientes

$$\frac{1.6}{1.6} = 1, \quad \frac{2.4}{0.4} = 6.$$

La variable que sale es entonces

$$\begin{aligned} x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_5. \end{aligned}$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$ modificando las $m+2 = 4$ primeras columnas; se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{15} = 1.6$.

$$\widehat{R}^3 = \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & 0 & 1 & ? \\ -0.250 & 0.250 & 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ? \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x &= (2,1,0,0,0,0), \\ z_a &= 0. \end{aligned}$$

Como todas las variables artificiales son nulas se puede afirmar que ya se obtuvo el óptimo de la primera fase con una solución factible. De todas maneras esto se puede comprobar mediante el cálculo de los costos reducidos de las variables libres no artificiales.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{L^3}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}^3_{3.}\widehat{L}^{0,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Empezando la segunda fase es necesario modificar la matriz inicial $\hat{A}^0$, suprimiendo las columnas de las variables artificiales libres, y tener en cuenta los verdaderos costos. También es necesario efectuar cambios en la matriz $\widehat{R}^k$.

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 12 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La modificación de la última fila de la matriz $\widehat{R}^k$ se obtiene mediante las siguientes operaciones:

$$-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1} = -\begin{bmatrix} 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.250 & 0.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} -z &= -c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b^0 = (-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1})b^0 \\ &= \begin{bmatrix} -5.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = -16. \end{aligned}$$

Entonces la nueva matriz $\widehat{R}^k$ es:

$$\widehat{R}^3 = \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & 0 & 1 & ? \\ -0.250 & 0.250 & 0 & 2 & ? \\ -5.5 & 0.5 & 1 & -16 & ? \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x &= (2,1,0,0), \\ z &= 16. \end{aligned}$$

El proceso continúa entonces normalmente con la obtención de los costos reducidos de las variables libres.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{L^3}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}^3_{3\bullet}\widehat{L}^{0,3} &= \begin{bmatrix} -5.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5.5 & -0.5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Esto indica que la solución factible actual no es óptima y que la variable que entra es:

$$x_e = x_4.$$

Ahora se requiere calcular la columna $A_{\bullet e}$:

$$A^3_{\bullet e} = B^{3^{-1}} A^0_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.250 & 0.250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ -0.250 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\hat{A}^3_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ -0.250 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^3 = \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & 0 & 1 & \boxed{0.125} \\ -0.250 & 0.250 & 0 & 2 & -0.250 \\ -5.5 & 0.5 & 1 & -16 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

En esta iteración no se puede afirmar que el óptimo sea no acotado, entonces el proceso continúa con la escogencia de la variable que sale de la base; en este caso únicamente puede salir x_2.

$$\begin{aligned} x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_1}, \\ x_s &= x_2. \end{aligned}$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$ modificando las $m+2 = 4$ primeras columnas; se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{15} = 0.125$.

$$\begin{aligned}\widehat{R}^4 &= \begin{array}{r} x_4 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 8 & ? \\ 1 & 0 & 0 & 4 & ? \\ -3 & 0 & 1 & -12 & ? \end{bmatrix}, \\ x &= (4, 0, 0, 8), \\ z &= 12.\end{aligned}$$

De nuevo es necesario el cálculo de los costos reducidos de las variables libres.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{L^4}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}^4_{3\cdot}\widehat{L}^{0,4} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora sí se puede afirmar que la solución factible obtenida corresponde al único óptimo. $\diamond$

13.2. Conjunto no factible

Ejemplo 13.2. El enunciado de este ejemplo es exactamente el mismo del ejemplo 9.3:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ & \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & \geq & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 & \geq & 12 \\ x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x & \geq & 0. \end{array} \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ & \begin{array}{rrrrcr} x_1 + 2x_2 & - x_3 & & & = & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 & & - x_4 & & = & 12 \\ x_1 + x_2 & & & + x_5 & = & 1 \\ & & & x & \geq & 0. \end{array} \end{aligned}$$

Como no se tiene la matriz identidad de tamaño 3×3 es necesario introducir dos variables artificiales x_6, x_7 y considerar durante la primera fase la función objetivo artificial.

$$\begin{aligned} \min \quad & z_a = x_6 + x_7 \\ & \begin{array}{rrrrrrcr} x_1 + 2x_2 & - x_3 & & & + x_6 & & = & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 & & - x_4 & & & + x_7 & = & 12 \\ x_1 + x_2 & & & + x_5 & & & = & 1 \\ & & & & & x & \geq & 0. \end{array} \end{aligned}$$

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las variables básicas en la primera iteración son: x_6, x_7, x_5. La obtención de la matriz $\widehat{R}^0$ es inmediata:

$$\widehat{R}^0 = \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ? \end{bmatrix}.$$

Para pasar a $\widehat{R}^1$ basta con colocar, en el sitio de los primeros $m = 3$ elementos de la fila $m + 1 = 4$, el vector fila $-c_{B^1}^{\mathrm{T}}$, y además, calcular el valor de $-z^1 = -c_{B^1}^{\mathrm{T}} b^0$.

$$-c_{B^1}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-z^1 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = -16.$$

En este ejemplo sí hubo cambios al pasar de $\widehat{R}^0$ a $\widehat{R}^1$.

$$\widehat{R}^1 = \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & ? \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -16 & ? \end{bmatrix},$$

$$x = (0, 0, 0, 0, 1, 4, 12),$$

$$z_a = 16.$$

El cálculo de los primeros costos reducidos de las variables libres x_1, x_2, x_3, x_4 da:

$$\tilde{c}_{L^1}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}_{4\cdot}^{1} \widehat{L}^{0,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esto indica que la solución factible artificial no es óptima y que la variable que entra es:

$$x_e = x_1.$$

Ahora se requiere calcular la columna $A^1_{\bullet e}$:

$$A^1_{\bullet e} = B^{1^{-1}} A^0_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\hat{A}^1_{\bullet e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^1 = \begin{array}{r} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -16 & -6 \end{bmatrix}.$$

En esta iteración no se puede afirmar que el óptimo sea no acotado, entonces el proceso continúa con la escogencia de la variable que sale de la base, efectuando los cocientes

$$\frac{4}{1} = 4 \quad , \quad \frac{12}{5} = 2.4, \quad \frac{1}{1} = 1.$$

La variable que sale es entonces

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_3},$$
$$x_s = x_5.$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$ modificando las $m+2 = 5$ primeras columnas; se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{36} = 1$.

$$\widehat{R}^2 = \begin{array}{r} x_6 \\ x_7 \\ x_1 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & ? \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 7 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & ? \\ -1 & -1 & 6 & 1 & -10 & ? \end{bmatrix},$$

$$x = (1, 0, 0, 0, 0, 3, 7),$$
$$z_a = 10.$$

El proceso continúa entonces normalmente con la obtención de los costos reducidos de las variables libres x_2, x_3, x_4 y x_5.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{L^2}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}^2_{4\cdot}\widehat{L}^{0,2} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Los costos reducidos positivos indican que se tiene el óptimo de la primera fase, sin embargo, hay variables artificiales no nulas ($x_6 = 3, x_7 = 7$), es decir, el problema no tiene solución: es inconsistente. $\diamond$

13.3. Conjunto óptimo no acotado

Ejemplo 13.3. El enunciado de este ejemplo es exactamente el mismo del ejemplo 10.1 :

$$\min \ z = -10x_1 - 8x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura se tiene:

$$\min \ z = -10x_1 - 8x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 &= 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Como no se tiene la matriz identidad es necesario introducir dos variables artificiales x_5 y x_6. La primera fase para este problema es exactamente la misma del ejemplo 13.1 . Entonces los cambios se presentan en la segunda fase. Al empezar la segunda fase es necesario modificar la matriz inicial $\hat{A}^0$, suprimir las columnas de las variables artificiales y tener en cuenta los verdaderos costos. También hay que efectuar cambios en la matriz $\widehat{R}^k$.

$$\hat{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 12 \\ -10 & -8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La modificación de la última fila de la matriz $\widehat{R}^k$ se obtiene mediante las siguientes operaciones:

$$-c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} = -\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.250 & 0.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$-z = -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b^0 = (-c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}) b^0 = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = 28.$$

Entonces la nueva matriz $\widehat{R}^k$ es:

$$\widehat{R}^k = \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & 0 & 1 & ? \\ -0.250 & 0.250 & 0 & 2 & ? \\ 2.5 & 1.5 & 1 & 28 & ? \end{bmatrix},$$

$$x = (2, 1, 0, 0),$$
$$z = -28.$$

El proceso continúa entonces normalmente con la obtención de los costos reducidos de las variables libres.

$$\tilde{c}_{L^3}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}_{3\cdot}^3 \widehat{L}^{0,3} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2.5 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

Esto indica que la solución factible actual no es óptima y que la variable que entra es:

$$x_e = x_3.$$

Ahora se requiere calcular la columna $A_{\cdot e}$:

$$A_{\cdot e}^3 = B^{3^{-1}} A_{\cdot e}^0 = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.250 & 0.250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.625 \\ 0.250 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\hat{A}_{\cdot e}^3 = \begin{bmatrix} -0.625 \\ 0.250 \\ -2.5 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^k = \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & 0 & 1 & -0.625 \\ -0.250 & 0.250 & 0 & 2 & 0.25 \\ 2.5 & 1.5 & 1 & 28 & -2.5 \end{bmatrix}.$$

En esta iteración no se puede afirmar que el óptimo sea no acotado, entonces el proceso continúa con la escogencia de la variable que sale de la base; en este caso únicamente puede salir x_1.

$$\begin{aligned} x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_1. \end{aligned}$$

Ahora se actualiza la matriz $\widehat{R}$ modificando las $m+2 = 4$ primeras columnas; se utiliza como pivote $r_{\sigma,m+3} = r_{25} = 0.25$.

$$\widehat{R}^4 = \begin{array}{r} x_2 \\ x_3 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 0.5 & 0 & 6 & ? \\ -1 & 1 & 0 & 8 & ? \\ 0 & 4 & 1 & 48 & ? \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (0, 6, 8, 0), \\ z &= -48. \end{aligned}$$

De nuevo es necesario calcular los costos reducidos de las variables libres.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{L^4}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}_{3\bullet}^4 \widehat{L}^{0,4} &= \left[\begin{array}{rrr} 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -10 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{rr} 10 & -4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto indica que la solución factible actual no es óptima y que la variable que entra es:

$$x_e = x_4.$$

Ahora se requiere calcular la columna $A_{\bullet e}$:

$$A_{\bullet e}^4 = B^{4^{-1}} A_{\bullet e}^0 = \left[\begin{array}{rr} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} -0.5 \\ -1 \end{array} \right].$$

Entonces

$$\hat{A}_{\bullet e}^4 = \left[\begin{array}{r} -0.5 \\ -1 \\ -4 \end{array} \right],$$

$$\widehat{R}^4 = \begin{array}{r} x_2 \\ x_3 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 0.5 & 0 & 6 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 48 & -4 \end{array} \right].$$

Aquí es claro que no se puede escoger una variable que salga de la base, es decir, el óptimo no es acotado. De igual manera, como en el método simplex, se puede construir una dirección a lo largo de la cual la función objetivo disminuye.

$$d = (0, 0.5, 1, 1).$$

Entonces los puntos de la forma

$$(0, 6, 8, 0) + \mu(0, 0.5, 1, 1), \quad \mu \geq 0,$$

son factibles. Para ellos la función objetivo vale $-48 + \mu(-4)$, es decir, decrece indefinidamente. $\diamond$

EJERCICIOS

En los ejercicios 13.1 a 13.7 convierta el problema a la forma estándar. Aplique el MSR, una o dos fases.

13.1. Minimizar $z = -x_1 - 0.1x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_2 \geq 2$, $x_1 + 2x_2 \leq 6$, $x \geq 0$.

13.2. Minimizar $z = 1.1x_1 + 1.2x_2 + 1.3x_3 + 1.4x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \geq 1$, $x_2 + 2x_4 \geq 2$, $x_1 + 3x_4 \geq 3$, $x \geq 0$.

13.3. Minimizar $z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \geq 1$, $x_2 + 2x_4 \geq 2$, $x_1 + 3x_4 \geq 3$, $x \geq 0$.

13.4. Minimizar $z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$ con las restricciones $x_3 + x_4 \geq 1$, $x_2 + 2x_4 \geq 2$, $x_1 + 3x_4 \geq 3$, $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 1$, $x \geq 0$.

13.5. Minimizar $z = 10x_1 + 11x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x \geq 0$.

13.6. Minimizar $z = 10x_1 + 25x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x \geq 0$.

13.7. Minimizar $z = 10x_1 + 25x_2$ con las restricciones $2x_1 + 3x_2 \geq 12$, $2x_1 + x_2 \geq 8$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x \geq 0$.

Capítulo 14

DUALIDAD

14.1. El problema dual

Considérese un problema de programación lineal en la forma general de minimización (con desigualdades $\geq$), es decir:

$$\begin{aligned} \min \quad z = c^{\mathrm{T}} x & \\ A_{i\cdot} x \geq b_i, & \quad i \in M_1 \subseteq M \\ A_{i\cdot} x = b_i, & \quad i \in M \setminus M_1 \\ x_j \geq 0, & \quad j \in N_1 \subseteq N \\ x_j \in \mathbb{R}, & \quad j \in N \setminus N_1. \end{aligned}$$

Se define su **problema dual**, PD, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \max \quad w = b^{\mathrm{T}} y & \\ A_{\cdot j}^{\mathrm{T}} y \leq c_j, & \quad j \in N_1 \subseteq N \\ A_{\cdot j}^{\mathrm{T}} y = c_j, & \quad j \in N \setminus N_1 \\ y_i \geq 0, & \quad i \in M_1 \subseteq M \\ y_i \in \mathbb{R}, & \quad i \in M \setminus M_1. \end{aligned}$$

Recordemos que el problema inicial, llamado también el problema principal, primario o "primal" (este término puede ser anglicismo, pero es bastante usado en el lenguaje técnico), denotado simplemente por PP , tiene n variables y m restricciones, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, M_1 es el conjunto de subíndices de las desigualdades del problema primal, $M \setminus M_1$

es el conjunto de subíndices de las igualdades del problema primal, N_1 es el conjunto de subíndices de las variables no negativas en el primal, y $N - N_1$ es el conjunto de subíndices de las variables no restringidas en el primal.

De la definición del problema dual se deducen ciertas analogías y correspondencias entre el problema primal y el dual:

PRIMAL	DUAL
problema de minimización	problema de maximización
desigualdades $\geq$	desigualdades $\leq$
$m =$ número de restricciones	$m =$ número de variables
$n =$ número de variables	$n =$ número de restricciones
$A =$ matriz de coeficientes de las restricciones	$A^{\mathrm{T}} =$ matriz de coeficientes de las restricciones
una desigualdad $\geq$	una variable no negativa
una igualdad	una variable no restringida
una variable no negativa	una desigualdad $\leq$
una variable no restringida	una igualdad
$c_j =$ coeficiente de la función objetivo	$c_j =$ término independiente
$b_i =$ término independiente	$b_i =$ coeficiente de la función objetivo

Hasta ahora, según la definición, únicamente se puede hallar el dual de un problema de minimización con desigualdades $\geq$. Si se trata de un problema de maximización, habría que convertirlo primero en un problema de minimización. Más adelante se verá que también se puede hallar directamente el dual de un problema de maximización con desigualdades $\leq$.

Ejemplo 14.1. Hallar el problema dual del siguiente problema primal:

$$
\begin{aligned}
\min\ \ z = x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + \ 4x_4 & \\
5x_1 + \ 6x_2 + \ 7x_3 - \ 8x_4 &\geq \ 9 \\
15x_1 + 16x_2 + 17x_3 + 18x_4 &= 19 \\
10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 13x_4 &\leq 14 \\
x_j &\geq \ 0\ ,\ \ j = 2,3,4, \\
x_1 &\in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}
$$

El primer paso es convertir este problema en uno equivalente de minimización con desigualdades $\geq$.

$$\begin{array}{rl} \min & z = x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + \ 4x_4 \\ & \begin{array}{rcl} 5x_1 + \ 6x_2 + \ 7x_3 - \ 8x_4 & \geq & 9 \\ 15x_1 + 16x_2 + 17x_3 + 18x_4 & = & 19 \\ -10x_1 - 11x_2 - 12x_3 - 13x_4 & \geq & -14 \\ x_j & \geq & 0 \quad , \ j = 2,3,4, \\ x_1 & \in & \mathbb{R} \quad . \end{array} \end{array}$$

Su dual es entonces:

$$\begin{array}{rl} \max & w = 9y_1 + 19y_2 - \ 14y_3 \\ & \begin{array}{rcl} 5y_1 + 15y_2 - \ 10y_3 & = & 1 \\ 6y_1 + 16y_2 - \ 11y_3 & \leq & 2 \\ 7y_1 + 17y_2 - \ 12y_3 & \leq & 3 \\ -8y_1 + 18y_2 - \ 13y_3 & \leq & 4 \\ y_1, y_3 & \geq & 0 \\ y_2 & \in & \mathbb{R} \end{array} \end{array}$$

Ejemplo 14.2. Hallar el dual de un problema en la forma mixta:

$$\begin{array}{rl} \min & z = c^{\mathrm{T}} x \\ & A_i.x \geq b_i, \ \ i \in M_1 \subseteq M \\ & A_i.x = b_i, \ \ i \in M \setminus M_1 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Su dual es:

$$\begin{array}{rl} \max & w = b^{\mathrm{T}} y \\ & A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ & y_i \geq 0, \ \ i \in M_1 \subseteq M \\ & y_i \in \mathbb{R}, \ \ i \in M \setminus M_1. \ \diamond \end{array}$$

Ejemplo 14.3. Hallar el dual de un problema en la forma estándar:

$$\begin{array}{rl} \min & z = c^{\mathrm{T}} x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Su dual es:

$$\begin{aligned} \max \ \ w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \in \mathbb{R}^m. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 14.4. Hallar el dual de un problema en la forma canónica:

$$\begin{aligned} \min \ \ z = c^{\mathrm{T}} x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Su dual es:

$$\begin{aligned} \max \ \ w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0. \ \diamond \end{aligned}$$

Es interesante observar que, de estos últimos tres ejemplos, únicamente el dual de un problema en la forma canónica también está en una de esas formas y, más exactamente, también está en la forma canónica. Por esta razón, la mayoría de los teoremas y resultados de dualidad están dados para problemas (primal y dual) en la forma canónica. De ahora en adelante, salvo que se diga expresamente lo contrario, cuando se hable de problema primal y problema dual, se tratará de problemas en la forma canónica.

14.2. Propiedades

Proposición 14.1. *El dual del dual es el primal.*

Demostración: El problema primal en la forma general es:

$$\begin{aligned} \min \ \ z = c^{\mathrm{T}} x \\ A_{i\cdot} x \geq b_i, \ \ i \in M_1 \subseteq M \\ A_{i\cdot} x = b_i, \ \ i \in M \setminus M_1 \\ x_j \geq 0, \ \ j \in N_1 \subseteq N \\ x_j \in \mathbb{R}, \ \ j \in N \setminus N_1. \end{aligned}$$

Su dual es:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w = b^{\mathrm T} y \\
& A_{j\cdot}^{\mathrm T} y \le c_j, \;\; j \in N_1 \subseteq N \\
& A_{j\cdot}^{\mathrm T} y = c_j, \;\; j \in N \setminus N_1 \\
& y_i \ge 0, \;\; i \in M_1 \subseteq M \\
& y_i \in \mathbb{R}, \;\; i \in M \setminus M_1.
\end{aligned}
$$

Para hallar el dual de PD, por ahora, hay que colocarlo en la forma de minimización con desigualdades $\geq$:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w' = -b^{\mathrm T} y \\
& -A_{j\cdot}^{\mathrm T} y \ge -c_j, \;\; j \in N_1 \subseteq N \\
& -A_{j\cdot}^{\mathrm T} y = -c_j, \;\; j \in N \setminus N_1 \\
& y_i \ge 0, \;\; i \in M_1 \subseteq M \\
& y_i \in \mathbb{R}, \;\; i \in M \setminus M_1.
\end{aligned}
$$

El dual del dual es:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \zeta = -c^{\mathrm T} \xi \\
& -A^{\mathrm T}{}_{i\cdot}^{\mathrm T} \xi \le -b_i, \;\; i \in M_1 \subseteq M \\
& -A^{\mathrm T}{}_{i\cdot}^{\mathrm T} \xi = -b_i, \;\; i \in M \setminus M_1 \\
& \xi_j \ge 0, \;\; j \in N_1 \subseteq N \\
& \xi_j \in \mathbb{R}, \;\; j \in N \setminus N_1.
\end{aligned}
$$

Al convertir el problema anterior en un problema de minimización con desigualdades $\geq$ y teniendo en cuenta que $A^{\mathrm{T}\mathrm{T}} = A$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \zeta = c^{\mathrm T} \xi \\
& A_{i\cdot} \xi \ge b_i, \;\; i \in M_1 \subseteq M \\
& A_{i\cdot} \xi = b_i, \;\; i \in M \setminus M_1 \\
& \xi_j \ge 0, \;\; j \in N_1 \subseteq N \\
& \xi_j \in \mathbb{R}, \;\; j \in N \setminus N_1.
\end{aligned}
$$

Lo anterior es, salvo el nombre de las variables, el problema primal. $\square$

El teorema anterior es válido, salvo equivalencia, para problemas primales en formas diferentes a la general. Esto permite hallar directamente el dual de un problema que está en la forma de maximización con restricciones $\leq$, sin tener que convertirlo primero en un problema de minimización con desigualdades $\geq$. La demostración se puede hacer directamente o utilizando el siguiente resultado.

Proposición 14.2. *El problema dual de un problema equivalente al primal, es equivalente a su dual.*

Ejemplo 14.5. Hallar el dual de

$$\max \ \ z = x_1 + 1.4x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 - \quad x_2 &\geq -400 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq \ \ 580 \\ x_1 \qquad\qquad &\leq \ \ 300 \\ x &\geq \quad 0. \end{aligned}$$

En este ejemplo basta con cambiar el signo de la primera desigualdad y ya queda listo para hallar su dual:

$$\max \ \ z = x_1 + 1.4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\leq 400 \\ x_1 + \quad 2x_2 &\leq 580 \\ x_1 \qquad\qquad &\leq 300 \\ x &\geq \ \ 0. \end{aligned}$$

Entonces su dual es:

$$\min \ \ w = 400y_1 + 580y_2 + 300y_3$$

$$\begin{aligned} y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 &\geq 1 \\ y_1 + \quad 2y_2 + \quad 3y_3 &\geq 1.4 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Proposición 14.3. ***Teorema de dualidad débil:*** *Si $\bar{x}$ es solución factible de PP y $\bar{y}$ es solución factible del PD, entonces*

$$b^T\bar{y} \leq c^T\bar{x}.$$

Demostración : Como $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son soluciones factibles, entonces:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &\geq b, \\ \bar{x} &\geq 0, \\ A^{\mathrm{T}}\bar{y} &\leq c, \\ \bar{y} &\geq 0. \end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned}(A\bar{x})_i &\geq b_i,\\ \bar{y}_i &\geq 0.\end{aligned}$$

Luego

$$\bar{y}_i(A\bar{x})_i \geq \bar{y}_i b_i.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i(A\bar{x})_i \geq \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i b_i,$$

es decir,

$$\bar{y}^{\mathrm{T}} A\bar{x} \geq \bar{y}^{\mathrm{T}} b,$$

o sea,

$$\bar{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \bar{y} \geq b^{\mathrm{T}} \bar{y}.$$

Partiendo de

$$\begin{aligned}\bar{x} &\geq 0,\\ A^{\mathrm{T}}\bar{y} &\leq c,\end{aligned}$$

se llega a

$$\bar{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \bar{y} \leq \bar{x}^{\mathrm{T}} c = c^{\mathrm{T}} \bar{x}. \quad \square$$

Ejemplo 14.6.

$$\min \; z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4\\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12\\ x &\geq 0.\end{aligned}$$

Su dual es

$$\max \; w = 4y_1 + 12y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 + 5y_2 &\leq 3\\ 2y_1 + 2y_2 &\leq 4\\ y &\geq 0.\end{aligned}$$

Sean: $\bar{x} = (4, 3)$, $\bar{y} = (1, 0)$. Se puede verificar que $\bar{x}$ es una solución factible de PP, es decir, cumple las dos restricciones y, además, sus componentes son no negativas. Por otro lado, $\bar{y}$ es una solución factible de PD. Además, $z = c^{\mathrm{T}}\bar{x} = 24$, $w = b^{\mathrm{T}}\bar{y} = 4$. Esto concuerda con el teorema. $\diamond$

Ejemplo 14.7. Consideremos los mismos PP y PD del ejemplo anterior.

Sean: $\bar{x} = (4, 3)$, $\bar{y} = (10, 0)$. El punto $\bar{x}$ es una solución factible de PP; $z = c^{\mathrm{T}}\bar{x} = 24$; $w = b^{\mathrm{T}}\bar{y} = 40$. Luego $\bar{y}$ no puede ser una solución factible de PD, pues si lo fuera contradiría el teorema. $\diamond$

Las dos proposiciones siguientes se deducen inmediatamente de la última proposición.

Proposición 14.4. *Sean: $\bar{x}$ solución factible de PP y $\bar{y}$ solución factible de PD. Si $b^T\bar{y} = c^T\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es punto óptimo (minimizador) de PP y $\bar{y}$ es punto óptimo (maximizador) de PD.*

Proposición 14.5. *Si uno de los dos problemas, el primal o el dual, tiene soluciones factibles con óptimo no acotado , entonces el otro problema no tiene soluciones factibles.*

Ejemplo 14.8. Consideremos el PP y el PD del ejemplo 14.6

Sean: $\bar{x} = (2, 1)$, $\bar{y} = (7/4, 1/4)$. Se puede verificar que $\bar{x}$ es solución factible de PP. También $\bar{y}$ es solución factible de PD. Además, $c^{\mathrm{T}}x = 10$, $b^{\mathrm{T}}\bar{y} = 10$. Entonces $\bar{x}$ es solución óptima de PP y $\bar{y}$ es solución óptima de PD. $\diamond$

Ejemplo 14.9. Consideremos el problema de los ejemplos 3.4 y 10.1 .

$$\min \ \ z = -10x_1 - 8x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Su dual es

$$\max \ \ w = 4y_1 + 12y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 + \ 5y_2 &\leq -10 \\ 2y_1 + \ 2y_2 &\leq \ -8 \\ y &\geq \ \ 0. \end{aligned}$$

Como se veía en los ejemplos 3.4 y 10.1, el PP tiene óptimo no acotado. Esto permite afirmar que el PD no tiene soluciones factibles. Para este caso es fácil comprobar que no existen valores de y_1, y_2, no negativos, que cumplan con las dos restricciones. $\diamond$

Proposición 14.6. ***Teorema de dualidad fuerte:*** *Si el PP tiene punto óptimo (minimizador) x^*, entonces el PD también tiene punto óptimo (maximizador) y^* y además $c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^*$.*

Demostración : Para resolver el PP, es necesario introducir variables de holgura y obtener el problema PP' en la forma estándar.

$$\begin{aligned} \min z = c^{\mathrm{T}}x \\ Ax - Ih = b \\ x, h \geq 0. \end{aligned}$$

Este problema se puede escribir como

$$\begin{aligned} \min z = c'^{\mathrm{T}}x' \\ A'x' = b \\ x' \geq 0, \end{aligned}$$

donde $x' = [x^{\mathrm{T}} \quad h^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ es un vector columna $(n+m) \times 1$, $c' = [c^{\mathrm{T}} \quad 0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ es un vector columna $(n+m) \times 1$, $A' = [A \quad -I]$ es una matriz $m \times (n+m)$.

Como el PP tiene punto óptimo, los costos reducidos correspondientes son no negativos:

$$\begin{aligned} \tilde{c}' = c' - A'^{\mathrm{T}}B^{-1^{\mathrm{T}}}c'_B \geq 0 \\ \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ -I \end{bmatrix} B^{-1^{\mathrm{T}}}c'_B \geq 0 \end{aligned}$$

Sea $y = B^{-1^{\mathrm{T}}}c'_B$. Entonces al expresar la última desigualdad por bloques se tiene:

$$\begin{aligned} c - A^{\mathrm{T}}y \geq 0, \\ 0 - -Iy \geq 0. \end{aligned}$$

Es decir, y es admisible para el PD. Por otro lado, en el simplex, $z^* = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b = y^{\mathrm{T}}b = b^{\mathrm{T}}y$, luego y no solo es admisible, sino que también es óptimo. $\square$

Si se utiliza el MSR, se tiene directamente y^{T} en las m primeras posiciones de la fila $m+1$ de la tabla del MSR.

Ejemplo 14.10. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 10x_2 \\ & 5x_1 + \ 2x_2 \geq \ 12 \\ & x_1 + \ \ x_2 \geq 3.5 \\ & x_1 + \ 2x_2 \geq \ \ 4 \\ & x \geq \ 0. \end{aligned}$$

Para resolver este problema se introducen 3 variables de holgura (y 3 artificiales) y se obtiene

$$x^* = (4, 0, 8, 1/2, 0).$$

Esto indica que las variables básicas son x_1, x_3 y x_4. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego un punto óptimo de PD está dado por:

$$y = B^{-1^{\mathrm{T}}} c_B = B^{-1^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, si se emplea el MSR, se obtiene y óptimo directamente de la última tabla (los 3 primeros elementos de la fila 4):

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -12 \end{bmatrix}. \ \diamond$$

Corolario 14.1. *Dos puntos x, y, factibles para el PP y el PD respectivamente, son óptimos si y sólo si $c^T x = b^T y$.*

Cuando uno de los dos problemas, el primal o el dual, no tiene soluciones factibles no se puede afirmar que necesariamente el otro tenga óptimo no acotado. La proposición 14.5 presenta una implicación y no una equivalencia. En realidad hay dos posibilidades (para el otro problema): o bien tiene óptimo no acotado, o bien tampoco tiene soluciones factibles.

La primera posibilidad se presenta en el ejemplo 14.9 , viendo que el dual no tiene soluciones factibles y el otro tiene óptimo no acotado. La segunda posibilidad se puede observar en el siguiente ejemplo [Baz77].

Ejemplo 14.11.

$$\min \ z = -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Su dual es

$$\max \ w = y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\leq -1 \\ -y_1 + y_2 &\leq -1 \\ y &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Por cualquier método, gráfico, simplex..., se puede verificar que el PP no tiene solución y que el PD tampoco. $\diamond$

La siguiente proposición resume algunos de los anteriores resultados.

Proposición 14.7. ***Teorema fundamental de dualidad***. *Dados el PP y el PD, una y solamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

- *Ambos problemas tienen soluciones óptimas x^*, y^*, con el mismo valor de la función objetivo: $c^Tx^* = b^Ty^*$.*
- *Un problema tiene óptimo no acotado y el otro no tiene solución.*
- *Ninguno de los dos problemas tiene solución.*

Proposición 14.8. ***Teorema de holgura complementaria***. *Sean x^*, y^* soluciones óptimas de PP y de PD. Entonces:*

$$\begin{aligned} (A_{i\cdot}x^* - b_i)y_i^* = 0, \ \ i = 1, \ldots, m, \\ (A_{\cdot j}^T y^* - c_j)x_j^* = 0, \ \ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dicho de otra forma: Si en el óptimo de un problema hay holgura (no nula) en una restricción, entonces el valor óptimo de la variable correspondiente del otro problema es nulo. Si en el óptimo de un problema una variable es positiva, entonces la holgura es nula en la restricción correspondiente del óptimo del otro problema.

Demostración: Como x^* y y^* son óptimos, entonces son factibles y coinciden en el valor de la función objetivo:

$$\begin{aligned} Ax^* &\geq b & \qquad\qquad A^{\mathrm{T}}y^* &\leq c \\ x^* &\geq 0 & y^* &\geq 0 \end{aligned}$$

$$c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^*.$$

Entonces

$$Ax^* - b \geq 0, \quad x^* \geq 0, \quad c - A^{\mathrm{T}}y^* \geq 0, \quad y^* \geq 0.$$

Sean

$$\alpha = y^{*\mathrm{T}}(Ax^* - b) \geq 0, \quad \beta = x^{*\mathrm{T}}(c - A^{\mathrm{T}}y^*) \geq 0.$$

$$\alpha + \beta = y^{*\mathrm{T}}Ax - y^{*\mathrm{T}}b + x^{*\mathrm{T}}c - x^{*\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y^* = 0,$$

luego

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

$$0 = \alpha = y^{*\mathrm{T}}(Ax^* - b) = \sum_{i=1}^{m} y_i^*(Ax^* - b)_i = \sum_{i=1}^{m} y_i^*(A_{i\cdot}x^* - b_i).$$

Si se tiene una suma nula de términos no negativos, entonces cada término es nulo, es decir, $y_i^*(A_{i\cdot}x^* - b_i) = 0$, para todo i. De manera semejante se concluye que $x_j^*(c_j - A_{\cdot j}^{\mathrm{T}}y^*) = 0$, para todo j. □

Ejemplo 14.12. Consideremos el problema del ejemplo 14.5

$$\begin{aligned} \max \quad z = \; & x_1 + 1.4x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 400 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 580 \\ & x_1 \qquad\;\; \leq 300 \\ & \qquad\quad\; x \geq 0. \end{aligned}$$

Su dual es:

$$\begin{aligned} \min \quad w = \; & 400y_1 + 580y_2 + 300y_3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ & y_1 + 2y_2 \qquad\; \geq 1.4 \\ & \qquad\qquad\quad\; y \geq 0. \end{aligned}$$

La solución de PP es $x^* = (220, 180)$.

Como x_1^*, x_2^* son positivas, entonces la holgura es nula en el óptimo del dual, para la primera y para la segunda restricción (se tiene la igualdad y no la desigualdad). Además, en el óptimo del primal, la holgura de la tercera restricción no es nula: $A_3.x^* - b_3 = 220 - 300 = -80$; esto implica que la tercera variable en el óptimo del dual debe ser nula. En resumen:

$$\begin{aligned} y_1^* + \ \ y_2^* + y_3^* &= 1 \\ y_1^* + 2y_2^* \qquad &= 1.4 \\ y_3^* &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se tiene:

$$\begin{aligned} y_1^* &= 0.6, \\ y_2^* &= 0.4, \\ y_3^* &= 0. \end{aligned}$$

También se hubiera podido utilizar la igualdad $400y_1^* + 580y_2^* + 300y_3^* = z^* = 472$, obtenida a partir de la proposición 14.4 (o de la proposición 14.6). $\diamond$

Sea PP' el problema obtenido a partir de PP, al introducir variables de holgura para obtener la forma estándar, es decir, un problema con $n + m$ variables, m restricciones. Sea PD' el problema obtenido a partir de PD, al introducir variables de holgura para obtener la forma estándar, es decir, un problema con $m + n$ variables, n restricciones.

El teorema débil de holgura complementaria se puede expresar simplemente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{n+i}^* \ y_i^* &= 0, \ \ i = 1, ..., m, \\ y_{m+j}^* \ x_j^* &= 0, \ \ j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

La siguiente proposición indica que la tabla óptima del método simplex permite dar directamente información sobre la solución óptima del dual, o viceversa.

Proposición 14.9. *Sean: x^* solución óptima de PP', $\tilde{c}$ su vector de costos reducidos, y^* solución óptima de PD' y $\widetilde{b}$ su vector de costos reducidos. Entonces*

$$\begin{aligned} x_j^* &= \widetilde{b}_{m+j}^*, \quad j = 1, ..., n, \\ x_{n+i}^* &= \widetilde{b}_i^*, \qquad i = 1, ..., m, \\ \\ y_i^* &= \tilde{c}_{n+i}^*, \quad i = 1, ..., m, \\ y_{m+j}^* &= \tilde{c}_j^*, \qquad j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Este resultado permite resolver el PD y utilizar sus valores óptimos para obtener la solución de PP, o viceversa, resolver el PP y utilizar sus valores óptimos para obtener la solución de PD. Este recurso es favorable cuando la tabla de PD es más pequeña que la tabla de PP. Esto sucede, por lo general, cuando el PP tiene muchas restricciones y pocas variables. De todas maneras hay que tener en cuenta también el número de variables de holgura y el número de variables artificiales.

Ejemplo 14.13.

$$\min \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 11 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Su dual es:

$$\max \quad w = 5y_1 + 11y_2 + 8y_3$$

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq 5 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\leq 4 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Para resolver el PP hay que introducir 3 variables de holgura y 3 variables artificiales; en la primera fase hay que trabajar con una tabla de $4{\times}9 = 36$ elementos. Además, es necesario efectuar por lo menos 3 iteraciones en la primera fase para sacar las variables artificiales de la base.

Para resolver el PD hay que introducir 2 variables de holgura y trabajar con una tabla de $3 \times 6 = 18$ elementos. Directamente se tiene una solución factible y no es necesaria la primera fase.

Al efectuar explícitamente los cálculos se observa que para el primal se hubieran requerido $3 + 1 = 4$ iteraciones. Para el dual se necesitaron $0 + 3 = 3$ iteraciones. En este ejemplo es evidente la ventaja de resolver el PD para obtener la solución de PP.

La última tabla de la solución de PD por el método simplex es:

$$\begin{array}{r} y_2 \\ y_1 \\ -w \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 21 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_1^* &= 0 = x_{2+1}^*,\\
\widetilde{b}_2^* &= 0 = x_{2+2}^*,\\
\widetilde{b}_3^* &= 1 = x_{2+3}^*,\\
\widetilde{b}_{3+1}^* &= 1 = x_1^*,\\
\widetilde{b}_{3+2}^* &= 4 = x_2^*.
\end{aligned}$$

También es posible obtener los valores de los costos reducidos en la tabla óptima de PP.

$$\begin{aligned}
y_1^* &= 2 = \tilde{c}_{2+1}^*,\\
y_2^* &= 1 = \tilde{c}_{2+2}^*,\\
y_3^* &= 0 = \tilde{c}_{2+3}^*,\\
y_{3+1}^* &= 0 = \tilde{c}_1^*\\
y_{3+2}^* &= 0 = \tilde{c}_2^*.
\end{aligned}$$

Además

$$z^* = 21. \ \diamond$$

EJERCICIOS

En los ejercicios 14.1 a 14.6, plantee el dual del problema propuesto (puede haber dos caminos que llevan a resultados diferentes, pero equivalentes).

14.1. Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 3$, $x_2 + x_3 - 2x_4 = 8$, $2x_1 + x_3 + x_4 \geq 10$, $x_1, x_2, x_4 \geq 0$.

14.2. Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3$, $x_2 + x_3 - 2x_4 = 8$, $2x_1 + x_3 + x_4 \leq 10$, $x_1, x_2, x_4 \geq 0$.

14.3. Maximizar $z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3$, $x_2 + x_3 - 2x_4 = 8$, $2x_1 + x_3 + x_4 \leq 10$, $x_1, x_2, x_4 \geq 0$.

14.4. Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 3$, $x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 8$, $2x_1 + x_3 + x_4 \geq 10$, $x \geq 0$.

14.5. Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3$, $x_2 + x_3 - 2x_4 = 8$, $2x_1 + x_3 + x_4 = 10$, $x \geq 0$.

14.6. Maximizar $z = 3x_1 + 8x_2 + 10x_3$ con las restricciones $x_1 + +2x_3 \leq 1$, $2x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 + x_2 + x_3 \leq -4$, $3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8$, $x \geq 0$.

En los ejercicios 14.7 a 14.9, resuelva el problema propuesto, a partir de la solución de su dual. Utilice dos caminos, el teorema de holgura complementaria débil (proposición 14.8) y la proposición 14.9.

14.7. Minimizar $z = 25x_1 + 15x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 10$, $4x_1 + 3x_2 \geq 34$, $2x_1 + x_2 \geq 12$, $x_2 \geq 3$, $x \geq 0$.

14.8. Minimizar $z = 16x_1 + 15x_2$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 \geq 16$, $2x_1 + x_2 \geq 14$, $3x_1 + x_2 \geq 17$, $x \geq 0$.

14.9. Minimizar $z = 7x_1 + 8x_2$ con las restricciones $x_1 + 4x_2 \geq 1$, $2x_1 + 5x_2 \geq 2$, $3x_1 + x_2 \leq -3$, $3x_1 + 6x_2 \geq 2$, $x \geq 0$.

14.10. Considere ahora un problema de PL en la forma estándar como el problema primal, PP. Sea PD su dual. Trate de encontrar y justificar resultados análogos a los de las proposiciones 14.3 a 14.7.

Capítulo 15

MÉTODO SIMPLEX DUAL

15.1. Generalidades

El método simplex dual, MSD, tiene muchas semejanzas con el método simplex (primal), estas analogías son concordantes con lo visto sobre dualidad.

Para resolver un problema de programación lineal por el MSD se requieren las siguientes condiciones:

- problema de minimización en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \min \quad z = c^{\mathrm{T}} x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

- los costos reducidos de la primera tabla son no negativos,
- m columnas de A forman la matriz identidad.

En el MSD también hay variables básicas, variables libres, soluciones básicas, variable que sale de la base, variable que entra a la base, pivoteo.

La diferencia consiste en que en el MSD es posible tener términos independientes b_i negativos; así una solución básica siempre cumple las condiciones de optimalidad, pero no siempre es factible. Precisamente el MSD busca obtener una solución básica que sea factible (y que también siga cumpliendo las condiciones de optimalidad) y cuando esto se logra se detiene el proceso iterativo.

Recordemos que en el método simplex siempre se tiene factibilidad y lo que se busca es obtener la optimalidad.

No todos los problemas se pueden resolver por el MSD. Hay otro método, el simplex primal dual, que permite empezar con costos reducidos negativos y con términos independientes negativos.

De manera esquemática el algoritmo del MSD se puede presentar así:

verificar que se cumplen condiciones para el MSD.
mientras la solución no sea factible
    escoger la varible que sale
    si la fila de la variable que sale es no negativa **ent**
        el problema no tiene soluciones factibles
        parar
    fin-si
    escoger la variable libre que entra
    pivotear
fin-mientras

El MSD acaba, bien sea porque se sabe que el problema no tiene soluciones factibles, o, bien porque se obtuvo una solución factible (y óptima). Veamos ahora con más detalle algunos pasos del MSD.

Una solución básica es factible si todos los términos independientes son no negativos:

$$b_i \geq 0 \qquad \forall i.$$

La escogencia de la variable básica que sale se hace mediante la búsqueda del b_i más negativo, es decir, el más pequeño.

$$\begin{aligned} x_s &= x_{\beta_\sigma}, \\ b_\sigma &= \min_i \{b_i\}, \\ \sigma &= \operatorname*{argmin}_{1\leq i\leq m} \{b_i\}. \end{aligned}$$

Para escoger la variable libre que entra, x_e, se busca, en la fila de la variable que sale, un coeficiente negativo correspondiente a una variable libre de tal manera, que al ser tomado como pivote vuelva positivo el término independiente b_σ y, además, conserve no negativos los costos reducidos.

$$\frac{\tilde{c}_e}{a_{\sigma e}} = \max \{\frac{\tilde{c}_j}{a_{\sigma j}} : a_{\sigma j} < 0, \ \ x_j \text{ es variable libre}\},$$

$$e = \operatorname*{argmax}_{1\leq j\leq n} \{\frac{\tilde{c}_j}{a_{\sigma j}} : a_{\sigma j} < 0, \ \ x_j \text{ es variable libre}\},$$

$$e = \operatorname*{argmin}_{1\leq j\leq n} \{\frac{\tilde{c}_j}{-a_{\sigma j}} : a_{\sigma j} < 0, \ \ x_j \text{ es variable libre}\}.$$

Precisamente este coeficiente $a_{\sigma e}$ se usa como pivote. Las fórmulas para el pivoteo son exactamente las mismas del método simplex.

$$a_{\sigma j}^{k+1} = \frac{a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}\ , \quad j = 1, ..., n+1,$$

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ie}^k a_{\sigma j}^k}{a_{\sigma e}^k}, \quad i = 1, ..., m+1, \quad i \neq \sigma, \quad j = 1, ..., n+1$$

Ejemplo 15.1. Resolver por el método simplex dual el siguiente problema:

$$\min \ \ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Al introducir las variables de holgura se tiene:

$$\min \ \ z = 3x_1 - 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 &= 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Aquí no se tiene la matriz identidad, pero si se multiplican la primera y la segunda igualdad por -1, entonces sí se logra la matriz identidad con la tercera y la cuarta columna.

$$\hat{A}^0 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr} -1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ \boxed{-5} & -2 & 0 & 1 & -12 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ahora hay que calcular los costos reducidos. En este caso los costos son iguales a los costos reducidos ya que su valor es nulo para las variables básicas. Cómo en esta tabla no hay ningún costo reducido negativo, entonces sí se puede utilizar el MSD.

Cómo hay términos independientes negativos, entonces la solución básica actual no es factible. Al buscar el término independiente más pequeño se observa que éste es -12. Entonces:

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_2},$$
$$x_s = x_4.$$

La fila de la variable que sale tiene coeficientes negativos, entonces no se puede decir, por el momento, que el problema no tenga solución.

Para averiguar cuál variable entra a la base es necesario efectuar los cocientes entre los costos reducidos y los coeficientes negativos de la fila de la variable que sale, para las variables libres.

$$\frac{3}{-5} = -0.6, \quad \frac{4}{-2} = -2.$$

El cociente mayor (el más pequeño en valor absoluto) es -0.6, entonces:

$$x_e = x_1.$$

Ahora hay que modificar la tabla usando como pivote $a_{21} = -5$.

$$\hat{A}^2 = \begin{array}{r} x_3 \\ x_1 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{crcrr} 0 & \boxed{-1.6} & 1 & -0.2 & -1.6 \\ 1 & 0.4 & 0 & -0.2 & 2.4 \\ 0 & 2.8 & 0 & 0.6 & -7.2 \end{array} \right].$$

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_1},$$
$$x_s = x_3,$$
$$\frac{2.8}{-1.6} = -1.75, \quad \frac{0.6}{-0.2} = -3,$$
$$x_e = x_2.$$

Ahora hay que modificar la tabla usando como pivote $a_{12} = -1.6$.

$$\hat{A}^3 = \begin{array}{r} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{ccrrr} 0 & 1 & -0.625 & 0.125 & 1 \\ 1 & 0 & 0.25 & -0.25 & 2 \\ 0 & 0 & 1.75 & 0.25 & -10 \end{array} \right].$$

Esta solución es factible y también óptima.

$$x^* = (2, 1, 0, 0),$$
$$z^* = 10. \ \diamond$$

Ejemplo 15.2. Resolver por el método simplex dual el siguiente problema:

$$\min \ z = 5x_1 - 6x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Las restricciones son exactamente las mismas del ejemplo anterior. Entonces se introducen las variables de holgura y se cambia el signo a la primera y la segunda restricción para obtener la matriz identidad.

$$\hat{A}^0 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ -5 & -2 & 0 & 1 & -12 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora hay que calcular los costos reducidos. En este caso los costos son exactamente los costos reducidos ya que su valor es nulo para las variables básicas. En esta tabla hay un costo reducido negativo, entonces no se puede utilizar el MSD. $\diamond$

15.2. Conjunto no factible

Ejemplo 15.3. Resolver por el método simplex dual el siguiente problema:

$$\min \ z = 2x_1 + \ x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 + \ x_2 &\leq \ 1 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Al introducir las variables de holgura se tiene:

$$\min \ z = 2x_1 + \ x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad &= \ 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 12 \\ x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= \ 1 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Aquí no se tiene la matriz identidad, pero si se multiplican la primera y la segunda igualdad por -1, entonces sí se logra la matriz identidad con la tercera, la cuarta y la quinta columna.

$$\hat{A}^0 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrr} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ \boxed{-5} & -2 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

La última fila ya tiene los costos reducidos, y es claro que se puede utilizar el MSD.

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_2},$$
$$x_s = x_4.$$
$$\frac{2}{-5} = -0.4, \quad \frac{1}{-2} = -0.5,$$
$$x_e = x_1.$$

Ahora hay que modificar la tabla usando como pivote $a_{21} = -5$.

$$\hat{A}^2 = \begin{array}{c} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrr} 0 & \boxed{-1.6} & 1 & -0.2 & 0 & -1.6 \\ 1 & 0.4 & 0 & -0.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.2 & 1 & -1.4 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.4 & 0 & -4.8 \end{array} \right].$$

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_1},$$
$$x_s = x_3,$$
$$x_e = x_2.$$

Ahora hay que modificar la tabla usando como pivote $a_{12} = -1.6$.

$$\hat{A}^3 = \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrr} 0 & 1 & -0.625 & 0.125 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0.375 & 0.125 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.375 & 0 & -5 \end{array} \right].$$

$$x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_3},$$
$$x_s = x_5.$$

En la fila de la variable que sale no hay coeficientes negativos (para variables libres), esto quiere decir que el problema no tiene solución. $\diamond$

EJERCICIOS

En los ejercicios 15.1 a 15.6, convierta el problema propuesto a la forma estándar. Si es posible, utilice el MSD para su solución.

15.1. Minimizar $z = 7x_1 - 8x_2$ con las restricciones $x_1 + 4x_2 \geq 1$, $2x_1 + 5x_2 \geq 2$, $3x_1 + x_2 \leq -3$, $3x_1 + 6x_2 \geq 2$, $x \geq 0$.

15.2. Minimizar $z = x_1 + 1.4x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 400$, $x_1 + 2x_2 \leq 580$, $x_1 \leq 300$, $2x_1 + x_2 \geq 350$, $x \geq 0$.

15.3. Minimizar $z = 25x_1 + 15x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \geq 10$, $4x_1 + 3x_2 \geq 34$, $2x_1 + x_2 \geq 12$, $x_2 \geq 3$, $x \geq 0$.

15.4. Minimizar $z = 16x_1 + 15x_2$ con las restricciones $x_1 + 2x_2 \geq 16$, $2x_1 + x_2 \geq 14$, $3x_1 + x_2 \geq 17$, $x \geq 0$.

15.5. Minimizar $z = 7x_1 + 8x_2$ con las restricciones $x_1 + 4x_2 \geq 1$, $2x_1 + 5x_2 \geq 2$, $3x_1 + x_2 \leq -3$, $3x_1 + 6x_2 \geq 2$, $x \geq 0$.

15.6. Minimizar $z = x_1 + 1.4x_2$ con las restricciones $x_1 + x_2 \leq 400$, $x_1 + 2x_2 \leq 580$, $x_1 \leq 300$, $2x_1 + x_2 \geq 750$, $x \geq 0$.

Capítulo 16

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

16.1. Planteamiento

Dados m orígenes o fábricas $F_1, F_2, ..., F_m$ y n destinos o centros de distribución $D_1, D_2, ..., D_n$, se requiere satisfacer las demandas en los destinos, respetando las disponibilidades en los orígenes de tal forma que el costo de transporte sea mínimo. El problema del transporte se puede plantear de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\min\ z &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq f_i, \quad i = 1, ..., m \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= d_j, \quad j = 1, ..., n \\
x_{ij} &\geq 0, \quad \text{para todo } i, j,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x_{ij} = &\quad \text{número de unidades que hay que llevar desde } F_i \text{ hasta } D_j, \\ c_{ij} = &\quad \text{costo de llevar una unidad desde } F_i \text{ hasta } D_j, \\ f_i = &\quad \text{oferta o capacidad de la fábrica } F_i, \\ d_j = &\quad \text{demanda del destino } D_j. \end{aligned}$$

Este problema es claramente de optimización lineal y, por lo tanto, se puede resolver por el método simplex o por cualquier otro método general de optimización lineal. Sin embargo, este problema tiene características muy especiales, que hacen conveniente adecuar el método simplex a estas características especiales, para hacerlo más rápido y eficiente.

Supondremos, además, que el problema del transporte está planteado de una manera ligeramente diferente, y con una condición adicional: la suma de ofertas debe ser igual a la suma de demandas. Esto hace que las restricciones de oferta se conviertan en igualdades:

$$\begin{aligned} \min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i, &\qquad i = 1, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, &\qquad j = 1, ..., n \\ x_{ij} \geq 0, &\qquad \text{para todo } i, j, \end{aligned}$$

bajo la condición

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Se puede demostrar que, planteado de esta forma, cualquier problema de transporte tiene solución.

Como se verá más adelante, la restricción no es fuerte pues, cuando la oferta es mayor que la demanda, basta con crear un destino adicional ficticio que reciba la oferta adicional. Cuando la oferta total es menor que la demanda, entonces el problema no tiene solución. Sin embargo, en este caso, se puede pensar en buscar una seudosolución que tenga costo mínimo.

En un ejemplo veamos algunas de las características especiales del problema del transporte.

Ejemplo 16.1. 3 orígenes; 4 destinos; ofertas f_i: 10, 20, 30; demandas d_j: 13, 14, 15, 18; tabla de costos unitarios:

	D_1	D_2	D_3	D_4
F_1	5	9	4	1
F_2	3	5	0	8
F_3	4	2	6	7

Utilizando el orden x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, ..., la matriz de restricciones de este problema (con una columna adicional para los términos independientes) es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Las características especiales son las siguientes:

- La matriz de coeficientes está compuesta únicamente de ceros y de unos.
- Cada columna de la matriz tiene exactamente dos unos (los demás coeficientes valen cero).
- Hay $m \times n = 3 \times 4 = 12$ variables.
- Hay $m + n = 3 + 4 = 7$ restricciones.
- Hay únicamente $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ restricciones linealmente independientes. Al sumar las tres restricciones de oferta (incluyendo los términos independientes) y restar las tres primeras restricciones de demanda, se obtiene exactamente la última restricción de demanda.

Esto quiere decir que, por ejemplo, la última restricción de demanda se podría suprimir. $\diamond$

Definición 16.1. Un conjunto de valores x_{ij} se llama una **solución factible** si cumple todas las restricciones. Una solución factible se llama **básica** si tiene a lo más $m+n-1$ variables positivas. Una solución factible básica se llama **no degenerada** si tiene exactamente $m+n-1$ variables positivas. Una solución factible básica se llama **degenerada** si tiene menos de $m+n-1$ variables positivas.

Para la solución del problema del transporte se acostumbra a usar una tabla compuesta por $m \times n$ casillas, distribuidas en m filas y n columnas. Cada origen tiene una fila, cada destino tiene una columna. En la casilla (i, j), situada en la fila i y en la columna j, se escribe el valor de la variable x_{ij} y además, ocupando un espacio pequeño, el costo c_{ij}.

Ejemplo 16.2. Consideremos los mismos datos del ejemplo anterior.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 12	$\boxed{8}$ 8	20
F_3	$\boxed{4}$ 13	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{7}$ 0	30
	13	14	15	18	

La anterior solución es una solución factible básica no degenerada, ya que cumple todas las restricciones y tiene exactamente $3 + 4 - 1 = 6$ variables no nulas.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{1}$ 9	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 11	$\boxed{8}$ 9	20
F_3	$\boxed{4}$ 13	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{7}$ 0	30
	13	14	15	18	

La anterior solución factible tiene 7 variables positivas, luego no es básica.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{1}$ 9	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 11	$\boxed{8}$ 9	20
F_3	$\boxed{4}$ 13	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{7}$ 0	30
	13	14	15	18	

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ -1	$\boxed{1}$ 11	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 13	$\boxed{8}$ 7	20
F_3	$\boxed{4}$ 13	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{7}$ 0	30
	13	14	15	18	

Las dos soluciones anteriores no son realizables. $\diamond$

Ejemplo 16.3. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1 , salvo que las demandas son: 10, 10, 10, 30 .

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 30	30
	10	10	10	30	

La anterior solución es factible y, además, es básica ya que tiene 4 variables positivas, pero es degenerada. $\diamond$

16.2. Algoritmo del transporte

El esquema general del algoritmo del transporte es exactamente el mismo del método simplex, al fin y al cabo es sencillamente el método simplex adaptado al problema del transporte; las diferencias están en algunos de los pasos.

· verificar que la oferta total es igual a la demanda total
· hallar una solución básica factible
· calcular los costos reducidos
mientras la solución no es óptima
  · escoger la variable que entra
  · buscar la variable que sale
  · modificar la tabla
  · calcular los costos reducidos
fin-mientras

Más adelante se verá como tratar el caso de las soluciones básicas degeneradas, por el momento se supondrá que **no se presentan soluciones básicas degeneradas**.

El algoritmo del transporte es uno solo, sin embargo, hallar la solución básica inicial y calcular los costos reducidos se puede hacer de varias formas. Inicialmente veremos métodos muy sencillos, aunque no necesariamente los más eficientes. Estos métodos son: el de la esquina noroccidental para obtener una solución básica inicial, y el método "stepping-stone"(método paso a paso o método del circuito), para calcular los costos reducidos.

16.3. Método de la esquina noroccidental

Este método permite hallar una solución factible básica. Como su nombre lo indica, escoge siempre la casilla disponible que esté más arriba y más a la izquierda. El esquema del algoritmo es el siguiente:

· todas las casillas están disponibles (no tienen asignado valor)
· las ofertas y demandas disponibles son las iniciales
mientras haya casillas disponibles
  · buscar la casilla noroccidental disponible
  · asignarle la mayor cantidad posible
  · en la línea saturada, para las demás casillas disponibles: $x_{ij} = 0$
  · actualizar la oferta disponible en la fila de la casilla N.O.
  · actualizar la demanda disponible en la columna de la casilla N.O.
fin-mientras

En este contexto del problema del transporte, línea significa fila o columna. Actualizar la oferta quiere decir: restar de la oferta disponible el valor asignado a la última casilla noroccidental. De manera análoga se actualiza la demanda disponible. Cuando se asigna la mayor cantidad posible a la casilla noroccidental, se satura una línea, es decir, una fila o una columna. En algunos casos, cuando hay degeneramiento, en una casilla anterior a la última, se saturan al tiempo la fila y la columna. Este caso se estudiará en el capítulo siguiente.

Ejemplo 16.4. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	13	14	15	18	

En este momento la casilla noroccidental es la casilla $(1, 1)$. La máxima cantidad que se puede asignar es 10. Esto hace que se sature la primera fila, la cual queda sin oferta disponible. La primera columna queda con una demanda disponible de 3 unidades.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	0
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	3	14	15	18	

Ahora la casilla noroccidental es la casilla $(2,1)$. La máxima cantidad que se puede asignar es 3. Esto hace que se sature la primera columna. La primera columna queda sin demanda disponible y la segunda fila tendrá una oferta disponible de 17 unidades.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	0
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	17
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	0	14	15	18	

En este momento la casilla noroccidental es la casilla $(2,2)$. La máxima cantidad que se puede asignar es 14. Esto hace que se sature la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	0
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	3
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	0	0	15	18	

Ahora la casilla noroccidental es la casilla $(2, 3)$. La máxima cantidad que se puede asignar es 3. Esto hace que se sature la segunda fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	0
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	0
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	0	0	12	18	

En este momento la casilla noroccidental es la casilla $(3, 3)$. La máxima cantidad que se puede asignar es 12. Esto hace que se sature la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	0
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	0
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{7}$	18
	0	0	0	18	

Ahora la casilla noroccidental es la casilla $(3, 4)$. La máxima cantidad que se puede asignar es 18. Esto hace que se sature la tercera fila y la cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	0
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	0
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{7}$ 18	0
	0	0	0	0	

Finalizado el proceso se obtiene una solución factible, y en este caso, además no degenerada.

$$z = (5 \times 10) + (9 \times 0) + ... + (3 \times 3) + ... + (7 \times 18) = 327. \ \diamond$$

Definición 16.2. En una solución factible básica no degenerada las variables positivas se llaman variables básicas y las variables nulas se llaman variables libres. En una solución factible básica degenerada las variables positivas se llaman variables básicas, algunas variables nulas, escogidas de manera adecuada, también se llaman básicas. Las demás variables nulas se llaman variables libres.

16.4. Método del circuito (stepping-stone)

Este método sirve para calcular los costos reducidos de las variables libres. Si x_{ij} es una variable libre, entonces su costo reducido $\tilde{c}_{ij}$ indica la modificación que tendrá la función objetivo por cada unidad que aumente esta variable libre. Como en el método simplex, en cada iteración, una y solamente una variable libre entra a la base, y también, exactamente una variable básica sale de la base.

Si la variable libre x_{ij} con valor nulo, se incrementara en una unidad, entonces sería necesario reequilibrar la tabla, aumentando y disminuyendo el valor de algunas variables, para que se siga teniendo una solución realizable. Estas modificaciones únicamente son posibles en las variables básicas, ya que una sola variable libre puede aumentar para volverse básica y, además, las variables libres no pueden disminuir pues se volverían negativas.

Entonces dada la variable libre x_{ij}, que aumentaría en una unidad, es necesario buscar casillas correspondientes a variables básicas, en algunas de ellas se necesita aumentar una unidad, en otras se necesita disminuir una unidad, de tal manera que:

> en cada línea, fila o columna:
> o bien, no hay ninguna modificación,
> o bien, hay dos modificaciones,
> una de aumento y otra de disminución.

Las modificaciones se pueden simbolizar por un signo más (+) para los aumentos, y un signo menos (−) para las disminuciones.

Se puede demostrar que en una solución factible básica no degenerada, para cada variable libre x_{ij}, hay exactamente un camino o circuito, formado por la casilla de x_{ij} y las casillas de algunas variables básicas, de tal manera que este circuito rebalancea la tabla.

Una vez conseguido este circuito, el costo reducido $\tilde{c}_{ij}$ se calcula naturalmente como la suma de los costos de las casillas del circuito, donde se tiene en cuenta el signo de cada casilla. Es decir se suman los costos de las casillas con signo más $(+)$, y se restan los costos de las casillas con signo menos $(-)$.

Ejemplo 16.5. Tomemos los mismos datos del ejemplo 16.1 y la solución básica inicial obtenida en el ejemplo 16.4 .

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{7}$ 18	30
	13	14	15	18	

Cálculo del costo reducido $\tilde{c}_{12}$: Si la variable libre x_{12} aumenta, y como la única variable básica en la primera fila es x_{11}, necesariamente x_{11} debe disminuir. Como x_{11} está en la primera columna, entonces otra variable básica de la primera columna debe aumentar. Para este ejemplo necesariamente x_{21} debe aumentar. Ahora, considerando la segunda fila, como x_{21} aumenta, otra variable básica debe disminuir. La única posibilidad corresponde a x_{22}.

Así ya se ha completado el circuito con las casillas (1,2), (1,1), (2,1), (2,2).

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}-$ 10	$\boxed{9}+$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}+$ 3	$\boxed{5}-$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{7}$ 18	30
	13	14	15	18	

El cálculo del costo reducido $\tilde{c}_{12}$ es ahora inmediato:

$$\tilde{c}_{12} = 9 - 5 + 3 - 5 = 2.$$

Cálculo del costo reducido $\tilde{c}_{13}$: Si la variable libre x_{13} aumenta, debe disminuir x_{11}, entonces debe aumentar x_{21}. Aquí hay dos posibilidades: puede disminuir x_{22} o puede disminuir x_{23}. Si disminuye x_{22} debe aumentar otra variable básica en la misma segunda columna, pero no hay más variables básicas. Luego es necesario desechar esta posibilidad. Si disminuye x_{23} ya se completa el circuito (1,3), (1,1), (2,1), (2,3).

$$\tilde{c}_{13} = 4 - 5 + 3 - 0 = 2.$$

Es conveniente anotar que no siempre los circuitos se obtienen fácilmente, ni tampoco tienen siempre cuatro casillas.

Circuito para $\tilde{c}_{14}$: (1,4), (1,1), (2,1), (2,3), (3,3), (3,4).

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}-$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}+$ 0	10
F_2	$\boxed{3}+$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}-$ 3	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}+$ 12	$\boxed{7}-$ 18	30
	13	14	15	18	

$$\tilde{c}_{14} = 1 - 5 + 3 - 0 + 6 - 7 = -2$$

De manera semejante:

$$x_{24} : (2,4), (2,3), (3,3), (3,4); \tilde{c}_{24} = 8 - 0 + 6 - 7 = 7,$$
$$x_{31} : (3,1), (3,3), (2,3), (2,1); \tilde{c}_{31} = 4 - 6 + 0 - 3 = -5,$$
$$x_{32} : (3,2), (3,3), (2,3), (2,2); \tilde{c}_{32} = 2 - 6 + 0 - 5 = -9. \ \diamond$$

Los circuitos pueden ser descritos mediante las siguientes características:

- la primera casilla corresponde a una variable libre, las demás corresponden a variables básicas.
- todo circuito tiene un número par de casillas.
- toda casilla en posición impar, está en la misma fila de la siguiente casilla (tienen el mismo primer índice).
- toda casilla en posición par, está en la misma columna de la siguiente casilla (tienen el mismo segundo índice).
- la última casilla está en la misma columna de la casilla inicial.
- las casillas “de aumento”son las de posición impar y las casillas “de disminución”son las de posición par.

Estas características están basadas en la búsqueda inicial de una variable básica en la misma fila de la variable libre. Unas características análogas se pueden obtener, al buscar inicialmente una variable básica en la misma columna de la variable libre.

16.5. Condiciones de optimalidad y modificación de la tabla

16.5.1. Condiciones de optimalidad

Son exactamente las mismas del método simplex: **si todos los costos reducidos de las variables libres de una solución factible básica son no negativos, entonces ésta es óptima.**

16.5.2. Escogencia de la variable que entra

La variable libre que entra, se escoge exactamente como en el método simplex: **la variable libre que entra es aquella de menor costo reducido (el más negativo)**.

16.5.3. Escogencia de la variable que sale

Una vez escogida la variable libre que entra, se busca en su circuito, **el menor valor x_{ij} en las casillas con signo menos (casillas donde se disminuye)**. Esta casilla corresponde a la variable básica que sale. Además, ese mínimo valor corresponde al incremento que va a tener la variable que entra.

16.5.4. Modificación de la tabla

Una vez escogida la variable que entra y obtenido el valor de su incremento, se modifican únicamente las casillas de su circuito así: En las casillas con signo $+$, se efectúa dicho incremento y en las casillas con signo $-$, se disminuye tal cantidad. De esta manera la nueva tabla queda equilibrada y representa una solución factible básica mejor; esta mejoría está dada por el producto del costo reducido de la variable que entra y su incremento. En la nueva tabla la variable básica que salió, tiene el valor cero.

Ejemplo 16.6. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1, la solución básica inicial obtenida en el ejemplo 16.4 y los costos reducidos calculados en el ejemplo 16.5.

Como hay costos reducidos negativos la tabla no es óptima.

Hay una sola variable libre con costo reducido mínimo: x_{32}. Ésta es la variable que entra. Si hubiera empate habría que resolverlo de cualquier forma, por ejemplo, tomando como variable que entra la primera encontrada entre las empatadas.

El circuito de esta variable es: (3,2), (3,3), (2,3), (2,2). En las casillas de disminución (las de posición par), el menor valor x_{ij} es 12 y está en la casilla $(3,3)$. Entonces la variable x_{33} sale de la base. La variable libre y las variables de su circuito son modificadas en 12 unidades. Las demás casillas no alteran su valor. El valor de la función objetivo debe modificarse (disminuir) en $-9 \times 12 = -108$ unidades.

Para obtener la nueva tabla, basta aumentar 12 unidades en las casillas $(3,2)$, $(2,3)$ y disminuir 12 unidades en las casillas $(3,3)$, $(2,2)$.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 12	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 18	30
	13	14	15	18	

Obviamente, esta solución también es factible, es básica y en este caso también es no degenerada. El valor de la función objetivo es $z = 5 \times 10 + 3 \times 3 + ... + 7 \times 18 = 219 = 327 - 108$.

Para obtener una solución óptima del problema hay que calcular de nuevo los costos reducidos, averiguar por las condiciones de optimalidad,..., etc.

$$\tilde{c}_{12} = 2, \quad \tilde{c}_{13} = 2, \quad \tilde{c}_{14} = -11, \quad \tilde{c}_{24} = -2, \quad \tilde{c}_{31} = 4, \quad \tilde{c}_{33} = 9.$$

La solución factible básica actual no es óptima.

$$\begin{array}{rl} \text{costo reducido mínimo} & : \tilde{c}_{14} = -11, \\ \text{variable que entra} & : x_{14}, \\ \text{circuito de } x_{14} : & (1,4), (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4), \\ \text{valor máximo para } x_{14} & : 2, \\ \text{variable que sale} & : x_{22}. \end{array}$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 8	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 2	10
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 16	30
	13	14	15	18	

$$z = 197,$$

$$\tilde{c}_{12} = 13, \quad \tilde{c}_{13} = 2, \quad \tilde{c}_{22} = 11, \quad \tilde{c}_{24} = 9, \quad \tilde{c}_{31} = -7, \quad \tilde{c}_{33} = -2.$$

La solución factible básica actual no es óptima.

$$\begin{array}{rl} \text{Costo reducido mínimo} & : \tilde{c}_{31} = -7, \\ \text{variable que entra} & : x_{31}, \\ \text{circuito de } x_{31} : & (3,1), (3,4), (1,4), (1,1) , \\ \text{valor máximo para } x_{31} & : 8, \\ \text{variable que sale} & : x_{11}. \end{array}$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 8	30
	13	14	15	18	

$$z = 141,$$
$$\tilde{c}_{11} = 7, \quad \tilde{c}_{12} = 13, \quad \tilde{c}_{13} = 9, \quad \tilde{c}_{22} = 4, \quad \tilde{c}_{24} = 2, \quad \tilde{c}_{33} = 5.$$

Como no hay costos reducidos negativos, la tabla es óptima. Como todos los costos reducidos son positivos la solución es única. $\diamond$

Ejemplo 16.7. Consideremos el siguiente problema de transporte con las mismas ofertas y demandas del ejemplo anterior, pero con costos ligeramente diferentes. Como el método de la esquina noroccidental no tiene en cuenta los costos (he ahí su desventaja), entonces la solución básica factible inicial es la misma. Obviamente, el valor de z es diferente.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{4}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{7}$ 18	30
	13	14	15	18	

$$z = 330.$$

Después de iteraciones semejantes a las del ejemplo anterior, se llega a la tabla óptima.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{3}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 8	30
	13	14	15	18	

$$z = 138,$$

$$\tilde{c}_{11} = 8, \quad \tilde{c}_{12} = 13, \quad \tilde{c}_{13} = 11, \quad \tilde{c}_{22} = 2, \quad \tilde{c}_{24} = 0, \quad \tilde{c}_{33} = 7.$$

Como no hay costos reducidos negativos, la tabla es óptima.

Aquí hay una diferencia importante. En el óptimo hay una variable libre con costo reducido nulo: x_{24} (podría haber más de una). Como la solución factible básica no es degenerada se puede afirmar que hay muchas soluciones. Para obtener otra solución factible básica, de manera semejante al método simplex, se entra a la base la variable libre con costo reducido nulo, y se construye otra tabla.

$$\begin{aligned}
\text{Variable que entra } &: x_{24}, \\
\text{circuito de } x_{24} &: \ (2,4), (2,1), (3,1), (3,4) \ , \\
\text{valor máximo para } x_{24} &: 5, \\
\text{variable que sale} &: x_{21}.
\end{aligned}$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 5	20
F_3	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 3	30
	13	14	15	18	

$$z = 138$$

$$\tilde{c}_{11} = 8, \quad \tilde{c}_{12} = 13, \quad \tilde{c}_{13} = 11, \quad \tilde{c}_{21} = 0, \quad \tilde{c}_{22} = 2, \quad \tilde{c}_{33} = 7.$$

Como era de esperarse, no hay costos reducidos negativos y la tabla es óptima.

Aquí de nuevo, hay una variable libre con costo reducido nulo: x_{21}. Para obtener otra solución factible básica, se entra a la base x_{21} y se construye otra tabla.

$$\begin{aligned}
\text{variable que entra } &: x_{21}, \\
\text{circuito de } x_{21} &: \ (2,1), (2,4), (3,4), (3,1) \ , \\
\text{valor máximo para } x_{21} &: 5, \\
\text{variable que sale} &: x_{24}.
\end{aligned}$$

Vuelve a resultar la primera tabla óptima. En este ejemplo muy sencillo, en la primera tabla óptima, hubo únicamente una sola variable libre con costo reducido nulo, luego no había otras posibilidades para escoger. En este problema hay solamente dos soluciones básicas realizables óptimas, y así toda solución realizable óptima es combinación convexa de ellas. $\diamond$

Cuando en el óptimo hay varias variables libres con costo reducido nulo, no es sencillo encontrar todas las soluciones básicas realizables óptimas. En la práctica, bastaría con encontrar dos soluciones básicas realizables óptimas, escogiendo una de las variables libres con costo reducido nulo para entrarla a la base construyendo una nueva tabla.

EJERCICIOS

16.1. Resuelva el problema de transporte dado por los siguientes datos: 3 orígenes; 4 destinos; ofertas 10, 11, 12; demandas 7, 8, 9, 9; matriz de costos unitarios

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

16.2. Resuelva el problema de transporte dado por los siguientes datos: 5 orígenes; 5 destinos; ofertas 10, 11, 12, 13, 14; demandas 9, 9, 9, 9, 24; matriz de costos unitarios

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 7 & 7 & 6 \\ 10 & 8 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 7 & 5 & 2 \\ 10 & 9 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

16.3. Resuelva el problema de transporte dado por los siguientes datos: 5 orígenes; 5 destinos; ofertas 10, 50, 20, 40, 30; demandas 27, 35, 31, 28, 29; matriz de costos unitarios

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 9 \\ 8 & 8 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 17

OTROS MÉTODOS PARA EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

17.1. Método de las variables duales

Este método sirve para calcular los costos reducidos sin tener que calcular el circuito de cada variable. Como su nombre lo indica utiliza las variables de su problema dual. En realidad se utilizan las variables del dual de un problema equivalente. El problema planteado inicialmente es el mismo:

$$\begin{aligned} \min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i, \quad i = 1, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, ..., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad \text{para todo } i, j, \end{aligned}$$

bajo la condición

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Se puede mostrar que la solución óptima del problema anterior es la misma del siguiente problema:

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq f_i, \quad i = 1, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, ..., n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{para todo } i, j.$$

Este problema está en la forma canónica de minimización y su dual se obtiene fácilmente. Sea u_i la variable del problema dual correspondiente a la i-ésima restricción de oferta. Sea v_j la variable del problema dual correspondiente a la j-ésima restricción de demanda. Entonces el problema dual, en la forma canónica de maximización es:

$$\max\ w = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, ...m, \quad j = 1, ...n$$

$$u_i, v_j \geq 0, \quad \text{para todo } i, j.$$

Resultados de dualidad, análogos a los de la proposición 14.10, dicen que el costo reducido de una variable del primal es igual al valor de la variable de holgura correspondiente en el dual. La restricción del dual correspondiente a la variable x_{ij} es:$u_i + v_j \leq c_{ij}$. Entonces:

$$\tilde{c}_{ij} = \text{holgura} = c_{ij} - u_i - v_j.$$

Obviamente, para las variables básicas, el costo reducido es nulo. Plantear este resultado da lugar a $m + n - 1$ igualdades con $m + n$ incógnitas. Si se obtiene una solución de este sistema se puede calcular fácilmente el valor de los costos reducidos de las variables libres. Entonces el esquema del proceso para el cálculo de los costos reducidos de las variables libres es el siguiente.

- Para las variables básicas plantear las $m+n-1$ igualdades con $m+n$ variables:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

- Dar a una variable (cualquiera) un valor arbitrario y resolver el sistema resultante:

$$m + n - 1 \text{ igualdades con } m + n - 1 \text{ variables.}$$

- Calcular los costos reducidos de las variables libres mediante la fórmula

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - ui - v_j.$$

Se puede demostrar que no importa cual variable se escoja para darle un valor, ni tampoco que valor se le dé. De todas formas el valor de los costos reducidos para las variables libres será el mismo. Obviamente, el valor de u_i, v_j sí depende de tal escogencia. Además, el sistema de $m+n-1$ igualdades y variables siempre se puede resolver de manera única cuando se trata de una solución factible básica no degenerada o de una solución factible básica degenerada tratada adecuadamente.

Si los costos reducidos de las variables libres se calculan por el método de las variables duales, una vez que se escoge la variable que entra a la base, hay que buscarle de todas maneras su circuito.

Este método, para calcular los costos reducidos de las variables libres, es más rápido y fácil que el método stepping-stone, salvo para problemas muy pequeños.

Ejemplo 17.1. Consideremos la solución factible básica inicial obtenida en el ejemplo 16.4

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{7}$ 18	30
	13	14	15	18	

$$z = 327.$$

Las $m+n-1$ igualdades con $m+n$ variables son:

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 5,\\
u_2 + v_1 &= 3,\\
u_2 + v_2 &= 5,\\
u_2 + v_3 &= 0,\\
u_3 + v_3 &= 6,\\
u_3 + v_4 &= 7.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, demos a la variable u_2 el valor cero. Entonces

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 5, \quad v_3 = 0,$$

luego

$$u_1 = 2, \quad u_3 = 6, \quad v_4 = 1.$$

En resumen

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2, & v_1 &= 3,\\
u_2 &= 0, & v_2 &= 5,\\
u_3 &= 6, & v_3 &= 0,\\
& & v_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Ahora sí se tienen de manera inmediata los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{12} &= 9 - 2 - 5 = 2,\\
\tilde{c}_{13} &= 4 - 2 - 0 = 2,\\
\tilde{c}_{14} &= 1 - 2 - 1 = -2,\\
\tilde{c}_{24} &= 8 - 0 - 1 = 7,\\
\tilde{c}_{31} &= 4 - 6 - 3 = -5,\\
\tilde{c}_{32} &= 2 - 6 - 5 = -9.
\end{aligned}$$

Se escoge como variable que entra a la base a x_{32}, hay que obtener su circuito y proseguir el método del transporte.

A manera de simple comprobación, se puede escoger otra variable y otro valor, por ejemplo, $v_3 = -3$. Al resolver el sistema se tienen valores diferentes:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 5, & v_1 &= 0,\\
u_2 &= 3, & v_2 &= 2,\\
u_3 &= 9, & v_3 &= -3,\\
& & v_4 &= -2.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, como era de esperarse, los valores de los costos reducidos son exactamente los mismos.

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_{12} &= 9-5-2 &&= 2,\\
\tilde{c}_{13} &= 4-5--3 &&= 2,\\
\tilde{c}_{14} &= 1-5--2 &&= -2,\\
\tilde{c}_{24} &= 8-3--2 &&= 7,\\
\tilde{c}_{31} &= 4-9-0 &&= -5,\\
\tilde{c}_{32} &= 2-9-2 &&= -9. \qquad \diamond
\end{aligned}
$$

En el método de la esquina noroccidental, para hallar la solución factible básica inicial no se tienen en cuenta de ninguna manera los costos unitarios. En los métodos presentados a continuación, al construir la solución factible básica inicial se utilizan los costos unitarios para tratar de que la solución obtenida sea más próxima al óptimo, es decir, se desea disminuir el número de iteraciones. Aunque el cálculo de la solución factible básica inicial es más dispendioso, el tiempo total para la solución del problema es, en promedio, menor que el tiempo requerido para la obtención de una solución óptima, partiendo de una solución inicial por el método de la esquina noroccidental.

17.2. Método del costo mínimo por filas

Con mucha frecuencia, los métodos trabajan indistintamente sobre filas o sobre columnas. En lo que sigue de este libro se usará la palabra **línea para hacer referencia a una fila o a una columna**.

El método del costo mínimo por filas sirve para hallar una solución factible básica inicial. Su algoritmo es el siguiente:

· todas las casillas están disponibles
· las ofertas y demandas disponibles son las iniciales
· todas las líneas están no saturadas
mientras haya casillas disponibles
    · en la primera fila no saturada buscar
      la casilla disponible de costo mínimo
    · asignar a esta casilla la mayor cantidad posible:
        - saturar una línea: una fila o una columna
        - en esta línea, para las otras casillas disponibles: $x_{ij} = 0$
        - actualizar la oferta y la demanda disponibles
fin-mientras

Ejemplo 17.2. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	5	9	4	1	10
F_2	3	5	0	8	20
F_3	4	2	6	7	30
	13	14	15	18	

La primera fila no saturada es la correspondiente a F1 . Allí la casilla de costo mínimo es la casilla (1,4). La mayor cantidad que se puede asignar es: 10. Así se satura la fila 1.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	13	14	15	8	

La primera fila no saturada es la segunda fila. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,3). La mayor cantidad que se puede asignar es 15 y así se satura la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$	5
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	30
	13	14		8	

La primera fila no saturada sigue siendo la segunda. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,1). La mayor cantidad que se puede asignar es 5 y así se satura la segunda fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	30
	8	14		8	

La primera fila no saturada es la tercera. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (3,2). La mayor cantidad que se puede asignar es 14 y así se satura la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16
	8			8	

La primera fila no saturada sigue siendo la tercera. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (3,1). La mayor cantidad que se puede asignar es 8 y así se satura la primera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	8

8

La primera fila no saturada sigue siendo la tercera. Allí la casilla disponible de costo mínimo (la última) es la casilla (3,4). La mayor cantidad que se puede asignar es 8 y así se saturan la tercera fila y la cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 8	30
	13	14	15	18	

Aquí ya no hay casillas disponibles y se ha obtenido una solución factible básica inicial. Su costo es $z = 141$. Si se calculan los costos reducidos (o si se compara con la solución óptima obtenida en el ejemplo 16.6) se puede afirmar que la solución obtenida es óptima.

El hecho de encontrar por este método una solución básica factible y, al mismo tiempo, óptima, es simplemente casual. Los métodos conocidos para hallar soluciones básicas factibles iniciales, no garantizan la obtención de una solución óptima. Simplemente algunos métodos aumentan la posibilidad de que la tabla obtenida esté más cerca de la tabla óptima. $\diamond$

Si la solución factible básica obtenida no es óptima, se continúa el proceso con la escogencia de la variable que entra, escogencia de la variable que sale, modificación de la tabla...

17.3. Método del costo mínimo por columnas

Este método sirve para hallar una solución factible básica inicial. Es muy semejante al método del costo mínimo por filas. La única diferencia consiste en que siempre se busca la casilla disponible de costo mínimo en la primera columna no saturada.

Ejemplo 17.3. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	13	14	15	18	

La primera columna no saturada es la primera. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,1). La máxima cantidad que se puede asignar es 13. Así se satura la primera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	7
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
		14	15	18	

La primera columna no saturada es la segunda. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (3,2). La máxima cantidad que se puede asignar es 14. Así se satura la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	7
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	16
			15	18	

La primera columna no saturada es la tercera. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,3). La máxima cantidad que se puede asignar es 7. Así se satura la segunda fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 7	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	16

8 18

La primera columna no saturada es nuevamente la tercera. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (1,3). La máxima cantidad que se puede asignar es 8. Así se satura la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{1}$	2
F_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 7	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16

18

La primera columna no saturada es la cuarta. Allí la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (1,4). La máxima cantidad que se puede asignar es 2. Así se satura la primera fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{1}$ 2	
F_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 7	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16

16

La primera columna no saturada es nuevamente la cuarta. Allí la casilla disponible de costo mínimo (la última casilla) es la casilla (3,4). La máxima cantidad que se puede asignar es 16. Así se saturan la tercera fila y la cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{1}$ 2	10
F_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 7	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 16	30
	13	14	15	18	

Aquí ya no hay casillas disponibles y se ha obtenido una solución factible básica inicial. Su costo es $z = 213$. Si se calculan los costos reducidos se puede ver que la solución obtenida no es óptima ($\tilde{c}_{11} = -2$, $\tilde{c}_{31} = -9$, $\tilde{c}_{33} = -4$), entonces se continúa el proceso con la escogencia de la variable que entra, escogencia de la variable que sale, modificación de la tabla... $\diamond$

17.4. Método del costo mínimo de la matriz

Este método sirve para hallar una solución factible básica inicial y es semejante a los dos métodos anteriores. La diferencia consiste en que acá se busca la casilla disponible de costo mínimo en toda la matriz. Su algoritmo es el siguiente:

· todas las casillas están disponibles
· las ofertas y demandas disponibles son las iniciales
· todas las líneas están no saturadas
mientras haya casillas disponibles
    · buscar, en toda la tabla, la casilla disponible de costo mínimo
    · asignar a esta casilla la mayor cantidad posible:
        - saturar una línea: una fila o una columna
        - en esta línea, para las otras casillas disponibles: $x_{ij} = 0$
        - actualizar la oferta y demanda disponibles
fin-mientras

Ejemplo 17.4. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	13	14	15	18	

La casilla disponible de costo mínimo, en la matriz, es la casilla (2,3). La máxima cantidad que se puede asignar es 15. Así se satura la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$	5
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	30
	13	14		18	

La casilla disponible de costo mínimo, en la matriz, es la casilla (1,4). La máxima cantidad que se puede asignar es 10. Así se satura la primera fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$	5
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	30
	13	14	8		

La casilla disponible de costo mínimo, en la matriz, es la casilla (3,2). La máxima cantidad que se puede asignar es 14. Así se satura la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$	5
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16
	13		8		

La casilla disponible de costo mínimo, en la matriz, es la casilla (2,1). La máxima cantidad que se puede asignar es 5. Así se satura la segunda fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16

8 8

La casilla disponible de costo mínimo, en la matriz, es la casilla (3,1). La máxima cantidad que se puede asignar es 8. Así se satura la primera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	8

8

La casilla disponible de costo mínimo (la última), en la matriz, es la casilla (3,4). La máxima cantidad que se puede asignar es 8. Así se saturan la tercera fila y cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 8	30
	13	14	15	18	

Aquí ya no hay casillas disponibles y se ha obtenido una solución factible básica inicial. Su costo es $z = 141$. Si se calculan los costos reducidos (o si se compara con la solución óptima obtenida en el ejemplo 16.6) se puede afirmar que la solución obtenida es óptima. $\diamond$

En la mayoría de los casos el método del costo mínimo de la matriz da una solución inicial mejor o semejante a la del método del costo mínimo por columnas o por filas.

17.5. Método de Vogel

Este método también sirve para hallar una solución factible básica inicial. Su algoritmo es el siguiente:

- todas las casillas están disponibles
- las ofertas y demandas disponibles son las iniciales
- todas las líneas están no saturadas

mientras haya casillas disponibles

  - en cada línea no saturada buscar la diferencia no negativa entre los dos costos más pequeños de casillas disponibles
  - asignar a esta casilla la mayor cantidad posible:
    - saturar una línea: una fila o una columna
    - en esta línea, para las otras casillas disponibles: $x_{ij} = 0$
    - actualizar la oferta y demanda disponibles

fin-mientras

Observación: Si en una línea hay una sola casilla disponible, se supone que el segundo valor más pequeño es muy grande, así la diferencia es muy grande.

Ejemplo 17.5. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	13	14	15	18	

Para la primera fila la diferencia es $4 - 1 = 3$. Para la segunda fila la diferencia es $3 - 0 = 3$. Para la tercera fila la diferencia vale $4 - 2 = 2$. Para la primera columna la diferencia es $4 - 3 = 1$, y así sucesivamente.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10	3
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20	3
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30	2
	13	14	15	18		
	1	3	4	6		

La cuarta columna tiene mayor diferencia: 6. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (1,4). Allí se puede asignar 10 y se satura la primera fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20	3
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30	2
	13	14	15	8		
	1	3	6	1		

La tercera columna tiene mayor diferencia: 6. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,3). Allí se puede asignar 15 y se satura la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$	5	2
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	30	2
	13	14		8		
	1	3		1		

La segunda columna tiene mayor diferencia: 3. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (3,2). Allí se puede asignar 14 y se satura la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$	5	5
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16	3
		13	8			
		1	1			

La segunda fila tiene mayor diferencia: 5. En esta fila la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,1). Allí se puede asignar 5 y se satura la segunda fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	16	3
		8	8			
		∞	∞			

Hay empate en el mayor valor (∞), entre la primera columna y la cuarta. Se puede escoger cualquiera de las dos. Supongamos que se toma la primera encontrada (según un cierto orden), es decir, la primera columna. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo (la única) es la casilla (3,1). Allí se puede asignar 8 y se satura la primera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$	8	∞

8

∞

No queda sino una casilla disponible, la (3,4). Allí se puede asignar 8 y se saturan al tiempo la tercera fila y la cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 8	30
	13	14	15	18	

Aquí ya no hay casillas disponibles y se ha obtenido una solución factible básica inicial. Su costo es $z = 141$. Si se calculan los costos reducidos (o si se compara con la solución óptima obtenida en el ejemplo 16.6) se puede afirmar que la solución obtenida es óptima. $\diamond$

17.6. Método de Russel

Este método también sirve para hallar una solución factible básica inicial. Su algoritmo es el siguiente:

· todas las casillas están disponibles
· las ofertas y demandas disponibles son las iniciales
· todas las líneas están no saturadas
mientras haya casillas disponibles
  · en cada fila no saturada calcular u'_i
  · en cada columna no saturada calcular v'_j
  · en cada casilla disponible calcular $c'_{ij} = c_{ij} - u'_i - v'_j$
  · buscar la casilla disponible de c'_{ij} mínimo
  · asignar a esta casilla la mayor cantidad posible
    - saturar una línea: una fila o una columna
    - en esta línea, para las otras casillas disponibles: $x_{ij} = 0$
    - actualizar la oferta y demanda disponibles
fin-mientras

El valor u'_i es el mayor costo de las casillas disponibles de la fila i. El valor v'_j es el mayor costo de las casillas disponibles de la columna j.

Ejemplo 17.6. Consideremos los mismos datos del ejemplo 16.1

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	20
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	30
	13	14	15	18	

En la primera fila, el costo máximo de las casillas disponibles es 9, entonces $u'_1 = 9$. De manera semejante $u'_2 = 8$, $u'_3 = 7$, $v'_1 = 5$, $v'_2 = 9$, $v'_3 = 6$, $v'_4 = 8$. Así $c'_{11} = 5 - 9 - 5 = -9$, $c'_{12} = 9 - 9 - 9 = -9$, ...

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ -9	$\boxed{9}$ -9	$\boxed{4}$ -11	$\boxed{1}$ -16	10	9
F_2	$\boxed{3}$ -10	$\boxed{5}$ -12	$\boxed{0}$ -14	$\boxed{8}$ -8	20	8
F_3	$\boxed{4}$ -8	$\boxed{2}$ -14	$\boxed{6}$ -7	$\boxed{7}$ -8	30	7
	13	14	15	18		
	5	9	6	8		

El mínimo de los valores c'_{ij} es -16 y está en la casilla (1,4). Allí se puede asignar 10 y se satura la primera fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ -9	$\boxed{5}$ -8	$\boxed{0}$ -14	$\boxed{8}$ -8	20	8
F_3	$\boxed{4}$ -7	$\boxed{2}$ -10	$\boxed{6}$ -7	$\boxed{7}$ -8	30	7
	13	14	15	8		
	4	5	6	8		

El mínimo de los valores c'_{ij} es -14 y está en la casilla (2,3). Allí se puede asignar 15 y se satura la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ -9	$\boxed{5}$ -8	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ -8	5	8
F_3	$\boxed{4}$ -7	$\boxed{2}$ -10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ -8	30	7
	13	14		8		
	4	5		8		

El mínimo de los valores c'_{ij} es -10 y está en la casilla (3,2). Allí se puede asignar 14 y se satura la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ -9	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ -8	5	8
F_3	$\boxed{4}$ -7	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ -8	16	7
	13			8		
	4			8		

El mínimo de los valores c'_{ij} es -9 y está en la casilla (2,1). Allí se puede asignar 5 y se satura la segunda fila.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$ -7	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ -7	16	7
		8	8			
		4	7			

El mínimo de los valores c'_{ij} es -7 y está en la casilla (3,1) o en la casilla (3,4). En la casilla (3,1) se puede asignar 8 y se satura la primera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ -7	8	7

8

7

El mínimo de los valores c'_{ij} es -7 y está en la casilla (3,4), que es la última casilla disponible. Allí se puede asignar 8 y se saturan la tercera fila y cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{2}$ 14	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 8	30
	13	14	15	18	

Aquí ya no hay casillas disponibles y se ha obtenido una solución factible básica inicial. Su costo es $z = 141$. Si se calculan los costos reducidos (o si se compara con la solución óptima obtenida en el ejemplo 16.6) se puede afirmar que la solución obtenida es óptima. $\diamond$

De los métodos anteriormente expuestos el más usado para problemas grandes es el de Vogel. Ninguno de estos métodos garantiza obtener una solución factible básica inicial óptima. Sin embargo, los métodos de Vogel y Russel son los que, en general, dan una solución inicial más cercana al óptimo.

Como en estos métodos hay que efectuar muchas búsquedas, en problemas grandes no es conveniente hacerlo sobre toda la matriz. De ahí que se utilice más el método de Vogel que el de Russel y que se prefiera el método del costo mínimo por filas (o por columnas) al método del costo mínimo de la matriz.

17.7. Soluciones básicas degeneradas

Las soluciones básicas degeneradas se pueden presentar por tres causas:

a) por modificación de otra solución básica degenerada,

b) en la obtención de una solución básica inicial, cuando al asignar la mayor cantidad posible a una casilla diferente de la última (la $m+n-1$), se copa al mismo tiempo el valor disponible en la fila (oferta) y el valor disponible en la columna (demanda),

c) en la modificación de una tabla, al escoger la variable que sale, el valor mínimo de las casillas de disminución se obtiene en dos o más casillas.

En cualquiera de estos casos, alguna (o algunas) variable nula debe ser considerada como variable básica de tal forma que haya $m + n - 1$ variables básicas. La escogencia de esta (o estas) variable tiene cierto grado de flexibilidad, pero tampoco es totalmente flexible. Es decir, hay pautas para escoger adecuadamente si una variable nula debe ser básica. Por facilidad visual las variables nulas básicas se indicarán por medio de la letra griega ϵ (épsilon).

Ejemplo 17.7. Consideremos la siguiente solución factible básica.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{8}$ 0	10
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{7}$ 10	20
	10	10	10	10	

Dos de las variables nulas deben considerarse como básicas, sin embargo, la siguiente escogencia no es adecuada.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{0}$ ϵ	$\boxed{8}$ 0	10
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ ϵ	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{7}$ 10	20
	10	10	10	10	

Al tratar de calcular el costo reducido de la variable libre x_{12} obteniendo su circuito, se observa que es imposible: Si aumenta x_{12}, entonces necesariamente tiene que disminuir x_{11} y otra variable básica de la primera columna debe aumentar, pero esto es imposible. Al tratar de calcular los costos reducidos por el método de las variables duales tampoco se puede. $\diamond$

Para la adecuada obtención de una solución básica factible es necesario tener en cuenta las siguientes indicaciones:

- Las variables básicas son aquellas cuyo valor es positivo o las nulas indicadas por el símbolo ϵ.
- Puede haber líneas con disponibilidad nula y no estar saturadas, es decir, disponibilidad nula y saturación no son equivalentes.
- Cuando se asigna la mayor cantidad posible a una casilla y ésta no es la $m+n-1$, únicamente se satura una línea. Esto quiere decir que si la cantidad disponible en la fila es la misma de la columna de la casilla escogida, entonces se satura, por ejemplo, únicamente la fila y la columna continúa no saturada con disponibilidad nula.
- Si se presenta un empate en la escogencia de la línea (o la fila o la columna) que se satura, como el descrito en la indicación anterior, y si queda únicamente una fila no saturada y varias columnas no saturadas, entonces se debe saturar necesariamente la columna de la casilla escogida. De manera semejante, si hay una sola columna no saturada y varias filas no saturadas se debe saturar la fila de la casilla escogida.
- Cuando la mayor cantidad posible que se puede asignar a una casilla es cero, entonces esto se indica con ϵ.
- Al modificar un circuito únicamente una variable básica se vuelve libre, es decir, si al modificar el circuito dos o más variables quedan con valor nulo, solamente una de ellas se vuelve libre, las demás tienen valor cero, pero son básicas, y se denotan con el símbolo ϵ.
- Si al modificar un circuito, la máxima cantidad que puede tomar la variable que entra es ϵ, entonces la "suma" y "resta" tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} x+\epsilon &= x, &&\text{si } x>0,\\ x-\epsilon &= x, &&\text{si } x>0,\\ \epsilon+\epsilon &= \epsilon,\\ \epsilon-\epsilon &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 17.8. Hallar una solución básica factible por el método de Vogel:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	10
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	20
	10	10	10	10	

Para la primera fila la diferencia es $4 - 1 = 3$. Para la segunda fila la diferencia es $3 - 0 = 3$. Para la tercera fila la diferencia vale $4 - 2 = 2$. Para la primera columna la diferencia es $4 - 3 = 1$, y así sucesivamente.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10	3
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	10	3
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	20	2
	10	10	10	10		
	1	3	4	6		

La cuarta columna tiene mayor diferencia: 6. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (1,4). Allí se puede asignar 10 y se satura, por ejemplo, la primera fila. La cuarta columna no se satura, pero queda con disponibilidad nula.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	10	3
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	20	2
	10	10	10	0		
	1	3	6	1		

La tercera columna tiene mayor diferencia: 6. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo es la casilla (2,3). Allí se puede asignar 10 y se satura, por ejemplo, la segunda fila. La tercera columna no se satura, pero queda con disponibilidad nula.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	20	2
	10	10	0	0		
	∞	∞	∞	∞		

Por ejemplo, la primera columna tiene mayor diferencia ∞. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo (la única) es la casilla (3,1). Allí se puede asignar 10 y se satura la primera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	10	4
		10	0	0		
		∞	∞	∞		

Por ejemplo, la segunda columna tiene mayor diferencia: ∞. En esta columna la casilla disponible de costo mínimo (la única) es la casilla (3,2). Allí se puede asignar 10. Esto hace que las disponibilidades de la tercera fila y la segunda columna se anulen. Como solamente queda una fila no saturada (la tercera) y varias columnas sin saturar, se debe saturar necesariamente la segunda columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	0	1
		0	0			
		∞	∞			

Escogiendo la tercera columna como la línea de mayor diferencia, la casilla disponible de costo mínimo (la única) es la casilla (3,3). Allí se puede asignar 0, denotado por ϵ. Aparentemente habría posibilidad de saturar la tercera fila o la tercera columna, pero como sólo queda una fila no saturada (la tercera) y varias columnas sin saturar, se debe saturar necesariamente la tercera columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10		
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0		
F_3	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ ϵ	$\boxed{7}$	0	∞

0

∞

No queda sino una casilla disponible, la (3,4). Allí se puede asignar 0 (denotado por ϵ) y se saturan al tiempo la tercera fila y la cuarta columna.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0	10
F_3	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ ϵ	$\boxed{7}$ ϵ	20
	10	10	10	10	

Aquí ya no hay casillas disponibles y se ha obtenido una solución factible básica inicial. Su costo es $z = 70$. Al calcular los costos reducidos se tiene:

$$\begin{aligned}
u_1 + v_4 &= 1, \\
u_2 + v_3 &= 0, \\
u_3 + v_1 &= 4, \\
u_3 + v_2 &= 2, \\
u_3 + v_3 &= 6, \\
u_3 + v_4 &= 7.
\end{aligned}$$

Démosle a la variable u_3 el valor cero. Entonces:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -6, & v_1 &= 4, \\
u_2 &= -6, & v_2 &= 2, \\
u_3 &= 0, & v_3 &= 6, \\
 & & v_4 &= 7.
\end{aligned}$$

De manera inmediata se tienen los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{11} &= 5 - -6 - 4 = 7, \\
\tilde{c}_{12} &= 9 - -6 - 2 = 13, \\
\tilde{c}_{13} &= 4 - -6 - 6 = 4, \\
\tilde{c}_{21} &= 3 - -6 - 4 = 5, \\
\tilde{c}_{22} &= 5 - -6 - 2 = 9, \\
\tilde{c}_{24} &= 8 - -6 - 7 = 7.
\end{aligned}$$

La solución obtenida es óptima. $\diamond$

Ejemplo 17.9. Considérese la siguiente solución factible básica, no degenerada:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 0	10
F_2	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{7}$ 10	30
	20	20	10	10	

$$z = 280.$$

Esta solución básica fue obtenida por el método de la esquina noroccidental. El costo reducido mínimo es $\tilde{c}_{14} = -11$, luego la solución no es óptima. El circuito de x_{14} es: (1,4), (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4).

El valor máximo que se puede asignar es 10 . Al actualizar el circuito, se anularían tres variables: x_{11}, x_{22}, x_{34}, pero solamente una variable puede volverse libre, las otras deben seguir siendo básicas, aunque nulas. Supongamos que sale de la base x_{11}, entonces x_{22}, x_{34} se denotarán con ϵ.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 20	$\boxed{5}$ ϵ	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{7}$ ϵ	30
	20	20	10	10	

Esta tabla tampoco es óptima, es necesario efectuar más iteraciones hasta obtener el óptimo con la siguiente tabla.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 10	10
F_2	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{8}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ ϵ	30
	20	20	10	10	

$$z = 120. \ \diamond$$

17.8. Oferta total diferente de demanda total

Cuando la oferta total es diferente de la demanda total puede haber dos casos: la oferta total es mayor que la demanda total o la oferta total es menor que la demanda total.

En el primer caso se debe crear un destino adicional ficticio, una columna adicional, con una demanda igual al exceso de oferta. Las cantidades enviadas hacia este destino pueden indicar la capacidad de oferta no utilizada, o bien las unidades almacenadas en cada origen y no enviadas. Los costos unitarios hacia este nuevo destino son pequeños y pueden ser nulos o pueden indicar un costo de almacenamiento para las unidades no enviadas o también pueden indicar el costo por no utilizar algunas máquinas a su capacidad máxima óptima.

En el segundo caso definitivamente el problema no tiene solución. Sin embargo, se puede pensar en tratar de hallar una seudosolución que, incumpliendo de todas maneras las restricciones de demanda, busca un costo mínimo. Para esto se crea un origen ficticio adicional, una nueva fila, cuya oferta está dada por el exceso de demanda. Las cantidades enviadas desde este origen indican la demanda no satisfecha o también pueden indicar el número de unidades que es necesario conseguir por fuera de la empresa para poder satisfacer la demanda. Los costos unitarios desde el origen ficticio son muy altos y pueden indicar el costo de transporte más el sobreprecio por comprar el producto a otros proveedores, o también pueden significar las pérdidas ocasionadas por una demanda no satisfecha.

Ejemplo 17.10. Considere los siguientes datos:

	D_1	D_2	D_3	
F_1	5	9	4	10
F_2	3	5	4	20
F_3	4	2	6	30
	11	12	13	

La oferta total es igual a 60 y la demanda total es 36, luego es necesario crear un destino adicional con una demanda de 24 unidades. Por falta de información adicional, supongamos que los costos para este destino ficticio son nulos.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	5	9	4	0	10
F_2	3	5	4	0	20
F_3	4	2	6	0	30
	11	12	13	24	

La tabla óptima para este problema es la siguiente:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{0}$ 6	10
F_2	$\boxed{3}$ 11	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{4}$ 9	$\boxed{0}$ 0	20
F_3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 12	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{0}$ 18	30
	11	12	13	24	

$$z = 109. \quad \diamond$$

Ejemplo 17.11. Considere los siguientes datos:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	11
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	22
	11	12	13	24	

La oferta total es igual a 33 y la demanda total es 60. Realmente el problema no tiene solución, pero se va a buscar una seudosolución con costo de transporte mínimo. Es necesario crear un origen (o fábrica) adicional ficticio, con una oferta de 27 unidades. Por falta de información adicional, supongamos que los costos para este destino ficticio son grandes y valen 99.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	11
F_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	22
F_3	$\boxed{99}$	$\boxed{99}$	$\boxed{99}$	$\boxed{99}$	27
	11	12	13	24	

La tabla óptima para este problema es la siguiente:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$ 11	11
F_2	$\boxed{3}$ 9	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 13	$\boxed{8}$ 0	22
F_3	$\boxed{99}$ 2	$\boxed{99}$ 12	$\boxed{99}$ 0	$\boxed{99}$ 13	27
	11	12	13	24	

$$z = 2711.$$

En realidad el costo mínimo de transporte de esta seudosolución es $z = 38$, a lo cual habría que agregar el verdadero costo, correspondiente al incumplimiento de la demanda, o el precio adicional de los sobreesfuerzos necesarios para satisfacer la demanda.

Según esta seudosolución, únicamente se satisface la demanda del destino D_3, los otros destinos tienen demanda insatisfecha de 2, 12 y 13 unidades. $\diamond$

EJERCICIOS

En los ejercicios 17.1 a 17.8, resuelva el problema de transporte planteado. Utilice varios métodos para hallar la solución básica inicial. Calcule los costos reducidos de varias maneras. Si hay más de un punto óptimo, encuentre por lo menos dos. Si es necesario, haga modificaciones o adaptaciones del problema planteado, para poder resolverlo.

17.1. Ofertas 10, 11, 12; demandas 7, 8, 9, 9; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

17.2. Ofertas 10, 11, 12, 13, 14; demandas 9, 9, 9, 9, 24; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 7 & 7 & 6 \\ 10 & 8 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 7 & 5 & 2 \\ 10 & 9 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

17.3. Ofertas 10, 50, 20, 40, 30; demandas 27, 35, 31, 28, 29; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 9 \\ 8 & 8 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

17.4. Ofertas 40, 30, 30; demandas 10, 20, 30, 40; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

17.5. Ofertas 1, 1, 1, 1; demandas 1, 1, 1, 1; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 16 & 15 & 3 & 4 \\ 4 & 13 & 10 & 9 \\ 12 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

17.6. Ofertas 20, 15, 10, 15; demandas 18, 19, 23; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

17.7. Ofertas 10, 16, 20; demandas 10, 15, 15; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

17.8. Ofertas 10, 16, 10; demandas 10, 15, 15; matriz de costos unitarios:

$$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 18

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Antes de introducir los conceptos del análisis de sensibilidad, se presenta un problema pequeño, con el cual es posible comprender mejor las nociones correspondientes.

Ejemplo 18.1. Este problema es en realidad una modificación del problema de asignación de recursos planteado en el primer capítulo. Una fábrica elabora tres productos diferentes P_1, P_2 y P_3 y utiliza tres máquinas diferentes M_1, M_2, M_3. Los tres productos requieren el uso, sin importar el orden, de las tres máquinas. Cada unidad del producto P_1 requiere una hora en cada una de las tres máquinas. Cada unidad del producto P_2 requiere una hora en la máquina M_1 y dos horas en la máquina M_2. Cada unidad del tercer producto requiere dos horas en la primera máquina, una hora en la segunda máquina y dos horas en la tercera máquina. Las disponibilidades mensuales de las máquinas M_1, M_2, M_3 son 400, 580 y 300 horas respectivamente.

La materia prima necesaria para la fabricación de los productos es muy fácil de obtener y se puede conseguir en cantidades tan grandes que se pueden suponer ilimitadas. Después de hacer el cálculo de todos los gastos necesarios para la fabricación, publicidad, distribución, comercialización, y teniendo en cuenta el precio de venta, se obtiene que el beneficio por cada unidad del producto P_1 es \$ 1. Para el producto P_2 el beneficio unitario es \$ 1.4. Para el producto P_3 el beneficio unitario es \$ 1.5. Estudiando la demanda actual para los dos productos, el gerente de ventas cree que se puede vender toda la producción. La compañía desea organizar su producción para que ésta sea óptima.

$$\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 1.4x_2 + 1.5x_3 \\
& x_1 + \ \ x_2 + \ 2x_3 \leq 400 \\
& x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leq 580 \\
& x_1 \qquad\quad + \ 2x_3 \leq 300 \\
& \qquad\qquad\quad x \geq \ \ 0.
\end{array}$$

Introduciendo variables de holgura y convirtiendo el problema en uno de minimización se obtiene:

$$\begin{array}{rl}
\min & z = -x_1 - 1.4x_2 - 1.5x_3 \\
& x_1 + \ \ x_2 + \ 2x_3 + x_4 \qquad\qquad = 400 \\
& x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \qquad + x_5 \qquad = 580 \\
& x_1 \qquad\quad + \ 2x_3 \qquad\qquad + x_6 = 300 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \geq \ \ 0.
\end{array}$$

Su tabla óptima es:

$$\begin{array}{r}
x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr}
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 180 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 80 \\
1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 220 \\
0 & 0 & 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0 & 472
\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
x^* &= (220, 180, 0, 0, 0, 80), \\
z^* &= -472.
\end{aligned}$$

Si se utiliza el MSR, la tabla final es

$$\begin{array}{r}
x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr}
-1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\
-2 & 1 & 1 & 0 & 80 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 220 \\
0.6 & 0.4 & 0 & 1 & 472
\end{array}\right]$$

$$\tilde{c}_L^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{ccc} 0.1 & 0.6 & 0.4 \end{array}\right] \quad \diamond$$

Una de las hipótesis de la programación lineal considera que el modelo es determinista, es decir, se supone que los diferentes datos del problema (coeficientes c_j, b_i, a_{ij}) son conocidos de manera exacta y precisa. Esta suposición es muy fuerte ya que en realidad, generalmente, sólo se conoce una aproximación de cada dato. Más aún, suponiendo que en realidad un dato se conoce de manera precisa, su valor puede haber cambiado con el tiempo, o se puede prever su cambio dentro de cierto tiempo. O también existe la posibilidad de modificar voluntariamente un dato, por ejemplo, se conoce la disponibilidad de cierta materia prima en el mercado nacional, pero si fuera conveniente, se podría importar.

Para fijar más las ideas, supóngase que se conoce la solución óptima de minimizar $z = c^{\mathrm{T}}x$, $Ax = b$, $x \geq 0$. Si ahora se quiere resolver $z = c'^{\mathrm{T}}x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ (donde c' es un vector de costos diferente, pero parecido a c), habría dos caminos, el primero consiste en resolver completamente (desde el principio) el nuevo problema, es el camino de la "fuerza bruta", la segunda opción consiste en estudiar, a partir de los resultados finales del problema no modificado (tabla óptima, x^*, ...), los cambios que se producirían al cambiar c por c', este segundo camino corresponde exactamente al análisis de sensibilidad.

Las modificaciones más usuales que se estudian en el análisis de sensibilidad son las siguientes:

- en los costos (coeficientes c_j),
- en los términos independientes (valores b_i),
- en una columna libre (no básica) de la matriz A,
- una restricción adicional,
- una columna adicional.

18.1. Modificaciones en los costos

El estudio de los cambios en los costos, se puede subdividir en tres clases, la primera corresponde a un cambio puntual o discreto, por ejemplo, si el vector de costos es

$$c = (-1, -1.4, -1.5, 0, 0, 0),$$

y pasa a ser

$$c' = (-1.2, -1.6, -1.4, 0, 0, 0).$$

La segunda clase de modificaciones corresponde a un cambio parametrizado en un solo coeficiente, por ejemplo, si el vector de costos es

$$c = (-1, -1.4, -1.5, 0, 0, 0),$$

y pasa a ser

$$c' = (-1, \alpha, -1.5, 0, 0, 0).$$

La tercera clase de modificaciones corresponde a un cambio global parametrizado (por un solo parámetro), por ejemplo, si el vector de costos es

$$c = (-1, -1.4, -1.5, 0, 0, 0),$$

y pasa a ser

$$c' = (-1, -1.4, -1.5, 0, 0, 0) + \theta(1, 2, -1, 0, 0, 0).$$

Al hacer cambios en los coeficientes iniciales de la función objetivo, únicamente aparecen modificaciones en z y en los costos reducidos de la última tabla, la cual puede seguir siendo óptima o no. Más aún, solamente se modificarían los costos reducidos de las variables libres ya que los costos reducidos de las variables básicas siguen siendo nulos. Recuérdese que

$$\begin{aligned} -z^k &= -c_{B^k}^{\mathrm{T}} {B^k}^{-1} b^0 \\ &= -c_B^{\mathrm{T}} b^k, \end{aligned}$$

donde $c_B = c_{B^k} = c_B^k$ es el vector formado por los costos iniciales correspondientes a las variables básicas en la iteración k; $B^{-1} = {B^k}^{-1}$ es la inversa de la matriz formada por las columnas de la matriz inicial A, correspondientes a las variables básicas en la iteración k; b^0 es el vector inicial de términos independientes; b^k es el vector de términos independientes en la iteración k. Claro está, cuando hay una modificación en c, entonces

$$-{z'}^k = -{c'_B}^{\mathrm{T}} b^k.$$

Los costos reducidos se pueden calcular mediante la fórmula siguiente:

$$\tilde{c}_L^k = c_L^k - (L^{0,k})^{\mathrm{T}} {B^{-1}}^{\mathrm{T}} c_B^k,$$

donde c_L^k son los costos iniciales correspondientes a las variables libres en la iteración k; $L^{0,k}$ es la matriz formada por las columnas de la matriz inicial

A, correspondientes a las variables libres en la iteración k. La anterior igualdad se puede presentar de manera adecuada para la utilización a partir de la última tabla del simplex, o bien, para ser utilizada fácilmente a partir de la última tabla del MSR.

Si se utiliza la tabla del simplex

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{L^k}^{\mathrm{T}} &= c_{L^k}^{\mathrm{T}} - c_B^{k\,\mathrm{T}} L^{k,k} \\
\tilde{c}_L^{\mathrm{T}} &= c_L^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} L^k \\
\tilde{c}_j &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} A_{\cdot j}^k, \quad x_j \text{ es variable libre },
\end{aligned}$$

donde $L^{k,k} = L^k = L$ es la matriz obtenida al tomar de A^k las columnas correspondientes a las variables libres en esa iteración. Obviamente, si en lugar de tener el vector c se tiene otro vector c', entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_L'^{\mathrm{T}} &= c_L'^{\mathrm{T}} - c_B'^{\mathrm{T}} L^k \\
\tilde{c}_j' &= c_j' - c_B'^{\mathrm{T}} A_{\cdot j}^k, \quad x_j \text{ es variable libre }.
\end{aligned}$$

Si se utiliza la tabla del MSR los costos reducidos se pueden expresar

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_L^{\mathrm{T}} &= c_L^{\mathrm{T}} - \left(c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\right) L^{0,k} \\
&= \begin{bmatrix} -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{0,k} \\ c_L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \widehat{L}^{0,k} \\
\tilde{c}_j &= c_j - \left(c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\right) A_{\cdot j}^0, \quad x_j \text{ variable libre },
\end{aligned}$$

donde $\widehat{L}^{0,k}$ es la matriz obtenida al tomar de $\hat{A}^0$ las columnas correspondientes a las variables libres en la iteración k. Obviamente, si en lugar de tener el vector c se tiene otro vector c', entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_L'^{\mathrm{T}} &= c_L'^{\mathrm{T}} - \left(c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1}\right) L^{0,k} \\
&= \begin{bmatrix} -c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \widehat{L}^{0,k} \\
\tilde{c}_j' &= c'_j - \left(c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1}\right) A_{\cdot j}^0, \quad x_j \text{ variable libre }.
\end{aligned}$$

18.1.1. Modificación puntual de c

Al pasar de un vector de costos c, a un vector de costos c', las consecuencias son de dos clases: los costos reducidos de las variables libres siguen siendo no negativos, en este caso el último punto obtenido sigue siendo óptimo y no hay nada más que hacer. En la segunda clase de consecuencias, por lo menos uno de los costos reducidos modificados de variables libres es negativo, y lo que se debe hacer es continuar con el método simplex (o el MSR).

Las modificaciones puntuales en el vector de costos son de tres tipos:

a) modificación de un solo costo correspondiente a una variable libre,

b) modificación de un solo costo correspondiente a una variable básica,

c) modificación de varios costos.

El análisis de una modificación de un solo costo de una variable libre es muy simple: al observar la fórmula, es claro que solamente se modifica el costo reducido correspondiente,

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'_j &= c'_j - {c'}_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot j} \\
&= c'_j - c_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot j} \\
&= c_j - c_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot j} + c'_j - c_j \\
&= \tilde{c}_j + c'_j - c_j,
\end{aligned}$$

es decir, el incremento que sufre el costo reducido es simplemente el incremento que tuvo el costo. El valor de z no se modifica.

Ejemplo 18.2. Considerar los datos del ejemplo 18.1 , cambiando el coeficiente $c_3 = -1.5$, por $c'_3 = -1.45$.

En la tabla óptima x_3 es una variable libre, luego $\tilde{c}_3$ tendrá un incremento de $-1.45-(-1.5) = 0.05$, o sea, $\tilde{c}'_3 = 0.1+0.05 = 0.15$, luego el punto óptimo sigue siendo óptimo. $\diamond$

Ejemplo 18.3. Considerar los datos del ejemplo 18.1, cambiando el coeficiente $c_3 = -1.5$ por $c'_3 = -1.8$.

El costo reducido $\tilde{c}_3$ tendrá un incremento de $-1.8 - (-1.5) = -0.3$, o sea, $\tilde{c}'_3 = 0.1 + -0.3 = -0.2$, luego el último punto obtenido no sería óptimo y es necesario continuar el método a partir de la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z \end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 180 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 80 \\
1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 220 \\
0 & 0 & -0.2 & 0.6 & 0.4 & 0 & 472
\end{bmatrix} \quad \diamond$$

La modificación de un solo costo, correspondiente a una variable básica, implica la modificación de todos los costos reducidos de las variables libres y del valor de z. Si la variable básica cuyo costo se modifica es la i-ésima, entre las básicas

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'^{\mathrm{T}}_L &= {c'_L}^{\mathrm{T}} - {c'}^{\mathrm{T}}_B L^k \\
&= c_L^{\mathrm{T}} - [c_{\beta_1} \dots c'_{\beta_i} \dots c_{\beta_m}] L^k \\
&= c_L^{\mathrm{T}} - [c_{\beta_1} \dots c_{\beta_i} + c'_{\beta_i} - c_{\beta_i} \dots c_{\beta_m}] L^k \\
&= c_L^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} L^k - c'_{\beta_i} - c_{\beta_i} L^k_{i\cdot} \\
&= \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} - (c'_{\beta_i} - c_{\beta_i}) L^k_{i\cdot}.
\end{aligned}$$

De manera análoga

$$-z' = -z - (c'_{\beta_i} - c_{\beta_i}) b^k_i.$$

Ejemplo 18.4. Considerar los datos del ejemplo 18.1, cambiando el coeficiente $c_1 = -1$ por $c'_1 = -1.2$.

La variable x_1 es la tercera variable básica,

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'^{\mathrm{T}}_L &= \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} - (c'_{\beta_i} - c_{\beta_i}) L^k_{i\cdot} \\
\tilde{c}'^{\mathrm{T}}_L &= \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} - (c'_{\beta_3} - c_{\beta_3}) L^k_{3\cdot} \\
&= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} - (-1.2 - -1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ sigue siendo óptimo, y el nuevo valor de $-z$ será:

$$-z' = 472 - (-1.2 - -1)220 = 516. \ \diamond$$

Ejemplo 18.5. Considerar los datos del ejemplo 18.1, cambiando el coeficiente $c_2 = -1.4$, por $c'_2 = -1.6$.

La variable x_2 es la primera variable básica,

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'^{\mathrm{T}}_L &= \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} - (c'_{\beta_i} - c_{\beta_i}) L^k_{i\cdot} \\
\tilde{c}'^{\mathrm{T}}_L &= \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} - (c'_{\beta_1} - c_{\beta_1}) L^k_{1\cdot} \\
&= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} - (-1.6 - -1.4) \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ ya no es óptimo. El nuevo valor de $-z$ será:

$$-z' = 472 - (-1.6 - -1.4)180 = 508.$$

Es necesario continuar el método simplex a partir de la tabla

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 80 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 220 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.4 & 0.6 & 0 & 508 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

18.1.2. Modificación parametrizada de un costo

En este caso, un solo coeficiente se modifica y se desea saber en qué intervalo puede variar de tal forma que el último punto obtenido siga siendo óptimo. Si, por ejemplo, el vector de costos $c = (-1, -1.4, -1.5, 0, 0, 0)$ pasa a ser $(-1, \alpha, -1.5, 0, 0, 0)$ existe un intervalo en el que puede variar α de tal forma que el punto$x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ es óptimo. Obviamente ese intervalo contiene el valor -1.4.

Las modificaciones pueden ser de dos tipos:

a) modificación de un solo costo correspondiente a una variable libre

b) modificación de un solo costo correspondiente a una variable básica.

El estudio del caso a) es muy sencillo:

$$\begin{aligned} \tilde{c}'_j &= \tilde{c}_j + c'_j - c_j \\ &= \tilde{c}_j + \alpha - c_j \geq 0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} &\alpha \geq c_j - \tilde{c}_j \\ &\alpha \in [c_j - \tilde{c}_j, \infty[. \end{aligned}$$

Obviamente, si α varía en este intervalo, el valor de z no se modifica.

Para el estudio del caso b), un poco menos sencillo, supóngase que el coeficiente modificado corresponde a una variable básica, la i-ésima entre las básicas

$$\tilde{c}'^{\,\mathrm{T}}_L = \tilde{c}^{\mathrm{T}}_L - (c'_{\beta_i} - c_{\beta_i}) L^k_{i\cdot} \geq 0.$$

Esto da lugar a $n - m$ desigualdades

$$\tilde{c}'_j = \tilde{c}_j - (\alpha - c_{\beta_i}) a^k_{ij} \geq 0,$$

cuando x_j es variable libre. O sea,

$$\tilde{c}_j + c_{\beta_i} a_{ij}^k \geq \alpha\, a_{ij}^k.$$

Entonces

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}],$$

donde

$$\alpha_{\min} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_{ij}^k \geq 0 \quad \text{para toda variable libre } x_j, \\ c_{\beta_i} - \min \left\{ \dfrac{\tilde{c}_j}{-a_{ij}^k} : a_{ij}^k < 0, \ \ x_j \text{ es variable libre} \right\}, \end{cases}$$

$$\alpha_{\max} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad a_{ij}^k \leq 0 \quad \text{para toda variable libre } x_j, \\ c_{\beta_i} + \min \left\{ \dfrac{\tilde{c}_j}{a_{ij}^k} : a_{ij}^k > 0, \ \ x_j \text{ es variable libre} \right\}. \end{cases}$$

Cuando se modifica un costo correspondiente a una variable básica, el valor de $-z$ sí se modifica.

$$\begin{aligned} -z' &= -z^k - (c'_{\beta_i} - c_{\beta_i}) b_i^k \\ -z' &= -z^k + c_{\beta_i} b_i^k - \alpha b_i^k \\ z' &= z^k - c_{\beta_i} b_i^k + \alpha b_i^k. \end{aligned}$$

Ejemplo 18.6. Averiguar, en el ejemplo 18.1, en qué intervalo puede variar el coeficiente c_3, para que el punto $x = (220, 180, 0,\ 0, 0, 80)$ siga siendo óptimo.

Como en la tabla óptima x_3 es variable libre

$$c_3 = \alpha \in [-1.5 - 0.1, \infty[= [-1.6, \infty[. \ \diamond$$

Ejemplo 18.7. Averiguar, en el ejemplo 18.1, en qué intervalo puede variar el coeficiente c_1, para que el punto $x = (220, 180, 0,\ 0, 0, 80)$ siga siendo óptimo.

En la tabla óptima x_1 es la tercera variable básica. Hallar el intervalo de variación de c_1 pude hacerse de dos maneras, la primera consiste en reemplazar directamente en las fórmulas generales de $\tilde{c}_L'^{\mathrm{T}}$ y sacar las conclusiones sobre las restricciones de α. La segunda manera consiste en aplicar sencillamente las fórmulas para $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'^{\,\mathrm{T}}_L &= c'^{\,\mathrm{T}}_L - c'^{\mathrm{T}}_B L^k \\
&= \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3\alpha - 2.9 & -2\alpha - 1.4 & \alpha + 1.4 \end{bmatrix} \geq 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\alpha \leq \frac{-2.9}{3} \\
&\alpha \leq \frac{-1.4}{2} \\
&\alpha \geq -1.4 \\
&\alpha \in [-1.4, -0.9667],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-z' &= -c'^{\,\mathrm{T}}_B b^k \\
&= -\begin{bmatrix} -1.4 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 \\ 80 \\ 220 \end{bmatrix} \\
&= 252 - 220\alpha \\
z' &= 220\alpha - 252.
\end{aligned}$$

Al aplicar directamente las fórmulas finales

$$\begin{aligned}
\alpha_{\min} &= -1 - \min\left\{\frac{0.4}{--1}\right\} = -1.4, \\
\alpha_{\max} &= -1 + \min\left\{\frac{0.1}{3}, \frac{0.6}{2}\right\} = -0.9667. \\
z' &= -472 - (-1)(220) + \alpha 220 = -252 + 220\alpha. \ \diamond
\end{aligned}$$

18.1.3. Modificación parametrizada de varios costos

En este caso los costos modificados se pueden expresar como

$$c' = c + \theta\bar{c}.$$

Hay que encontrar un intervalo de variación de θ, de tal forma que el último punto obtenido siga siendo óptimo.

$$\tilde{c}'_L{}^{\mathrm{T}} = c'_L{}^{\mathrm{T}} - c'^{\mathrm{T}}_B L^k,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'_L{}^{\mathrm{T}} &= c_L^{\mathrm{T}} + \theta\bar{c}_L^{\mathrm{T}}, -(c_B^{\mathrm{T}} + \theta\bar{c}_B^{\mathrm{T}})L^k \\
&= c_L^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}}L^k + \theta(\bar{c}_L^{\mathrm{T}} - \bar{c}_B^{\mathrm{T}}L^k) \\
&= \tilde{c}_L^{\mathrm{T}} + \theta\tilde{\bar{c}}_L^{\mathrm{T}} \\
\tilde{c}'_j &= \tilde{c}_j + \theta\tilde{\bar{c}}_j \geq 0, \quad x_j \text{ variable libre,}
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\bar{c}}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot j}.$$

$$\theta_{\min} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \tilde{\bar{c}}_L \leq 0 \\ -\min\left\{\dfrac{\tilde{c}_j}{\tilde{\bar{c}}_j} : \tilde{\bar{c}}_j > 0, x_j \text{ es variable libre}\right\}, \end{cases}$$

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad \tilde{\bar{c}}_L \geq 0 \\ \min\left\{\dfrac{\tilde{c}_j}{-\tilde{\bar{c}}_j} : \tilde{\bar{c}}_j < 0, x_j \text{ es variable libre}\right\}. \end{cases}$$

Obviamente, el intervalo de variación de θ siempre contiene el valor cero. Al reemplazar el vector c, por su modificación $\bar{c}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
-z' &= -\bar{c}'_B{}^{\mathrm{T}} b^k \\
&= -c_B^{\mathrm{T}} b^k - \theta\bar{c}_B^{\mathrm{T}} b^k \\
z' &= z^k + \theta\bar{c}_B^{\mathrm{T}} b^k.
\end{aligned}$$

Ejemplo 18.8. Averiguar, en el ejemplo 18.1, en qué intervalo puede variar θ para que el punto $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ siga siendo óptimo, si el vector de costos cambia de $(-1, -1.4, -1.5, 0,\ 0, 0)$ a $(-1, -1.4, -1.5, 0, 0, 0) + \theta(-2, 1, -1, 0, 0, 0)$. Esta modificación puede corresponder al siguiente cambio en el ejemplo 18.1 . El gerente de la fábrica cree que, teniendo en cuenta los precios de productos semejantes de otras compañías, puede aumentar el precio de venta de sus productos 1 y 3, pero debe disminuir el del producto 2. Además, estima conveniente aumentar el precio del producto 1 en una cantidad igual al doble del aumento del producto 3.

De nuevo hay dos formas para abordar el problema: partir de las fórmulas generales para $\tilde{c}'_L$, o utilizar directamente las fórmulas para $\theta_{\min}$ y $\theta_{\max}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{c}'^{\,\mathrm{T}}_L &= c'^{\,\mathrm{T}}_L - c'^{\mathrm{T}}_B L^k \\
&= \left[\begin{array}{ccc} -1.5-\theta & 0 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} -1.4+\theta & 0 & -1-2\theta \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} 0.1+6\theta & 0.6+5\theta & 0.4-3\theta \end{array}\right] \geq 0.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\theta \in [-0.1/6, 0.4/3].$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{c}}^{\mathrm{T}}_L &= \bar{c}^{\mathrm{T}}_L - \bar{c}^{\mathrm{T}}_B L^k \\
&= \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} 6 & 5 & -3 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\theta_{\min} &= -\min\left\{\frac{0.1}{6}, \frac{0.6}{5}\right\} = -\frac{0.1}{6}, \\
\theta_{\max} &= \min\left\{\frac{0.4}{--3}\right\} = \frac{0.4}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z' &= -472 + \theta \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} 180 \\ 80 \\ 220 \end{array}\right] \\
&= -472 - 260\theta.
\end{aligned}$$

Como el coeficiente de θ, en la expresión de z, es negativo, entonces el mejor valor que puede tomar θ sin que cambie el punto óptimo es $\theta_{\max} = 0.4/3$. $\diamond$

18.2. Modificaciones en los términos independientes

El estudio de los cambios en los términos independientes también se puede subdividir en tres clases; un cambio puntual, un cambio parametrizado de un solo término independiente y un cambio parametrizado de varios términos independientes.

18.2.1. Modificación puntual de b

Se trata, en este caso, de cambiar el vector $b = b^o$ inicial, por un vector $b^{0'}$. Para ver las consecuencias de este cambio en los términos independientes de la última tabla es necesario conocer $B^{-1} = B^{k^{-1}}$ ya que $b^k = B^{-1}b^0$, luego

$$b^{k'} = B^{-1}b^{0'}.$$

Obviamente, z también se modifica:

$$z' = c_B^{\mathrm{T}} b^{k'}.$$

Si se utiliza el MSR, siempre se tiene explícitamente B^{-1}. Si se utiliza la tabla usual del método simplex es necesario, en general, calcular B^{-1}. Con $b^{k'}$ pueden pasar dos cosas, la primera y la más sencilla: $b^{k'} \geq 0$, entonces las variables libres siguen siendo las mismas (y teniendo el mismo valor: 0) y las variables básicas también siguen siendo las mismas, pero su valor se ha modificado, o sea, se ha modificado el punto óptimo. El segundo caso se da, cuando $b^{k'}$ tiene por lo menos un elemento negativo, en ese caso al reemplazar los nuevos términos independientes en la última tabla, no se tiene factibilidad, pero se siguen teniendo condiciones de optimalidad. Así, el camino inmediato es aplicar el método simplex dual.

Ejemplo 18.9. Considerar los datos del ejemplo 18.1, modificando las disponibilidades de las máquinas por 410, 600, 280.

En la tabla óptima las variables básicas son x_2, x_6, x_1. Luego

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En la mayoría de los casos, la matriz B^{-1} se obtiene, bien sea a partir de la última tabla del MSR, o bien por cálculo directo de la inversa de B. En este ejemplo particular, como en la tabla inicial se tenía la matriz identidad (no se necesitó la primera fase) la matriz B^{-1} estará en el sitio que ocupaba la matriz identidad, es decir, columnas tercera, cuarta y quinta.

$$b^{k'} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 410 \\ 600 \\ 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 \\ 60 \\ 220 \end{bmatrix},$$

$$z' = \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 190 \\ 60 \\ 220 \end{bmatrix} = -486.$$

Luego las variables básicas en el óptimo siguen siendo las mismas y su valor cambia un poco; el nuevo punto óptimo es entonces

$$x^{*\prime} = (220, 190, 0, 0, 0, 60). \ \diamond$$

Ejemplo 18.10. Considerar los datos del ejemplo 18.1, modificando las disponibilidades de las máquinas por 430, 600, 250.

$$b^{k\prime} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 430 \\ 600 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ -10 \\ 260 \end{bmatrix},$$

$$z' = \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 170 \\ -10 \\ 260 \end{bmatrix} = -498.$$

Luego las variables básicas en el óptimo no son las mismas. Para hallar la solución óptima es necesario utilizar el simplex dual:

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 170 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 260 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0 & 498 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_2}, \\ x_s &= x_6, \\ x_e &= x_3. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 & 230 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 & 497 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^{*\prime} &= (230, 180, 10, 0, 0, 0), \\ z^{*\prime} &= -497. \ \diamond \end{aligned}$$

18.2.2. Modificación parametrizada de un solo término independiente

Del vector inicial b^0, se modifica un solo elemento, el j-ésimo. Se desea saber en qué intervalo puede variar este término independiente, de manera que las variables básicas sigan siendo las mismas.

$$b^{0\prime} = \begin{bmatrix} b_1^0 \\ \vdots \\ b_{j-1}^0 \\ \alpha \\ b_{j+1}^0 \\ \vdots \\ b_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^0 \\ \vdots \\ b_{j-1}^0 \\ b_j^0 \\ b_{j+1}^0 \\ \vdots \\ b_m^0 \end{bmatrix} + (\alpha - b_j^0) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b^0 + (-b_j^0 + \alpha)e^j.$$

$$b^{k\prime} = B^{-1}b^{0\prime} = b^k - b_j^0(B^{-1})_{\cdot j} + \alpha(B^{-1})_{\cdot j} \geq 0.$$

Sea $S = [s_{ij}] = B^{-1}$.

$$b_i^{k\prime} = b_i^k - b_j^0 s_{ij} + \alpha s_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m,$$

$$\alpha_{\min} = \begin{cases} -\infty & \text{si } S_{\cdot j} \leq 0, \\ b_j^0 - \min\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \dfrac{b_i^k}{s_{ij}} : s_{ij} > 0 \right\}. \end{cases}$$

$$\alpha_{\max} = \begin{cases} \infty & \text{si } S_{\cdot j} \geq 0, \\ b_j^0 + \min\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \dfrac{b_i^k}{-s_{ij}} : s_{ij} < 0 \right\}. \end{cases}$$

Como era de esperarse, el valor inicial b_j^0 siempre está en el intervalo de variación de α. Este intervalo se conoce con el nombre de intervalo de factibilidad de la restricción.

$$\begin{aligned} z' &= c_B^{\mathrm{T}} b^{k\prime} \\ &= c_B^{\mathrm{T}} \big(b^k + (\alpha - b_j^0) S_{\cdot j} \big) \\ &= z^k + (\alpha - b_j^0) c_B^{\mathrm{T}} S_{\cdot j} \\ &= z^k - b_j^0 c_B^{\mathrm{T}} S_{\cdot j} + \alpha c_B^{\mathrm{T}} S_{\cdot j}. \end{aligned}$$

El coeficiente de α indica la modificación que sufre z, por cada unidad que aumente el j-ésimo término independiente. Este coeficiente es llamado el **precio sombra de la restricción**. Está relacionado con el valor de la variable dual correspondiente a esta restricción.

Ejemplo 18.11. Considerar los datos del ejemplo 18.1, modificando las disponibilidades de las máquinas, por α, 580, 300. Averiguar en qué intervalo puede variar α sin que cambie el grupo de variables básicas.

$$b^{k\prime} = \begin{bmatrix} 180 \\ 80 \\ 220 \end{bmatrix} - 400 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= 290, \\ \alpha_{\max} &= 440, \end{aligned}$$

$$x^{*\prime} = (-580 + 2\alpha, 580 - \alpha, 0, 0, 0, 880 - 2\alpha).$$

Obsérvese que para los dos valores extremos de α, los puntos óptimos obtenidos son degenerados:

$$\begin{aligned} x &= (0, 290, 0, 0, 0, 300), \\ x &= (300, 140, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{*\prime} &= -472 + (\alpha - 400) \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -232 - 0.6\alpha. \end{aligned}$$

El valor -0.6 indica que, por cada unidad que aumente el primer término independiente, el valor de z se incrementa en -0.6 unidades. Puesto que se está tratando de minimizar z, lo más conveniente es que se incremente lo más que se pueda la disponibilidad de la primera máquina. El valor de este precio sombra es válido dentro del intervalo de factibilidad de la restricción.

Si para aumentar la disponibilidad de la primera máquina, la compañía puede alquilar horas adicionales a un precio de \$ 0.8 , no valdría la pena hacerlo. En cambio, si se consiguen horas adicionales de la máquina 1 a un precio de \$ 0.5, sí valdría la pena hacerlo. $\diamond$

Ejemplo 18.12. Considerar los datos del ejemplo 18.1, modificando las disponibilidades de las máquinas, por 580, 400, α. Averiguar en qué intervalo puede variar α sin que cambie el grupo de variables básicas.

$$b^{k\prime} = \begin{bmatrix} 180 \\ 80 \\ 220 \end{bmatrix} - 300 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= 220, \\ \alpha_{\max} &= \infty. \end{aligned}$$

$$x^{*\prime} = (220, 180, 0, 0, 0, -220 + \alpha).$$

$$\begin{aligned} z^{*\prime} &= -472 + (\alpha - 300) \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -472. \end{aligned}$$

El precio sombra nulo indica que z no se modifica al variar el tercer término independiente en su intervalo de factibilidad. Además, los valores de las variables originales del problema tampoco cambian, únicamente cambia el valor de la holgura. Este mismo resultado se hubiera podido obtener a partir de los siguientes hechos: en el óptimo la tercera restricción es, originalmente, una desigualdad y no está activa o saturada, es decir, se tiene la desigualdad estricta. Dicho de otra forma, x_6 la variable de holgura de esa restricción no es nula, o sea, hubo horas sobrantes de la tercera máquina. El valor 220, límite inferior del intervalo, corresponde exactamente al valor inicial 300 menos la holgura 80. $\diamond$

18.2.3. Modificación parametrizada de varios términos independientes

Del vector inicial b^0 se modifican varios elementos, en la forma

$$b^{0\prime} = b^0 + \theta\bar{b}.$$

Se desea saber en qué intervalo puede variar θ, de manera que las variables básicas sigan siendo las mismas.

$$\begin{aligned} b^{k\prime} &= B^{-1}b^0 + \theta B^{-1}\bar{b} \\ &= b^k + \theta\bar{b}^k \geq 0. \end{aligned}$$

$$\theta_{\min} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \bar{b}^k \leq 0, \\ -\min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i^k}{\bar{b}_i^k} : \bar{b}_i^k > 0 \right\}. \end{cases}$$

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \infty & \text{si } \bar{b}^k \geq 0, \\ \min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i^k}{-\bar{b}_i^k} : \bar{b}_i^k < 0 \right\}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z' &= c_B^{\mathrm{T}} b^{k\prime} \\ &= z^k + \theta c_B^{\mathrm{T}} \bar{b}^k. \end{aligned}$$

Ejemplo 18.13. El gerente de la compañía del ejemplo 18.1, piensa que lo más importante es conseguir horas adicionales para la segunda máquina. Los ingenieros de producción creen que la máquina uno puede, mediante algunas adaptaciones, hacer el mismo trabajo de la segunda, pero con un rendimiento igual a la mitad, es decir, si se toma una hora de la máquina uno para hacer el trabajo de la segunda máquina, alcanza a hacer lo que la segunda haría en media hora. Por otro lado el gerente, que conoce un poco la terminología de la PL, tiene sus razones para desear que las variables básicas sean las mismas. ¿Qué aconsejaría al gerente?

En este problema, por cada hora cedida por la máquina uno, se consigue media hora real de la segunda máquina.

$$b^{0\prime} = \begin{bmatrix} 400 \\ 580 \\ 300 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b^{k\prime} = \begin{bmatrix} 180 \\ 80 \\ 220 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= -32, \\ \theta_{\max} &= 88. \end{aligned}$$

En realidad, tal como está planteado el problema, θ toma únicamente valores positivos, ya que está previsto disminuir el número de horas de la primera máquina para aumentar la disponibilidad de la segunda.

$$
\begin{aligned}
z' &= -472 + \theta \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix} \\
&= -472 + 0.4\theta.
\end{aligned}
$$

Luego no es adecuado perder horas de la primera máquina para ganar la mitad en la segunda. Si, por el contrario, fuera posible que por cada media hora que se disminuya la disponibilidad de la segunda máquina, se aumente en una hora la disponibilidad de la primera ($\theta < 0$ en el planteamiento anterior), entonces si se podría mejorar el valor de z, y θ debería tomar el valor más negativo, es decir, -32. $\diamond$

18.3. Modificaciones en una columna libre de A

Cuando se modifica una columna de la matriz inicial $A = A^0$, correspondiente a una variable libre en la tabla óptima, es necesario observar el cambio acarreado en el costo reducido respectivo, para ello se requiere conocer el cambio en la columna de la última tabla, entonces hace falta conocer la matriz B^{-1}.

Los cambios en una columna, de una variable básica en el óptimo, repercuten en la matriz B^{-1} y, salvo en casos muy específicos y sencillos, es bastante complicado estudiar estos cambios.

Sea x_j una variable libre en la tabla óptima.

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_j &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot j} \\
&= c_j - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} A^0_{\cdot j},
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\tilde{c}'_j = c_j - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} {A^0}'_{\cdot j}.
$$

Si para obtener la solución se ha utilizado el MSR, entonces

$$
\tilde{c}'_j = c_j + (-c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}) {A^0}'_{\cdot j}.
$$

Recuérdese que $-c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ está en las primeras m posiciones de la fila $m+1$ de la tabla del MSR.

18.3.1. Modificación puntual de una columna libre

Al cambiar una columna inicial, el nuevo costo reducido en la última tabla puede seguir siendo no negativo o volverse negativo. Si sigue siendo no negativo, entonces el último punto obtenido sigue siendo óptimo. Si el nuevo costo reducido es negativo, se puede continuar con el simplex, a partir de la última tabla, cambiando la columna.

Ejemplo 18.14. El gerente de la compañía del ejemplo 18.1, cree que se puede fabricar, en lugar del actual producto P_3 (que en realidad no se fabrica), otro parecido, con el cual se ganarían también \$1.5 pesos por cada unidad, pero cuyos requerimientos en cada una de las máquinas son 1.5, 2.5 y 1 horas. ¿Cuál es la solución del nuevo problema ?

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_3' &= -1.5 - \begin{bmatrix} -14. & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 0.4.
\end{aligned}
$$

Si se hubiera usado el MSR, el cálculo de $\tilde{c}_3'$ estaría dado directamente por

$$
\tilde{c}_3' = -1.5 + \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.4
$$

Como el costo reducido sigue siendo no negativo, entonces el último punto obtenido también es punto óptimo para el problema modificado. $\diamond$

Ejemplo 18.15. El gerente de la compañía del ejemplo 18.1, cree que se puede fabricar, en lugar del actual producto P_3 (que en realidad no se fabrica), otro parecido, con el cual se ganarían también \$1.5 pesos por cada unidad, pero cuyos requerimientos en cada una de las máquinas son 1.5, 1 y 1 horas. ¿Cual es la solución del nuevo problema?

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_3' &= -1.5 - \begin{bmatrix} -14. & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -1.5 - \begin{bmatrix} -14. & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -0.2.
\end{aligned}
$$

Como el costo reducido se volvió negativo, entonces el último punto ya no es óptimo.

$$\begin{array}{r} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.5 & -1 & 1 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 80 \\ 1 & 0 & \boxed{2} & 2 & -1 & 0 & 220 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.6 & 0.4 & 0 & 472 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_e &= x_3, \\ x_{\beta_\sigma} &= x_{\beta_3}, \\ x_s &= x_1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x_2 \\ x_6 \\ x_3 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 & -0.5 & 0.75 & 0 & 235 \\ 0.5 & 0 & 0 & -1 & 0.5 & 1 & 190 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 & 110 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.8 & 0.3 & 0 & 494 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^{*\prime} &= (0, 235, 110, 0, 0, 190), \\ z^{*\prime} &= -494. \ \diamond \end{aligned}$$

18.3.2. Modificación parametrizada de un solo elemento de una columna libre

Cuando se cambia un solo elemento de una columna libre, se desea saber en qué intervalo puede variar, de tal forma que el último punto obtenido siga siendo óptimo. Supóngase que se modifica el elemento a_{ij}. Sea $S = B^{-1}$.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j' &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} A^{0\prime}_{\cdot j} \\ &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} S \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{i-1,j} \\ \alpha \\ a_{i+1,j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}'_j &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} S \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{i-1,j} \\ a_{ij} \\ a_{i+1,j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_B^{\mathrm{T}} S(\alpha - a_{ij}) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \tilde{c}_j + (a_{ij} - \alpha) c_B^{\mathrm{T}} S_{\cdot i} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 18.16. ¿En qué intervalo puede variar el segundo elemento de la tercera columna de A de tal forma que el punto $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ siga siendo óptimo?

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}'_3 &= 0.1 + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= -0.3 + 0.4\alpha.
\end{aligned}
$$

Entonces α puede variar en el intervalo $[0.75, \infty[$, sin que el punto óptimo cambie.

En éste, como en otros casos, se puede hacer un análisis de más alcance sobre la variación de α. Para valores de α menores que 0.75, entraría a la base la variable x_3 y se puede prever qué pasaría. La columna modificada sería

$$
B^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha - 2 \\ -\alpha + 4 \end{bmatrix}.
$$

El único elemento positivo es el tercero, luego saldría la tercera variable básica, es decir, x_1. El valor de z en la nueva tabla estaría dado por:

$$
-z' = 472 - \frac{-0.3 + 0.4\alpha}{-\alpha + 4} 220,
$$

o sea,

$$
z' = -472 + \frac{-0.3 + 0.4\alpha}{-\alpha + 4} 220.
$$

Por ejemplo, si $\alpha = 0.5$ el nuevo valor de z sería -478.2857. $\diamond$

18.3.3. Modificación parametrizada de varios elementos de una columna libre

Si una columna inicial $A^0_{\cdot j}$, libre en la tabla óptima, se cambia por $A^{0\prime}_{\cdot j} = A^0_{\cdot j} + \theta \bar{A}^{0\prime}_{\cdot j}$, se desea saber en qué intervalo puede variar θ de tal forma que el último punto obtenido siga siendo óptimo.

$$\begin{aligned}\tilde{c}'_j &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} {A^{0\prime}}_{\cdot j} \\ &= c_j - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\big(A^0_{\cdot j} + \theta \bar{A}^{0\prime}_{\cdot j}\big) \\ &= \tilde{c}_j - \theta c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \bar{A}^{0\prime}_{\cdot j} \geq 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 18.17. ¿En qué intervalo puede variar θ si los elementos de la tercera columna son $2 - \theta$, $1 + \theta$ $2 + 2\theta$, de tal forma que el punto $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ siga siendo óptimo?

$$\begin{aligned}\tilde{c}'_3 &= \tilde{c}_3 - \theta \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= 0.1 - 0.2\theta \geq 0.\end{aligned}$$

Luego

$$\theta \in]-\infty, 0.5]. \;\; \diamond$$

18.4. Una restricción adicional

Sea x^* el minimizador de la función $z = c^{\mathrm{T}}x$ en un conjunto de puntos admisibles $\mathcal{A}$. Al colocar una nueva restricción, se está haciendo la intersección de $\mathcal{A}$ con el conjunto definido por la nueva restricción. El nuevo conjunto admisible $\mathcal{A}'$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ (aunque no necesariamente propio). Para que x^* sea también minimizador de $z = c^{\mathrm{T}}x$ en $\mathcal{A}'$, sólo se necesita que esté en $\mathcal{A}'$. Para ello basta con que esté en el conjunto definido por la nueva restricción. En resumen, x^* sigue siendo óptimo si cumple la restricción adicional. Si x^* no cumple la nueva restricción, para resolver el nuevo problema, se introduce una nueva fila, correspondiente a la restricción adicional y se debe tratar de obtener la matriz identidad, pero ahora de tamaño $m + 1$.

Si la nueva restricción (no cumplida) es una desigualdad $\leq$, la nueva variable de holgura va a hacer parte de la base. A la nueva fila hay que sumarle múltiplos adecuados de las otras filas para obtener completamente la identidad de orden $m+1$. Esto hace que el término independiente de la fila $m+1$ sea negativo y lo obvio es utilizar el método simplex dual para continuar.

Si la nueva restricción (no cumplida) es una desigualdad $\geq$, después de introducir la variable de holgura, se multiplica toda la igualdad por menos uno. La nueva variable de holgura va a hacer parte de la base. A la nueva fila hay que sumarle múltiplos adecuados de las otras filas para obtener completamente la identidad de orden $m+1$. Esto hace que el término independiente de la fila $m+1$ sea negativo y lo obvio es utilizar el método simplex dual para continuar.

Si la nueva restricción (no cumplida) es una igualdad, se hace necesario introducir una variable artificial y entonces hay que efectuar el método de las dos fases o el de penalización. Es claro que una restricción de igualdad, por ejemplo $a-2b+3c=4$ se puede reemplazar por $-a+2b-3c=-4$. La escogencia de una u otra igualdad repercute en lo siguiente: después de entrar la variable artificial, que obviamente va a ser variable básica, es necesario, como en los casos anteriores, obtener de nuevo la matriz identidad, pero ahora de tamaño $m+1$. Para ello a la nueva fila hay que sumarle múltiplos adecuados de otras filas. Se necesita entonces que el término independiente resulte no negativo.

Supongamos que las variables básicas son exactamente las m primeras variables y que de éstas las q primeras son variables originales (no de holgura), es decir,

$$\begin{aligned} x_j &= b_j^k \qquad j=1,...,m \\ x_j &= 0 \qquad j=m+1,...,n. \end{aligned}$$

Supongamos que la nueva restricción es

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + ... + a_{m+1,q}x_q = b_{m+1}^0,$$

con $b_{m+1}^0 \geq 0$ (no hay que multiplicar la igualdad por -1).

Hay que introducir una variable artificial

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + ... + a_{m+1,q}x_q + x_{n+1} = b_{m+1}^0.$$

Para obtener, en las primeras q columnas de A, las columnas de la matriz identidad de orden $m+1$, es necesario sumar a la fila $m+1$ la primera fila multiplicada por $-a_{m+1,1}$, ..., hasta la fila q multiplicada por $-a_{m+1,q}$. Entonces

$$\begin{aligned} b^{k'}_{m+1} &= b^0_{m+1} - \sum_{j=1}^{q} a_{m+1,j} b^k_j \geq 0 \\ &= b^0_{m+1} - \sum_{j=1}^{q} a_{m+1,j} x^k_j \geq 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{q} a_{m+1,j} x^k_j \leq b^0_{m+1},$$

lo cual dicho en otras palabras es: la parte izquierda de la igualdad (donde están las variables x_i) debe ser menor que el término independiente. Si no es así, se debe multiplicar por menos uno (-1) toda la igualdad.

Ejemplo 18.18. El investigador de mercados de la fábrica del ejemplo 18.1, informó al gerente que el número total de unidades vendidas $(x_1 + x_2 + x_3)$ no podría ser superior a cuatrocientos noventa unidades.

Como el punto $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ cumple la nueva restricción

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 490,$$

entonces sigue siendo óptimo. $\diamond$

Ejemplo 18.19. Considere el ejemplo 18.1 con la restricción adicional

$$x_1 + 0.5x_2 + 3x_3 \geq 400.$$

El punto $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ no cumple la nueva restricción, ya que

$$220 + 0.5 \times 180 + 3 \times 0 = 310.$$

Al introducir una variable de holgura

$$x_1 + 0.5x_2 + 3x_3 - x_7 = 400$$

y multiplicando por -1

$$-x_1 - 0.5x_2 - 3x_3 + x_7 = -400,$$

se obtiene una igualdad que se puede agregar a la tabla para que x_7 sea variable básica:

$$
\begin{array}{c}
x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_7 \\ -z
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 80 \\
1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 220 \\
-1 & -0.5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -400 \\
0 & 0 & 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 472
\end{bmatrix}
$$

En las columnas primera y segunda no están las columnas adecuadas de la matriz identidad 4×4, pero esto se puede lograr sumando a la cuarta fila una vez la tercera fila y 0.5 veces la primera:

$$
\begin{array}{c}
x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_7 \\ -z
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 80 \\
1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 220 \\
0 & 0 & \boxed{-0.5} & 1.5 & -0.5 & 0 & 1 & -90 \\
0 & 0 & 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 472
\end{bmatrix}
$$

A partir de esta tabla se utiliza el método simplex dual y en dos tablas más se obtiene el óptimo:

$$
\begin{aligned}
x^* &= (0, 200, 100, 0, 80, 100, 0) \\
z^* &= -430. \ \diamond
\end{aligned}
$$

Ejemplo 18.20. Considere el ejemplo 18.1 con la restricción adicional

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 780.$$

El punto $x = (220, 180, 0, 0, 0, 80)$ no cumple la nueva restricción:

$$2 \times 220 + 2 \times 180 + 3 \times 0 = 800.$$

Como el lado izquierdo de la restricción es mayor que el lado derecho, entonces es necesario multiplicar por -1.

$$-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -780.$$

Ahora sí el lado izquierdo es menor que el derecho y se introduce la variable artificial

$$-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_7 = -780.$$

Esta igualdad se puede agregar a la tabla para que x_7 sea variable básica. Además, se cambia la fila de costos reducidos por los costos artificiales.

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_7 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 220 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -780 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para conseguir la matriz identidad de orden 4, a la cuarta fila hay que sumarle dos veces la tercera y dos veces la primera

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_7 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 220 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

También es necesario calcular los costos reducidos

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_7 \\ -z_a \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 220 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Se continúa normalmente con la primera fase y después se efectúa la segunda fase hasta llegar a

$$\begin{aligned} x^* &= (160, 200, 20, 0, 0, 100) \\ z^* &= -470. \ \diamond \end{aligned}$$

18.5. Una columna adicional

Tener una columna adicional significa que hay una nueva variable, por ejemplo x_{n+1} y, por lo tanto, se conocen los valores $a^0_{1,n+1}$, $a^0_{2,n+1}$,..., $a^0_{m,n+1}$, y también el costo c_{n+1}. La variable x_{n+1} entra a la tabla como variable libre con valor nulo. Obviamente, es necesario calcular su costo reducido para saber si la tabla sigue siendo óptima. Para este cálculo, de nuevo, se necesita conocer B^{-1}.

$$
\begin{aligned}
A^k_{\cdot n+1} &= B^{-1}A^0_{\cdot n+1},\\
\tilde{c}_{n+1} &= c_{n+1} - c_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot n+1}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 18.21. Considere el ejemplo 18.1, y suponga que existe la posibilidad de elaborar un cuarto producto que se vende a \$ 0.40 y requiere media hora en las dos primeras máquinas y una hora en la tercera.

Para no alterar la notación, sea x_7 el número de unidades del cuarto producto.

$$
\begin{aligned}
A^k_{\cdot 7} &= B^{-1}A^0_{\cdot 7}\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5\\ 0.5\\ 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 0\\ 0.5\\ 0.5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_{n+1} &= c_{n+1} - c_B^{\mathrm{T}} A^k_{\cdot n+1}\\
&= -0.4 - \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\ 0.5\\ 0.5 \end{bmatrix}\\
&= 0.1.
\end{aligned}
$$

Entonces, aunque existe la posibilidad de fabricar un cuarto producto, no es conveniente hacerlo ya que la tabla con la nueva variable x_7 (libre y nula) es también óptima. $\diamond$

Ejemplo 18.22. Considere el ejemplo 18.1 y suponga que existe la posibilidad de elaborar un cuarto producto que se vende a \$0.70 y requiere media hora en las dos primeras máquinas y una hora en la tercera.

Sea x_7 el número de unidades del cuarto producto.

$$A_{\cdot 7}^{k} = B^{-1}A_{\cdot 7}^{0}$$

$$A_{\cdot 7}^{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_7 &= -0.7 - \begin{bmatrix} -1.4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ &= -0.2. \end{aligned}$$

Luego la tabla con la columna adicional no es óptima y se debe continuar el simplex a partir de

$$\begin{array}{r} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0.5 & 80 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0.5 & 220 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0 & -0.2 & 472 \end{bmatrix},$$

hasta obtener

$$\begin{aligned} x^{*'} &= (0, 215, 35, 0, 0, 0, 230) \\ z^{*'} &= -514.5. \ \diamond \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Considere el siguiente problema: maximizar (el beneficio total) $6x_1 + 5x_2 + 4x_3$ con las restricciones $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 26$, $x_1 + x_2 \leq 16$, $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 36$, $x \geq 0$.

18.0. Convierta el problema en la forma estándar de minimización. Halle la solución utilizando el método simplex y el método simplex revisado.

Considere las modificaciones propuestas en los ejercicios 18.1 a 18.14. Cada una de estas modificaciones se refiere al problema inicial, y no se acumulan.

18.1. Averigüe si el optimizador (punto óptimo) cambia, al cambiar $c = (-6, -5, -4, 0, 0, 0)$ por $c' = (-7, -6, -5, 0, 0, 0)$. Si el optimizador cambia, encuentre el nuevo optimizador.

18.2. Averigüe si el optimizador (punto óptimo) cambia, al cambiar $c = (-6, -5, -4, 0, 0, 0)$ por $c' = (-10, -6, -5, 0, 0, 0)$. Si el optimizador cambia, encuentre el nuevo optimizador.

18.3. Averigüe en qué intervalo puede variar α, para que el optimizador no cambie, si el vector de costos es $(\alpha, -5, -4, 0, 0, 0)$.

18.4. Averigüe en qué intervalo puede variar θ, para que el optimizador no cambie, si el vector de costos es

$$(-6, -5, -4, 0, 0, 0) + \theta(2, -1, -1, 0, 0, 0)$$

18.5. Encuentre el optimizador obtenido al cambiar el vector de términos independientes $b = (26, 16, 36)$ por $b' = (20, 10, 30)$.

18.6. Encuentre el optimizador obtenido al cambiar el vector de términos independientes $b = (26, 16, 36)$ por $b' = (20, 20, 20)$.

18.7. Averigüe en qué intervalo puede variar α, para que en el óptimo, las variables básicas sean las mismas, si el vector de términos independientes es $(26, \alpha, 36)$.

18.8. Averigüe en qué intervalo puede variar θ, para que en el óptimo, las variables básicas sean las mismas, si el vector de términos independientes es $(26, 16, 36) + \theta(1, -2, -1)$.

18.9. Suponga que existe la posibilidad de una cuarta variable (un nuevo producto), con beneficio unitario 10. Este nuevo producto consume 3, 4 y 5 unidades de los tres recursos. Resuelva el nuevo problema.

18.10. Suponga que existe la posibilidad de una cuarta variable (un nuevo producto), con beneficio unitario 3. Este nuevo producto consume 0.5, 1.5 y 0.5 unidades de los tres recursos. Resuelva el nuevo problema.

18.11. Suponga que existe una nueva restricción $x_2 + 2x_3 \leq 50$. Resuelva el nuevo problema.

18.12. Suponga que existe una nueva restricción $x_1 + x_2 + x_3 \leq 25$. Resuelva el nuevo problema.

18.13. Suponga que existe una nueva restricción $4x_1 + 4x_2 = x_3$. Resuelva el nuevo problema.

18.14. Suponga que existe una nueva restricción $0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 \geq 28$. Resuelva el nuevo problema.

Bibliografía

[BJS99] Bazaraa M.S., Jarvis J. J., Sherali H.D., *Programación lineal y flujo en redes*, 2 ed., Limusa - Noriega, México, 1999.

[Dan63] Dantzig George B., *Linear Programming and Extensions*, Princenton University Press, Princenton, 1963.

[DaT97] Dantzig George B., Thapa Mukund N., *Linear Programming, 1: Introduction*, Springer, New York, 1997.

[deW90] de Werra Dominique, *Eléments de Programmation Linéaire avec application aux graphes*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1990.

[Gue76] Guerard C., *Programmation Lineaire*, Presses de l'Université de Montreal, Montreal, Editions Eyrolles, Paris, 1976.

[Had62] Hadley G., *Linear Programming*, Addison Wesley, Reading Massachusetts, 1962.

[Las70] Lasdon Leon S., *Optimization Theory for Large Sytems*, MacMillan, New York, 1970.

[Min83] Minoux M., *Programmation Mathématique, Théorie et algorithmes*, tome 1, Dunod, Paris, 1983.

[Mut76] Mutty Katta G., *Linear and Combinatorial Programming*, Wiley, New York, 1976.

[NaS96] Nash Stephen G., Sofer Ariela, *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1996.

[Naz87] Nazareth John Lawrence, *Computer Solution of Linear Programms*, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[NoW99] Nocedal Jorge, Wright Stephen J., *Numerical Optimization*, Springer, New York, 1999.

[Pad95] Padberg Manfred, *Linear Optimization and extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Pan96] Panik Michael J., *Linear Programming: Mathematics, Theory and Algorithms*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[Pra81] Prawda J., *Métodos y modelos de investigación de operaciones*, vol. 1, *Modelos determinísticos*, Limusa, México, 1981.

[Sim62] Simonnard M., *Programmation Linéaire*, Dunod, Paris, 1962.

[Van96] Vanderbei Robert J., *Linear Programming, Foundations and Extensions*, Kluwer, Boston, 1996.

Índice alfabético