LOS GRÁFICOS EXISTENCIALES PEIRCEANOS

SISTEMAS DE LÓGICAS DIAGRAMÁTICAS DEL CONTINUO:

HOROSIS, TRÁNSITOS, REFLEJOS, FONDOS

FERNANDO ZALAMEA

LOS GRÁFICOS EXISTENCIALES PEIRCEANOS

SISTEMAS DE LÓGICAS DIAGRAMÁTICAS DEL CONTINUO:
HOROSIS, TRÁNSITOS, REFLEJOS, FONDOS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

CONTENIDO

[The] purpose of the System of Existential Graphs [is] to afford a method for representing propositions
(1) as *simple* as possible (that is to say, with as small a number of arbitrary conventions as possible),
(2) as *iconically*, or diagrammatically and
(3) as *analytically* as possible.

[c. 1905; CP 4.561]

Existential Graphs enable me here and there greatly to abridge the labor and increase
the exactitude of my thought by putting intricate logical relations
in the forms that display to me precisely what they involve.

[c. 1910; CP 7.103]

My reason for expressing [definitions] in Existential Graphs is that if one learns to think of relations
in the forms of those graphs, one gets the most distinct and ecthetically as well as otherwise intellectually,
iconic conception of them likely to suggest circumstances of theoric utility,
that one can obtain in any way.

[1908; CP 4.619]

The System of Existential Graphs recognizes but one mode of combination of ideas, that by which
two indefinite propositions define, or rather partially define, each other on the *recto* and
by which two general propositions mutually limit each other upon the *verso*;
or, in a unitary formula, by which two indeterminate propositions
mutually determine each other in a measure.

[1906; CP 4.583]

My *chef d'oeuvre*.

[1908; Carta a Jourdain]

INTRODUCCIÓN

Los gráficos existenciales, considerados por Peirce como su "obra maestra", no han contado con la gloria que merecen. Su falta de impacto se debió, en los comienzos de la recepción de la obra de Peirce, a dos infortunados eventos ocurridos en Harvard. Por un lado, la aparición de algunos fragmentos de la lógica gráfica en el volumen IV (1933) de los *Collected Papers* se entreveró con los problemas de desmembración arbitraria de la edición, impidiendo una justa comprensión del amplio proyecto peirceano. Por otro lado, una condescendiente reseña de Quine (1934), fulgurante meteoro de la lógica en Harvard, descalificó la visión gráfica de Peirce. Luchando contra esos ominosos augurios iniciales, la recepción correcta y el desarrollo de los gráficos peirceanos han vivido desde entonces dos momentos privilegiados: el año 1963, con las tesis doctorales de Roberts y de Zeman, asociadas a la precisa comprensión técnica de los sistemas ALFA, BETA y GAMA, y las dos décadas 1990-2010, con los aportes definitivos de Burch, Brady, Trimble y Oostra en el entendimiento de los *fondos matemáticos naturales* –topológico, categórico e intuicionista– de los gráficos.

Casi ochenta años después de la edición Harvard y de la torpe reseña de Quine, los gráficos parecen haber alcanzado ahora (2010) un importante *umbral* desde el cual poder despegar *allende Peirce*. De hecho, si los trabajos de Roberts y Zeman, con sus teoremas de *caracterización* para ALFA (cálculo proposicional clásico), BETA (lógica clásica de primer orden sobre un lenguaje puramente relacional) y GAMA (sistemas modales intermedios tipo Lewis) habían precisado las ideas *deductivas* de Peirce, y, a su vez, Burch había *demostrado* que en un cálculo *topológico* de relaciones la tríada 1-2-3 se requería en toda su plenitud (3 *no* reducible a combinaciones 1-2, tal como insistía Peirce), por otros caminos, Brady y Trimble han propuesto *nuevos modelos categóricos* para ALFA y BETA, mientras Oostra ha construido un *cálculo intuicionista con nuevos conectivos* para la lógica gráfica. La *ampliación* del lenguaje, del cálculo y de la semántica abre entonces perspectivas enteramente originales allende el mismo Peirce.

En la estela de *El continuo peirceano*, publicado por esta misma editorial hace ya una decena de años (2001), pretendemos con *Los gráficos existenciales peirceanos* ampliar nuestras reflexiones acerca de los problemas de conceptualización y representación de una *lógica del continuo*, considerada por Peirce como la base de todo su sistema filosófico. Aprovechando un tratamiento pendular analítico/sintético –que definiremos más adelante como “horótico” (de *horos*, borde, límite)–, intentaremos abordar en esta breve monografía los sistemas de gráficos existenciales desde dos perspectivas centrales: *(i)* exploración del fondo filosófico y metodológico de los gráficos, *(ii)* contrastación de las ideas peirceanas con posteriores técnicas aledañas de la matemática del siglo XX. Es importante distinguir claramente nuestro trabajo de otros tantos dedicados a los gráficos de Peirce, y señalar por tanto lo que esta monografía *no* es: (1) no se trata de una detallada, rigurosa, formal y autocontenida presentación matemática de los sistemas de gráficos existenciales (próximamente disponible por vez primera en [Oostra 2011]), (2) no pretende proveer una visión genética de los gráficos, que glose y complete las perspectivas del propio Peirce (visiones disponibles desde las tesis doctorales [Roberts 1963] y [Zeman 1963]), (3) no se restringe a consideraciones sintácticas y lingüísticas sobre los gráficos [Shin 2002], completamente ajenas al *fondo* del programa *sinequista* –semántico y pragmático– de Peirce.

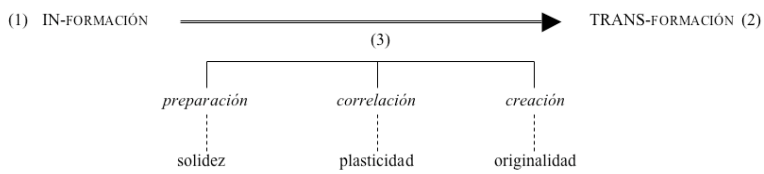
De manera positiva, nuestro énfasis puede entenderse, en cambio, como una *reflexión crítica* sobre los gráficos. La *crítica* detecta ideas centrales –que retenemos mediante el subtítulo *horosis, tránsitos, reflejos, fondos*–, describe transformaciones, modulaciones y expresiones parciales de esas ideas centrales, y plantea diversos problemas asociados. En particular, nos interesará resaltar el lugar de los gráficos dentro de la *arquitectónica* general de Peirce (tránsitos, reflejos) y su contenido *semántico* matemático (horosis, fondos). Así como la crítica literaria *presupone* un cierto conocimiento de las obras literarias examinadas, o como la crítica de arte lo hace con las obras plásticas, nosotros aquí también *asumiremos un conocimiento previo de los gráficos existenciales* (a la espera de [Oostra 2011], los libros [Roberts 1973] y [Thibaud 1982] son en ese sentido los más recomendados). Esto explica el hecho *aparentemente peculiar* de que, en una monografía sobre gráficos, muy pocos sean los gráficos explícitos que aparecen incluidos en el texto. Entendiendo la monografía como *reflexión crítica* y no como exposición sistemática, la *ausencia* de los gráficos resulta más comprensible. Las apariciones de gráficos corresponden así a recordatorios mínimos (pp. 26, 65, 79, 94) o a construcciones no estándar (intuicionistas, pp. 48, 55, 56, 57; modal primer orden, p. 90; modal segundo orden, p. 99).

Al *no estar autocontenido* y al exigir del lector lecturas previas, este estudio, inevitablemente influenciado por las tendencias ensayísticas del autor, puede incomodar. De hecho, al no estar tan bien delimitado como los volúmenes anteriores sobre los gráficos, el ensayo explora *bordes borrosos antinómicos*: sin probar nada rigurosamente, se sugieren sin embargo los fondos conceptuales de las pruebas; sin realizar un desglose analítico, se proponen no obstante metáforas filosóficas (siguiendo los métodos de trabajo de Warburg, Cassirer, Benjamin o Blumenberg); sin disecar gramaticalmente los objetos en cuestión, se lanzan cruzamientos etimológicos que impulsan a mirar las variaciones evolutivas y dinámicas de las nociones en juego. El resultado –como sucedía con *El continuo peirceano*– es lo que quisiéramos llamar una *monografía crítica y programática*, donde más que soluciones y exposiciones bien acabadas, se enfatizan problemas y se intentan abrir eventuales caminos para la invención.

El ***capítulo 1*** aborda la problemática de los gráficos existenciales como modelo acotado de una lógica del continuo, mucho más general, que recorre todo el pensamiento peirceano. Observamos cómo muchas de las características fundamentales de los gráficos responden de manera precisa a una dialéctica incesante de reflejos y de transmisión de conocimiento a través de fronteras adecuadas. En particular, *la regla de iteración/desiteración se erige como uno de los mayores descubrimientos de Peirce*, un descubrimiento que ya en sí es profundamente lógico (ligado a una noción de conectivo intuicionista arbitrario), pero que además resulta ser profundamente *horótico* en un sentido amplio que exploramos en el capítulo. El ***capítulo 2*** reflexiona sobre la emergencia del sistema ALFA en el *Logic Notebook* y en las *Lowell Lectures*, y muestra cómo una dialéctica topológica horótica del recto y el revés guía las mejores intuiciones de Peirce. El grueso del capítulo se orienta, no obstante, a describir los *nuevos avances* alrededor de ALFA: construcción de gráficos intuicionistas [Oostra 2009, 2010a, 2010b], modelos categóricos para ALFA [Brady & Trimble 2000a], posibilidad de otros modelos alternativos vía variable compleja [Zalamea 2008b]. La riqueza matemática, filosófica y metodológica de estos aportes abre un panorama enteramente nuevo para el desarrollo de los gráficos existenciales en la próxima década.

El ***capítulo 3*** aborda la noción de *identidad* desde una perspectiva filosófica general. La identidad se asocia a un orden y a una razón subyacentes (*logos*, de la raíz **leg*, recolectar, sintetizar), y, en particular, la línea de identidad BETA recolecta la dialéctica pendular de tránsitos continuos y quiebres discontinuos de información. Observamos cómo las primeras apariciones de la línea de identidad en el *Logic Notebook* ya contemplan la aporía fundadora central de la matemática, es decir, según Thom, la *irresoluble antinomia* continuo/discreto, y notamos cómo, desde muy temprano, Peirce detecta la principal falla de BETA: su falta de expresividad para símbolos funcionales. El capítulo termina estudiando los modelos categóricos clásicos para BETA propuestos en [Brady & Trimble 2000b], algunas de cuyas extensiones intuicionistas deben ser de relieve [Zalamea 2010]. El ***capítulo 4*** reflexiona sobre los cálculos modales intermedios obtenidos al acotar una *jerarquía de permisos* iteración/desiteración para tipos específicos de gráficos GAMA. Las grandes intuiciones de Peirce sobre el *revés* de la hoja de aserción como ámbito de posibilidades y sobre un *libro de hojas* como colección de mundos posibles vertebran el capítulo, que concluye con conexiones naturales entre modalizaciones de los gráficos y árboles de Kripke, con ciertos tránsitos modales en la arquitectónica peirceana y con algunas aproximaciones al *summum bonum*. Finalmente, el ***capítulo 5***, más abierto a la especulación, describe otras vías de *extensión* de los gráficos existenciales. Permitiendo la variabilidad de *tipos* (lógicas) y *topos* (geometrías), se puede llegar a intuir una pragmática *sistémica* de los gráficos, con reflejos específicos describibles dentro de los topos elementales de Lawvere. Subrayamos cómo ciertas extensiones GAMA se encuentran estrechamente ligadas a algunas de las tareas más profundas de la arquitectónica peirceana, y concluimos esbozando un par de programas de trabajo en esa dirección.

Laboratorio privilegiado del pensamiento tardío de Peirce, los gráficos existenciales constituyen una singular aventura de la *inteligencia*. Si ésta se puede definir como la capacidad de *trans/formar* una colección de información dada y *producir* nueva información relevante, la "inteligencia" puede esquematizarse en el diagrama siguiente como el paso de (1) a (2) mediante técnicas apropiadas (3).



En esa fluctuación, la inteligencia se basa entonces sobre una adecuada solidez disciplinar y una buena preparación, pero no se reduce a ello. La inteligencia requiere también, por un lado, *capacidad plástica*, *capacidad de correlacionar* en modos nuevos la información, pero, sobre todo, *capacidad creativa*, altura original, para construir nuevas formas (usualmente complejas) del saber. De manera asombrosa, los gráficos existenciales peirceanos *median en el TRANS*, responden a esas exigencias imaginativas de la inteligencia y merecen entenderse como una de las mayores creaciones lógicas de la humanidad.

A nuestro entender, esta monografía provee *por vez primera* una serie de perspectivas de segundo orden para tratar de entender el panorama de los gráficos existenciales *en su multiplicidad plena*. Nuestro énfasis consiste en explorar el *fondo matemático* de los gráficos, pero siempre teniendo en cuenta su *cuádruple ramificación natural*: lógica, semiótica, filosófica y arquitectónica. El carácter universal de nuestra aproximación va en detrimento de su detallado desarrollo, y, en ese sentido, creemos que esta monografía se completará de manera natural con el esperado trabajo complementario [Oostra 2011]. La conjunción de esos dos textos podrá servir entonces de adecuado colofón a la conformación de una suerte de *escuela colombiana de gráficos existenciales* (trabajos básicos: [Oostra 2008, 2009, 2010a, 2010b], algunas tesis dirigidas por Oostra en la Universidad del Tolima, [Poveda 2000], [Zalamea 1997, 2001, 2003, 2007, 2008b, 2008c, 2010]). La *vida de los gráficos existenciales* se encuentra en pleno auge, y las incursiones colombianas en el panorama dejan constancia de ello.

Agradecemos especialmente a Arnold Oostra, con quien, desde el año 1997, empezamos la aventura de adentrarnos en la *Terra Incognita* de la matemática de los gráficos existenciales. Como alumno primero, luego como colega, y ahora como nuestro Maestro, Oostra ha impulsado con su usual brillantez el estudio de los gráficos en Colombia. Su *Seminario Permanente Peirce*, en la Universidad del Tolima, es un ejemplo de constancia y tesón, allende circunstancias que podrían parecer bastante poco favorables. El descubrimiento/invención de los *gráficos existenciales intuicionistas* por parte de Oostra constituye, a nuestro entender, el *mayor aporte original* a la bibliografía peirceana realizado en la historia entera de los aportes latinoamericanos. Nuestros agradecimientos estrechos van también a Jaime Nubiola, quien, desde el año 2000, no ha dejado de prodigar esfuerzos e invitaciones para que habláramos del continuo peirceano y de los gráficos existenciales en el ambiente paradisíaco de su *Grupo de Estudios Peirceanos* de la Universidad de Navarra. La amistad que nos une desde entonces y el

resultado consiguiente [Nubiola & Zalamea 2006] han sido dos pilares cruciales que nos han impulsado en el campo de los estudios peirceanos. Va también nuestro agradecimiento a los colegas colombianos del *Centro de Sistemática Peirceana – CSP*, con quienes hemos discutido a menudo el papel especial de los gráficos existenciales dentro del pensamiento de Peirce; debemos aquí gratísima deuda a Roberto Perry, cuyas profundas ideas, disfrazadas en algunos de nuestros argumentos técnicos, recorren incesantemente estas páginas, y cuya invención original del término "horosis" proporcionó la requerida *clave de bóveda* para poder acoplar esta monografía en su conjunto. A lo largo de la última década, diversas conversaciones y correspondencia con André De Tienne, Jérôme Havenel, Nathan Houser, Matthew Moore, Marco Panza, Jean Petitot y Ahti-Veikko Pietarinen nos reforzaron en la importancia de resaltar decididamente el legado lógico de Peirce. Finalmente, agradecemos a Giovanni Maddalena, Rossella Fabbrichesi y Rosa Calcaterra por sus gentiles invitaciones a discutir nuestras propuestas en Italia; no dejaremos de recordar el ambiente de emoción y entusiasmo generado por Maria Luisi y sus colegas de estudio, en una recóndita pizzería de Milán, al hablarles de las posibles conexiones entre la lógica gráfica de Peirce y la lógica de haces de Caicedo. Dos lecturas muy detalladas del manuscrito, por parte de Nubiola y de Oostra, eliminaron imperfecciones y añadieron precisiones, pero, por supuesto, los errores remanentes se deben únicamente a los descuidos del autor.

Noticia sobre las referencias a Peirce

En este trabajo se hace referencia *básicamente* a textos de Peirce ya publicados, con incursiones adicionales en el *Logic Notebook* y en algunos (pocos) textos inéditos. Para una ocasión futura queda el proyecto de contrastar esta visión con una revisión extensa de los manuscritos inéditos (*The Charles S. Peirce Papers,* microfilm edition, Cambridge: Harvard University Library, Photographic Service, 1966: edición microfilmada de las cerca de 100.000 páginas de manuscritos peirceanos).

Las fuentes de los textos de Peirce que hemos usado en esta monografía, y que forzamos a permanecer en el inglés original, son las siguientes:

[CP] C.S. Peirce, *Collected Papers*, 8 vols. (eds. Hartshorne, Weiss & Burks), Bristol: Thoemmes Press, 1998 (reedición de la edición original de Harvard University Press, 1931-1958). Edición electrónica (CD-ROM): Intelex Corporation, 1992.

[W] C.S. Peirce, *Writings (A Chronological Edition)*, 7 vols. hasta la fecha (edición contemplada en 30 vols.), Bloomington: Indiana University Press, 1982-2009.

[NEM] C.S. Peirce, *The New Elements of Mathematics*, 4 vols. (ed. Eisele), The Hague: Mouton, 1976.

Para mayor comodidad del lector, y dada la peculiar importancia que adquiere la evolución cronológica del pensamiento peirceano, cada cita de un texto de Peirce se hará referenciando entre corchetes cuadrados [ ] el año en que se produjo y, luego, enviando a la recopilación, al volumen (si es el caso) y a la página (o al párrafo, cuando se trata de los *Collected Papers*) de donde se toma la cita. Por ejemplo, [c.1896; CP 1.417] envía a un texto cercano a 1896, recopilado en el primer volumen de los *Collected Papers*, párrafo 417. No pretenden normalizarse aquí, sin embargo, los diversos cruzamientos y divergencias entre las diferentes recopilaciones de los escritos peirceanos.

CAPÍTULO 1

EL LUGAR DE LOS GRÁFICOS EXISTENCIALES EN UNA LÓGICA DEL CONTINUO. HOROSIS, TRÁNSITOS, REFLEJOS, FONDOS

Los gráficos existenciales de Peirce pueden considerarse como una de las invenciones más *originales* y *profundas* de la historia de la lógica. Su originalidad es producto de la emergencia de los gráficos como instrumentario *solidario* y *coherente* de la arquitectónica peirceana, instrumentario con el cual ayudan a precisarse algunas de las preguntas mayores del sistema filosófico de Peirce (continuidad, semiosis, pragmatismo, teorías del flujo y del tránsito). Su profundidad se debe a una combinación excepcional de sencillez sintáctica (reglas elementales de formación), de plasticidad pragmática (reglas universales de deformación) y de explosiva riqueza semántica (modelos sofisticados en topología, lógicas del continuo, variable compleja y teoría de categorías), una riqueza insospechada por el mismo Peirce pero estrechamente ligada a sus tendencias topológicas y estructurales *avant la lettre*. Nuestro cometido en esta monografía consistirá en intentar develar, con suficiente detenimiento, esa originalidad y esa profundidad. Estaremos atentos, por tanto, a tres tareas centrales: *(i)* explicitar algunos *reflejos y tránsitos* entre la arquitectónica global del sistema peirceano y sus concreciones locales en los gráficos; *(ii)* describir diversos *enlaces sintaxis/pragmática* en la conformación de los gráficos, con los cuestionamientos epistemológicos que ello implica, en particular, la emergencia natural de una honda noción de *horosis* (término debido a Roberto Perry, de *horos*, borde, límite), método medio entre análisis y síntesis; *(iii)* explorar la riqueza sorprendente de los *fondos matemáticos estructurales* implícitos en los gráficos, gracias a muy diversos modelos parciales (semántica) ligados a problemas de representación.

Dos tendencias opuestas en la recepción de la obra de Peirce han creído encontrar en los escritos peirceanos, por un lado, un cúmulo de reflexiones asistemáticas, tan diversas como imaginativas y desordenadas, y, por otro lado, una arquitectónica compleja, eminentemente inacabada, pero con claras fuerzas y estructuras de sostén en su ordenamiento racional. Sin entrar en un difícil debate que no nos concierne aquí, adoptaremos de entrada la hipótesis de que la obra de Peirce puede entenderse desde un punto de vista arquitectónico, a pesar de ciertas inevitables lagunas dentro de la armazón del sistema. Uno de nuestros objetivos centrales (combinación de fragmentos de las tareas *(i)*-*(iii)* recién señaladas) consiste, de hecho, en consolidar los andamiajes de acoplamiento para la arquitectónica peirceana gracias a sus *reflejos en el* *ámbito de los gráficos existenciales*, y gracias a la *introducción de herramientas de la matemática contemporánea* (lógicas no clásicas, teoría de categorías, haces, variable compleja) en la modelización parcial de esos reflejos. Se tratará, como veremos, de un andamiaje distanciado de los fundamentos (y alejado por tanto de las tendencias analíticas de la teoría clásica de conjuntos), que realza una serie de entrelazamientos estructurales en el edificio, y que permite situarlo como "a castle in the air" [Murphey 1961, p. 407], sin demeritar por ello la solidez y el rigor requeridos en la elevación de la arquitectura. Prosiguiendo con la metáfora de Murphey, el sistema peirceano merece entenderse en realidad, no como una construcción con fundamentos verticales, al estilo de la Tour Eiffel, propia de los comienzos del siglo XX, sino como una estructura repleta de enlaces transversales horizontales, al estilo de la Mediateca de Sendai de Toyo Ito, "a castle in the air" translúcido y sin fundamentos, propio de los comienzos del siglo XXI.

Recordamos brevemente ahora algunas de las características básicas de los gráficos existenciales peirceanos, para poder proceder a una discusión "desde lo alto" en este capítulo. Los *capítulos 2-5* proveerán luego muchas precisiones sobre los diversos sistemas de gráficos y asegurarán un estudio detenido "desde lo bajo". Los gráficos existenciales cubren, a la *manera pragmática*, tanto el cálculo proposicional clásico (gráficos existenciales ALFA) y la lógica clásica de primer orden sobre un lenguaje puramente relacional (gráficos existenciales BETA), como cálculos modales intermedios, lógica clásica de segundo orden y manejos del metalenguaje (gráficos existenciales GAMA). Sobre una hoja de aserción en blanco, mediante precisas reglas de control, se demarcan algunos cortes posibles, a través de los cuales *se introduce, se elimina y se transmite información*. La idea básica de Peirce consiste en que el conocimiento se obtiene mediante cortes y traslados de información (*obstrucciones y tránsitos*), gracias a diversas correlaciones entre distintas regiones del saber. Las marcas que se van consignando en la hoja de aserción permiten que la información lógica evolucione de lo indeterminado a lo determinado, gracias a la incorporación técnica de un *lenguaje gráfico formal*, *reglas* y *axiomas* (ver [Roberts 1963], [Zeman 1963], [Oostra 2011]), resumidos concisamente en la siguiente figura:

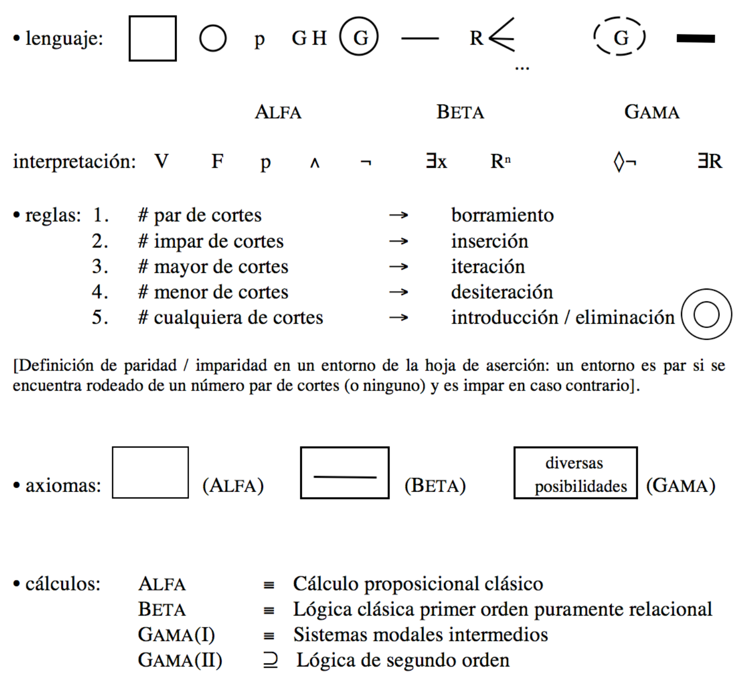


Figura 1
Sintaxis y pragmática de los sistemas de gráficos existenciales

Mediante los gráficos existenciales, Peirce consigue definir acotadamente, en lo local, ciertas tendencias centrales de su pensamiento. La idea misma de construir reflejos de lo global (arquitectónica) en lo local (gráficos) es una consecuencia inmediata del entrelazamiento transversal entre los arcos estructurales del sistema peirceano (máxima pragmaticista, tres categorías, semiótica universal, adjunción indeterminación/determinación, clasificación triádica de las ciencias), un entrelazamiento que jerarquiza naturalmente el gran edificio en distintas regiones y niveles que se comunican sin cesar. Los sistemas de gráficos existenciales, que Peirce consideraba como su *chef d'oeuvre* (carta a Jourdain, diciembre 5 1908, [Roberts 1973, p. 110], [NEM 3,885]), reflejan *icónicamente* algunos de los cruces transversales más sorprendentes y fructíferos de su sistema filosófico. De hecho, la hoja de aserción ALFA, *hoja continua* sobre la que se marcan los gráficos existenciales, sirve de ícono para reflejar la *continuidad de lo real (terceridad)*, mientras que la línea de identidad BETA, *trazo continuo* que abre la posibilidad de cuantificar sobre lo real, sirve de ícono para reflejar la *continuidad de la existencia (segundidad).* De esta manera, por ejemplo, un continuo real, tercero, puede pensarse, postularse y conocerse, *antes mismo* de que ciertas marcas de existencia segunda empiecen siquiera a imaginarse. Por otro lado, las reglas fundamentales que subyacen en la radical novedad de los gráficos –las reglas de *iteración/desiteración*– son concreciones técnicas de la gran maquinaria de ósmosis transversales propias del pensamiento peirceano, incesantemente transdisciplinario y a menudo brillantemente original gracias a la traslación de conceptos entre disciplinas diversas. Finalmente, los axiomas para los gráficos muestran que la existencia (línea de identidad) es, *simultáneamente*, un *quiebre de continuidad en lo real general* (hoja de aserción en blanco), así como una *ligazón continua en lo particular* (extremos de las líneas de identidad). Las líneas de identidad, sub-reflejos continuos de la hoja de aserción, al marcarse autorreflexivamente en el continuo general, permiten construir el paso de la esencia a la existencia. Los axiomas elementales de los sistemas básicos de gráficos existenciales sustentan así la idea –central en filosofía (presocráticos, Peirce, Heidegger)– de que una primera *autorreflexión* de la nada sobre la nada es la chispa inicial que genera la evolución del conocimiento.

Peirce señalaba, con toda justicia, que los gráficos existenciales proporcionaban una plena apología del pragmaticismo. Sobre el *continuo peirceano*, entendido como espacio general de las posibilidades puras ([Zalamea 2001], [Havenel 2006], [Moore 2010]), se construye en efecto el conocimiento por medio de *procesos de acción-reacción universales*: *inserción/extracción, iteración/desiteración, dialéctica sí/no*. Una plena apología del pragmaticismo se obtiene al observar que la axiomatización del cálculo proposicional clásico y de la lógica clásica de primer orden puramente relacional, *con las mismas reglas*, por medio de los sistemas ALFA y BETA, explicita raíces *técnicas* comunes desapercibidas en las presentaciones actuales de la lógica clásica. En efecto, las mismas reglas detectan, en el contexto del lenguaje ALFA, un manejo proposicional, y en el contexto extendido del lenguaje BETA, un manejo cuantificacional: algo incomprensible para cualquier estudiante de lógica educado dentro de sistemas del tipo Hilbert. Así –acorde tanto con la máxima pragmaticista como con el realismo peirceano– los cálculos ALFA y BETA muestran que existe un núcleo, *un real general* que subyace a la transmisión lógica de información, un núcleo que, en ciertos contextos de simbolización, da lugar a los modos clásicos de conexión, y que, en otros contextos, da lugar a los modos clásicos de cuantificación. Las reglas de iteración/desiteración codifican la *naturalidad* de los operadores lógicos tradicionales; como veremos más adelante, no se trata sólo de una naturalidad filosófica, sino de la naturalidad propia (y técnicamente bien definida) de los transmisores fundamentales de información de la teoría matemática de categorías. Las raíces comunes de los conectivos y los cuantificadores clásicos se revelan en un *mismo* accionar-reaccionar *pragmático*, *global y general*, que en *diversos* contextos de simbolización da lugar a reglas derivadas, *locales y particulares*, propias del contexto.

Esta situación es toda una revelación en la historia de la lógica, aún no plenamente apreciada; en cualquier caso, constituye, de manera precisa, la *única* presentación conocida de los cálculos clásicos que utiliza globalmente las mismas reglas axiomáticas para controlar el manejo local de los conectivos y de los cuantificadores. A su vez, la apología del pragmaticismo conseguida con los gráficos existenciales (reflejo local) muestra la coherencia del sinequismo (arquitectónica global). Las reglas, aparentemente discretas, de los conectivos y los cuantificadores clásicos se corresponden *continuamente* sobre un fondo genérico común; sus aparentes diferencias sólo son contextuales y pueden verse como quiebres de la continuidad lógica subyacente. Pero *aún más allá* del ámbito clásico, como lo indicaremos repetidas veces en esta monografía, se tienen también apoyos matemáticos para sustentar que el sinequismo tiene un rango de validez más amplio, englobando formas alternativas del continuo lógico (continuo intuicionista, continuo categórico y continuo peirceano).

La *horosis*, consideración de los bordes y límites del saber, debe servir de mediadora entre análisis y síntesis. Entre descomposición (análisis) y composición (síntesis), las *formas medias de transición* entre lo elemental y lo relacional gobiernan a menudo muchos de los más importantes movimientos del pensamiento. En particular, los *momentos de emergencia creativa*, aún vagos, aún en transición pendular entre lo descompuesto y lo estructurado, forman parte de lo que debería ser un pensamiento horótico muy general. En los gráficos existenciales, muy diversas formas de horosis entran en juego. La página en blanco, al ser progresivamente marcada, es testigo de la *emergencia* de ciertas verdades lógicas. Los cortes son signos icónicos del *horos* (borde) mismo; no sólo los cortes ALFA sirven de delimitadores y extralimitadores (embrión estructural para las reglas de desiteración e iteración), sino que los cortes GAMA, con su amplitud de lecturas modales, sirven precisamente como *signos mixtos de tránsito* (al medio completarse hacia una cesura, es decir, al convertirse en corte ALFA en una región impar, o al medio borrarse hacia una contingencia, es decir, al provenir de un corte ALFA en una región par). La iteración/desiteración de la línea de identidad BETA es el paradigma de un proceso de continuidad, pero, al cruzar los cortes ALFA, la iteración/desiteración de la línea entra en un crucial proceso de horosis, que (como es sabido en BETA, ver *capítulo 3*) corresponde a la explicitación, en el lenguaje gráfico, de diversas formas normales para los cuantificadores. El manejo mismo de los gráficos, a través de sus reglas de formación/deformación, conforma otra expresión profunda, y sumamente original, de horosis: un enlace medio entre sintaxis (lenguaje) y pragmática (reglas), *independiente de las semánticas subyacentes*. La potencia gráfica y formal de los *bordes* (cortes ALFA y GAMA) y de los *límites* (línea de identidad BETA) asegura la vida, emergencia y evolución de los signos, independientemente de posteriores interpretaciones.

Entre el análisis y la síntesis, en el ámbito de la horosis, se sitúan los gráficos existenciales. Introducidos explícitamente por Peirce como instrumentos finos de *análisis* –"(...) a method for representing propositions (1) as *simple* as possible (...), (2) as *iconically*, or diagrammatically and (3) as *analytically* as possible" [c. 1905; CP 4.561]– los gráficos existenciales involucran también en realidad *(i)* en el último Peirce, una labor de *síntesis* del saber lógico, fruto de la directriz pragmática de sus reglas, *(ii)* en las semánticas posteriores de los gráficos, un proceder *sintético* naturalmente acorde con el proceder de la teoría de categorías (ver capítulos siguientes). Los gráficos existenciales proporcionan, además, una sofisticada *red de mediaciones entre aparentes polaridades* del pensamiento matemático. Al basarse sobre una cómoda *intuición* visual, sobre una flexible capacidad *teoremática* (prontas equivalencias diagramáticas, alejadas de artificiales manipulaciones lineales) y sobre una evidenciable facilidad *práctica* (labores en la Universidad del Tolima, donde, comparando dos desarrollos paralelos de los cálculos proposicionales, vía gráficos existenciales y vía sistemas de tipo Hilbert, Arnold Oostra ha logrado obtener una mayor plasticidad y un mejor entendimiento en sus estudiantes al adoptar el camino peirceano), los sistemas de gráficos existenciales combinan "lo mejor de cada mundo".

Las categorías *cenopitagóricas* de Peirce intentan propagar en el entendimiento prácticas de novedad, frescura, originalidad ("ceno", proveniente del griego *kaino* – fresco; véase Ms. 899, c. 1904, inédito traducido en [Fabbrichesi 1992, p. 129]). Una lectura contemporánea de esa frescura, propuesta por Roberto Perry, sugiere una ligera deformación del "ceno" hacia "cieno" (proveniente del latín *caenum* – lodo, mezcla). El sistema de Peirce, de hecho, puede entenderse a nuestro modo como el más sofisticado sistema científico y filosófico del último siglo para un entendimiento fresco y creativo de las mezclas del saber, es decir, de la *horosis*, como hemos venido denominándola aquí. Alejado de los muchos purismos, finalmente ilusorios, pero siempre enfermizos reductores de la imaginación, que periódicamente acechan a la cultura, Peirce aborda sin tapujos las *contaminaciones* del entendimiento, proveyendo pendularmente diversas técnicas (A: analíticas) de "prescisión" y otras (B: sintéticas) de "pegamiento": separación (A) e iteración (B) en la clasificación triádica de las ciencias, diferenciación contextual (A) y reintegración pragmática (B) en la máxima pragmaticista, acotación sintáctica (A) y reglas de manejo pragmático (B) en diversos sistemas lógicos, etc. En el *horos* de esos ires y venires, en una *red de fronteras*, se eleva el *genio* de Peirce, acorde con la famosa frase de Bajtin según la cual "todo acto cultural vive, de manera esencial, en las fronteras: en esto reside su seriedad e importancia; alejado de las fronteras pierde terreno, significación, deviene arrogante, degenera y muere" [Bajtin 1924, p. 30]. La arrogancia y degeneración (ya que no muerte) de algunas mal llamadas corrientes "duras" de la filosofía analítica podría ser un ejemplo que contrasta con el pragmaticismo "enlodado" de Peirce.

Una bella cita, casi del todo desconocida a pesar de su extraordinaria profundidad y fecundidad, muestra cómo las tres categorías *ceno*pitagóricas pueden entenderse *etimológicamente* como modos plenos de una horosis extendida, alrededor del estudio de los *orígenes*, las *obstrucciones* y los *tránsitos* del saber, es decir, del estudio de actos contaminantes de frontera:

> The simplicity and pervasiveness of the categories render metaphorical designations quite impossible, since such a term, if at all appropriate, would contain the very category. There can be no *resemblance* to a category. A metaphorical name would probably contain the category in the first syllable, and the rest of the word would be padding. I prefer, therefore, to borrow a word, or still better, to compose one, which, etymologically, if it may be, but by similarity with familiar words, indispensably, shall suggest a number of shapes in which the category is prominent. I propose to take the following terms on probation. *Originality* is being such as that being is, regardless of aught else. *Obsistence* (suggesting *obviate, object, obstinate, obstacle, insistence, resistance,* etc.) is that wherein secondness differs from firstness; or, is that element which taken in connection with Originality, makes one thing such as another compels it to be. *Transuasion* (suggesting *translation, transaction, transfusion, transcendental,* etc.) is mediation, or the modification of firstness and secondness by thirdness, taken apart from the secondness and firstness; or, is being in creating Obsistence. [1902; CP 2.87-89]

Los prefijos OR (de *air* – primero, antes), OB (*ob* – hacia, opuesto) y TRANS (de *trare* – través, pasar) se esconderían así en el fondo arquetípico de las tres categorías cenopitagóricas, captando concisamente, en su núcleo, las características básicas de lo primero, lo segundo y lo tercero. De manera más precisa, siguiendo una lectura de [Watkins 2000, pp. 6, 23, 91] sugerida, una vez más, por Roberto Perry, OR (nórdico *aër*, antes; griego *ëos*, aurora) invita a emergencias del saber, OB (griego *epi*; latín *op*) somete esas emergencias a constrastaciones bipolares, y TRANS (latín *trans, tera, terh*, pasaje, cruce) multi-dinamiza las polaridades a lo largo de redes de pasajes.

La *horosis* está ligada a ideas de "continuidad" y "plasticidad", entendidas como instancias de "generalidad" en el siguiente sentido peirceano: "Continuity is nothing but perfect generality of a law of relationship" [1901; CP 6.172] – "But we must search for this generalizing tendency rather in such departments of nature where we find plasticity and evolution still at work" [1898; CP 7.515]. La continuidad se obtiene como "generalidad perfecta" correlativa, es decir como una contigüidad genérica donde se borran individuaciones, instancias particulares, marcas actuales. En lo continuo, más allá de la singularidad del objeto y de sus contingencias externas, priman así la *estructura* y la riqueza *intrínseca* del concepto. Por su lado, las transformaciones progresivas de lo particular hacia el hábito ("tendencia generalizadora") pueden observarse mejor en ciertos departamentos plásticos de la naturaleza. En lo plástico, más allá de la quietud de lo particular y de sus contenidos internos, priman la *transformación* y la evolución *extrínseca*. En una suerte de oscilación pascaliana simplificada, la *dialéctica horótica* continuidad/plasticidad puede entonces codificarse por medio de la correspondencia de las "razones" (continuidad / *estructurabilidad intrínseca general*) ≡ (plasticidad / *transformatividad extrínseca general*).

La plasticidad requiere postular un ámbito de *posibilidad de deformaciones*. Esas deformaciones posibles entran dentro de la estética (forma "OB-sistente" de primeridad: 2.2.1 en la clasificación triádica de las ciencias), cuando se orientan a ampliar el *summum bonum* de las ciencias normativas (descrito como "crecimiento continuo de la potencialidad" [1905; CP 5.433]). La continuidad, por su lado, provee ese ámbito de todos los posibles, gracias precisamente al *continuo peirceano*, genérico, supermultidudinario, reflexivo, modal [Zalamea 2001]. Una exploración inicial de ese continuo peirceano se realiza dentro de la matemática (forma "OR-iginal" de primeridad: 1 en la clasificación triádica de las ciencias). El *lodazal* adquiere luego su razón de ser ("su seriedad e importancia") cuando la continuidad y la plasticidad entran a combinarse, a contaminarse entre sí.

Algunas *transformaciones* (o *mixturaciones* jerárquicas, en el sentido de Lautman) de continuidad y plasticidad en los gráficos existenciales peirceanos son particularmente impactantes. Creemos en efecto que el *chef d'oeuvre* de Peirce combina una riqueza plástica y matemática sin igual, al acercarse con enorme fuerza *autorreferencial* al *summum bonum* peirceano, pues, de hecho, el desarrollo iterativo de los gráficos conforma una suerte de *forma canónica de crecimiento continuo de la potencialidad*. La génesis misma de los gráficos existenciales muestra cómo éstos van surgiendo *progresivamente*, ampliando continuamente su potencial. Desde una acotada experimentación diagramática sobre los cuantificadores (carta a Mitchell, 1882), pasando por variaciones generales sobre la forma matemática (comentarios a artículos de Kempe, 1889), hasta llegar a la invención de los gráficos existenciales (*Logic Notebook*, 1896) y a la organización final de los sistemas ALFA, BETA, GAMA (*Lowell Lectures*, 1903), el recorrido de Peirce muestra un permanente crecimiento de las posibilidades expresivas, inventivas y demostrativas de los gráficos.

Las apariciones horóticas de temas de continuidad y plasticidad en los *Collected Papers* son escasas, aunque fundamentales. En [1803; CP 4.448], la línea de identidad, que representa el cuantificador existencial y que emerge de la primera experimentación diagramática realizada por Peirce en 1882, es considerada en toda su *riqueza umbral*, pues aparece *a la vez* como símbolo (representa una ley general), índice (se construye como encuentro factual entre puntos, fijando un direccionamiento de la atención) e ícono ("it appears as nothing but a continuum of dots, and the fact of the identity of a thing, seen under two aspects, consists merely in the continuity of being in passing from one apparition to another"). La *continuidad del pasaje* entre dos puntos, a través de la línea, asegura la identidad de los opuestos ($\exists x \exists y(x=y)$). Yendo aún más allá, Peirce asegura que diversas formas de continuidad encarnan respectivamente en la hoja de aserción y en la línea de identidad:

> The line of identity very explicitly represents Identity to belong to the genus Continuity and to the species Linear Continuity. But of what variety of Linear Continuity is the heavy line more especially the Icon in the System of Existential Graphs? In order to ascertain this, let us contrast the Iconicity of the line with that of the surface of the Phemic Sheet. The continuity of this surface being two-dimensional, and so polyadic, should represent an external continuity, and especially, a continuity of experiential appearance. Moreover, the Phemic Sheet iconizes the Universe of Discourse (...) So, on the principle that logicians call "the *Nota notae*" that the sign of anything, X, is itself a sign of the

> very same X, the Phemic Sheet, in representing the field of attention, represents the general object of that attention, the Universe of Discourse. [1906; CP 4.561, nota 1]

Las *variaciones horóticas de un continuo genérico* se abren aquí sobre dos formas de continuidad: continuidad "lineal" al considerar la línea de identidad BETA, continuidad "planar" al considerar el universo de aserción ALFA. Al desarrollar los sistemas, se observa cómo lo genérico, entendido como pegamiento virtual de todo lo posible, da lugar a dos operatorias actuales *aparentemente* contrastantes: en el contexto acotado ALFA, una operatoria de quiebres sobre el continuo (cortes y letras proposicionales), y, en el contexto acotado BETA, una operatoria de extensiones lineales (transformaciones de la línea de identidad). Pero esa multiplicidad aparente es, en realidad, un entramado arquitectónico unitario:

> In the gamma part of the subject all the old kinds of signs take new forms. . . . Thus in place of a sheet of assertion, we have a *book of separate sheets*, tacked together at points, if not otherwise connected. For our alpha sheet, as a whole, represents simply a universe of existent individuals, and the different parts of the sheet represent facts or true assertions made concerning that universe. *At the cuts we pass into other areas*, areas of conceived propositions which are not realized. In these areas there may be cuts where we pass into worlds which, in the imaginary worlds of the outer cuts, are themselves represented to be imaginary and false, but which may, for all that, be true, and therefore *continuous* with the sheet of assertion itself, although this is uncertain. You may regard the ordinary blank sheet of assertion as a *film* upon which there is, as it were, an undeveloped *photograph* of the facts in the universe. I do not mean a literal picture, because its elements are propositions, and the meaning of a proposition is abstract and altogether of a different nature from a picture. But I ask you to imagine all the true propositions to have been formulated; and since facts blend into one another, it can only be in a *continuum* that we can conceive this to be done. This continuum must clearly have more dimensions than a surface or even than a solid; and we will suppose it to be *plastic*, so that it can be

> deformed in all sorts of ways *without the continuity and connection of parts being ever ruptured*. Of this continuum the blank sheet of assertion may be imagined to be a *photograph*. [1903; CP 4.512, nuestros énfasis]

Siguiendo con las metáforas de Peirce, puede decirse que los gráficos GAMA y las transformaciones BETA de la línea de identidad son formas de cinematografía, mientras que los gráficos ALFA son formas de fotografía. Una *teoría plástica del montaje* (que incita a comparar estos temas con la obra crítica de Walter Benjamin, así como con otras reflexiones teóricas sobre el cine, véase [Colman 2009]) debe entonces gobernar las representaciones gráficas. Dos caminos son, en principio, viables: *construir* (en forma práctica) el rollo cinematográfico como pegamiento de fotogramas, o *imaginar* (en forma ideal) el *film* como un continuo virtual del que, poco a poco, se desprenderían los fotogramas. El realismo escolástico de Peirce, con sus múltiples transformaciones plásticas, nos fuerza a considerar una *contaminante mediación* entre ambas opciones. De hecho, una *tercera vía*, técnicamente sugerida en esos "cortes en los que pasamos a otras áreas", salta a la vista: nuestros modos de conocer no son más que *pasajes deformados* entre un continuo genérico que nos supera (el *film* de la evolución a nivel cosmológico, por ejemplo) y representaciones fenoménicas locales parciales (rollos cinematográficos). *En los cortes pasamos a otras áreas*: saltamos de nuestra construcción cinematográfica, ilusoriamente continua, a la conciencia de un *film*, realmente continuo, del que no somos más que insignificantes actores, y que parecer ser la instanciación misma del *fluir novalisiano general* de la Naturaleza.

Peirce introdujo más tarde su estrategia de las *tinturas* [1905; CP 4.553] como otro recurso gráfico para representar ámbitos de posibilidades, en forma afín a la riqueza del *libro de hojas*. En vez de saltar de una hoja dada, a través de un corte, a otro mundo, Peirce propuso tinturar fragmentos de una hoja y realizar un *cálculo de tinturas* para manejar los *pasajes* entre mundos posibles. Locura *plástica virtual* de un fatigado Peirce, diríamos, si no fuese porque, casi un siglo después, Jay Zeman consiguiera concretarla mediante un ingenioso, y muy actual, programa de computador [Zeman 1997], donde los accesos entre mundos se obtienen mediante posibles contaminaciones aditivas de color (acceso del azul al verde gracias a suma de amarillo, obstrucción del verde al azul, imposible de obtener sumando colores, etc.) Como vemos, múltiples problemáticas ligadas a la *horosis* en el sistema arquitectónico de Peirce poseen sorprendentes e ingeniosas concreciones dentro de los gráficos existenciales. En muchos sentidos, el *chef d'oeuvre* peirceano incorpora capacidades reflectoras *sui generis*. *Laboratorio privilegiado* local del sistema global, los gráficos adquieren entonces una relevancia singular, no sólo dentro del ámbito restringido de la lógica y la matemática, sino dentro de las pesquisas generales del pensamiento.

Allende reflejos arquitectónicos, tránsitos estructurales y modos diversos de horosis, es decir, flujos de la *forma*, los gráficos existenciales peirceanos ayudan a estudiar también ciertos *fondos* de gran importancia en la filosofía y en las matemáticas. Hemos visto que las aproximaciones epistemológicas a los gráficos fuerzan a adoptar una postura dinámica, a equilibrar el análisis con la síntesis. Pero, aún más allá, una *metafísica* potente se encuentra sorprendentemente concretada en el laboratorio de los gráficos. Entendiendo “metafísica” en su sentido originario, como aquello que se encontraría “más allá” de la física, o entendiéndola, al estilo del giro lingüístico del siglo XX, como aquello que se encontraría “más allá” del lenguaje, puede verse cómo los gráficos existenciales se sumergen de lleno en un *mar metafísico*: el mar de la *continuidad*, el mar del *sinequismo* peirceano. En ese *laboratorio del continuo*, los gráficos no son *solo* marcas físicas sobre la hoja, ni son *solo* signos de un supuesto lenguaje diagramático, sino, sobre todo, *residuos* de fuertes tensiones polares que agitan el medio continuo donde se desenvuelven. Las reglas pragmáticas de los gráficos no son *solo* fragmentos de un juego de lenguaje, sino, sobre todo, instanciaciones de grandes *dialécticas* abstractas. Los gráficos, con toda su *potencia figurativa*, sirven precisamente de testigos para aquello que *no vemos*: el continuo subyacente que reintegra mundo físico, fenomenología y conocimiento. Posiblemente, el fondo inagotable de los gráficos tenga que ver entonces con esa *inusitada potencia visual que sin embargo apunta a las limitantes de la visión*, maravillosa antinomia subyacente que impulsa toda la riqueza del pensamiento diagramático en Peirce. Según Florenski, uno de los mayores pensadores de comienzos del siglo XX, todo conocimiento realmente profundo *debe* ser antinómico [Zalamea 2008a], y es un hecho muy interesante el que los gráficos existenciales incorporen a cabalidad ese fondo metafísico antinómico.

Las antinomias de la visión escondidas en los gráficos se encuentran también muy cerca de aquellas grandes antinomias que propulsan el desarrollo de la matemática misma. La *aporía fundadora* de las matemáticas, es decir, la antinomia irresoluble de lo discreto y lo continuo [Thom 1982], se encuentra, como hemos visto, particularmente bien instanciada en la doble unidad y contraposición de los gráficos ALFA y BETA. Pero de nuevo, aún más allá, las semánticas escondidas detrás de los gráficos existenciales, que Peirce no pudo llegar a intuir, son las que expresan mejor el *fondo matemático* subyacente detrás de los gráficos. Múltiples modelos –topológicos [Burch 1991], intuicionistas [Oostra 2010a, 2010b], categóricos [Brady & Trimble 2000a, 2000b] o asociados a la variable compleja [Zalamea 2008b, 2010]– están empezando a develar la riqueza matemática latente en los gráficos. En los capítulos sucesivos exploraremos con cuidado esos fondos matemáticos, pero, a partir de la perspectiva aérea que adoptamos en este capítulo, podemos desde ya señalar algunas de las mayores tensiones en juego.

En primera instancia, el pensamiento topológico de Peirce, particularmente atento a multitud de tránsitos semióticos (continuidad/ corte, iteración/desiteración, recto/revés, ejemplificados en los gráficos), da lugar al entendimiento topológico contemporáneo de los gráficos propuesto por Burch, donde una combinatoria (sintética) de relaciones topológicas dista mucho de la combinatoria (analítica) usual de relaciones conjuntistas. El resultado central de la monografía de Burch demuestra *matemáticamente* que se *requiere una terceridad* en la combinatoria sintética y topológica, como Peirce lo había anunciado repetidas veces, *no reducible* a combinaciones de unidades y pares (algo que, en cambio, como es bien sabido, sí vale conjuntísticamente). De esta manera, los gráficos existenciales peirceanos incorporan *necesariamente* una contraparte sintética, allende sus orígenes analíticos, y tanto el método (pragmático) como el fondo (semántico) de los gráficos pasa a ser básicamente *pendular, tercero, horótico*. En segunda instancia, Oostra ha conseguido obtener el *mayor avance inventivo* en los gráficos desde su creación por Peirce. Extendiendo el lenguaje con un *nuevo* símbolo gráfico ("rizo", suerte de *pegamiento* de dos cortes ALFA, originariamente también usado por Peirce) y extendiendo canónicamente las reglas pragmáticas peirceanas a ese nuevo lenguaje, Oostra ha conseguido crear *sistemas de gráficos existenciales intuicionistas*, subyacentes al sistema ALFA. El hecho es notabilísimo, pues, enlazándose con los avances de Burch y recordando que una semántica completa de la lógica intuicionista está dada por la clase de espacios topológicos y *no* por clases combinatorias de conjuntos (resultados de Tarski de los años 30), se refuerza la idea de que los gráficos corresponden básicamente a un *proceder topológico* del entendimiento. La lógica intuicionista es la lógica de la topología, la lógica del cambio (modelos de Kripke no estáticos), y resulta extraordinario que la *emergencia de gráficos existenciales intuicionistas* refuerce esa dinámica natural de la arquitectónica peirceana.

En tercera instancia, desde los trabajos de Brady y Trimble, han empezado a evidenciarse los que deben ser considerados como los *modelos naturales* de los sistemas de gráficos existenciales: ciertos tipos de categorías donde pueden implementarse a cabalidad, gracias a los *axiomas estructurales mismos* de las categorías en juego, los *procesos de transferencia* típicos de los gráficos. En particular, Brady y Trimble han mostrado cómo *(i)* en ALFA, emergen naturalmente categorías monoidales (MacLane), teorías algebraicas (Lawvere) y fuerzas funtoriales (Kelly); *(ii)* en BETA, surgen categorías de diagramas de cuerdas (Joyal) y condiciones de Beck-Chevalley. En los capítulos siguientes observaremos con detenimiento estos fenómenos, pero puede intuirse desde ya toda la riqueza matemática implícita en estas construcciones. El que la red de procesos de tránsito de los gráficos existenciales –profunda pero marginal y desconocida creación de la mente humana– se acerque estructuralmente a una red paralela de procesos de tránsito en la teoría matemática de categorías –reconocida en cambio como uno de los mayores quiebres en la matemática del siglo XX– sitúa a los gráficos existenciales peirceanos en un *lugar central*, a primera vista inesperado. Finalmente, en cuarta instancia, siguiendo una línea similar (e igualmente sorpresiva) de *reconfiguración del lugar* de los gráficos peirceanos dentro de la matemática, nuestros trabajos apuntan a *otra emergencia natural de modelos para los sistemas de gráficos dentro de la variable compleja*. Si las funciones de la variable compleja pueden ser plenamente consideradas como el *corazón mismo de la matemática* (irradiación plena a todos los demás ámbitos, desde la lógica y la teoría de números hasta el análisis funcional, la geometría y las ecuaciones diferenciales), la cercanía de los gráficos peirceanos a la variable compleja les sitúa también en un lugar “privilegiado”. En particular, veremos más adelante cómo podemos modelar algunos procesos típicos de los gráficos mediante algunas construcciones fundamentales de la variable compleja (y, por tanto, de la matemática, en toda su centralidad): haces de gérmenes de funciones analíticas y meromorfas, continuación analítica y superficies de Riemann.

La situación de los gráficos resulta ser así excepcional en muchos sentidos, desde perspectivas arquitectónicas, filosóficas o matemáticas. El *progresivo desliz del lugar* de los gráficos, *en vaivén entre los márgenes y el centro*, es testigo de una enorme ductilidad. La insularidad de los gráficos existenciales peirceanos no es más que aparente, y el reconocimiento justo de su posición depende de aprender a circunnavegar mejor el mar continuo que les envuelve.

CAPÍTULO 2

ESQUELETOS Y CATEGORÍAS.
ALFA: CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSICO
Y VARIACIONES INTUICIONISTAS

Algunas líneas para representar relaciones binarias, que Peirce traza en una temprana carta a Mitchell (1882) [Roberts 1973, p. 18] [W 4,394-399], parece ser la primera aparición de un recurso diagramático en el lógico norteamericano para tratar visualmente algún cálculo lógico (tarea emprendida también por ilustres predecesores: Llull, Leibniz, Lambert, Hamilton, entre otros; ver capítulo 11, "Logical notation", [Hamilton 1890]). Desde una perspectiva de *génesis de la invención*, BETA *antecede* por tanto a ALFA. Sin embargo, en las discusiones siguientes adoptaremos la precedencia *conceptual* de ALFA, en el sentido de que se sitúa en un más bajo nivel de complejidad que BETA: cálculo proposicional "anterior" a la lógica de relaciones. De hecho, cuando en 1898 diversas entradas sobre los gráficos existenciales son anotadas en el *Logic Notebook* (Ms. 339), estas se concentran al comienzo en presentaciones, repetidas y progresivamente refinadas (pp. 113r-119r), de lo que poco a poco resultará ser el sistema ALFA.

En la primera aparición misma de los gráficos en el *Logic Notebook*, "Existential graphs: a system of logical expression – The constitutive conventions of this language" (Junio 9 1898), Peirce señala que la escritura de los gráficos incorpora ante todo una "dynamic, or experiential, reaction" (p. 102r) ante los signos en juego. Los gráficos *fuerzan* una postura *dinámica* en el lector, como la arquitectónica general peirceana así lo requiere. Unos pocos días más tarde, después de diversas reescrituras (pp. 103r-113r), Peirce propone unas "Basic formal rules" (Junio 15, p. 114r) para los gráficos. De las XI reglas propuestas en ese momento, las primeras (I-IV) gobiernan marcaciones generales de los gráficos, las penúltimas (VIII-X) delimitan el uso de símbolos de relación y de la línea de identidad, la última (XI: "Some possible graph cannot be written") asegura la *consistencia* del sistema (un rasgo premonitorio de la modernidad del pensamiento de Peirce). En el centro del listado, las reglas V-VII se restringen específicamente a la negación ALFA, con una suerte de intuición omnisciente del carácter topológico y dinámico de las transformaciones: (V) *contrarrecíproca débil*, intuicionísticamente válida: si *A* se transforma en *B*, un corte ("oval") alrededor de *B* se transforma en un corte alrededor de *A*; (VI) *doble negación débil*, intuicionísticamente válida: todo gráfico se transforma en un gráfico con un doble corte alrededor suyo; (VII) *doble negación fuerte*, no válida en cambio intuicionísticamente: todo gráfico es equivalente a un corte con otro gráfico adentro.

Desde los inicios mismos de los gráficos existenciales, vemos entonces cómo se corresponden, en demarcaciones del *TRANS*, una *forma* ("dynamic (...) reaction") y un *fondo* (reglas V-VI, topológicas / intuicionistas). Intentaremos mostrar en este capítulo que no se trata de una correspondencia casual, sino que yace en la construcción entera de la lógica de los gráficos. Independientemente de que la lógica intuicionista no hubiese emergido aún en tiempos de Peirce, nuestra contención central es que Peirce pensaba intuicionísticamente/ topológicamente *avant la lettre* (para la clave intuicionista [Oostra 2008, 2009]; para la clave topológica [Zalamea 2001], [Havenel 2006]). Se trata, en efecto, de una forma dinámica de proceder, intrínsecamente expresada en los gráficos, que ha finalmente convergido en las formalizaciones de nuevos sistemas de gráficos existenciales intuicionistas, según los notables trabajos de Oostra.

En las *Lowell Lectures* de 1903, Peirce propone en forma suficientemente acabada sus sistemas ALFA y BETA, apuntando aperturas hacia GAMA. En la "Convención III" de la parte ALFA [1903; CP 4.399-402], Peirce describe el corte ALFA como delimitador de un área "severed from the sheet" [CP 4.399]. Pocas líneas más adelante, ese paso al *revés*, al *verso*, se liga al *pseudografo* (definido antes como "expresión (...) de un estado imposible de cosas" [CP 4.395]), y Peirce define diagramáticamente (como ya lo había hecho algebraicamente en 1885) la *negación intuicionista*:

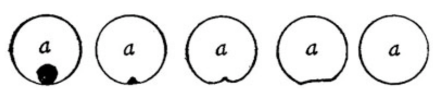
> The filling up of any entire area with whatever writing material (ink, chalk, etc.) may be used shall be termed *obliterating* that area, and shall

> be understood to be an expression of the pseudograph on that area. *Corollary*. Since an obliterated area may be made indefinitely small, a single cut will have the effect of denying the entire graph in its area. For to say that if a given proposition is true, everything is true, is equivalent to denying that proposition. [CP 4.402]

Negar A ("vida" en el revés) corresponde a afirmar que de A ("vida" en el recto) se puede deducir cualquier cosa: forma de la negación intuicionista ($\neg A \equiv A \rightarrow \perp$). Lo más interesante sin embargo es que esa negación se obtiene por *deformación infinitesimal*, al tornar indefinidamente pequeño el pseudografo. *La negación emerge así como resultado de una transformación topológica de lo imposible*.

La prematura visión peirceana de la negación intuicionista se confirma en 1906, en otro de los tantos ensayos de expresión de ALFA:

> *Convention No. 10*. The pseudograph, or expression in this system of a proposition implying that every proposition is true, may be drawn as a black spot entirely filling the close in which it is. Since the size of signs has no significance, the blackened close may be drawn invisibly small. [1906; CP 4.555]



A izquierda aparece $A \rightarrow \perp$, a derecha $\neg A$, y de la una a la otra obtenemos una equivalencia por transformación topológica. La insignificancia de los tamaños de los signos refuerza el enfoque dinámico de Peirce. La transformación del pseudografo hacia lo "invisiblemente pequeño" indica que las dualidades/cortes no son más que *límites* de estados de cosas más vagos e indeterminados. Lo característico de ALFA parece ser una suerte de *límite ideal* en los procesos de quiebre (pseudografo, cortes) del continuo (hoja de aserción).

Los sistemas de gráficos existenciales proveen una serie de profundas *invarianzas diagramáticas para la dialéctica horótica del recto y el revés*. De hecho, en una memoria para la *National Academy of Sciences*, donde aborda los sistemas GAMA, Peirce escribe que

> The System of Existential Graphs recognizes but one mode of combination of ideas, that by which two indefinite propositions define, or rather partially define, each other on the *recto* and by which two general propositions mutually limit each other upon the *verso*; or, in a unitary formula, by which two indeterminate propositions mutually determine each other in a measure. [1906; CP 4.583]

Como veremos en el *capítulo 3*, este "modo único de combinación de ideas" está indicando, en BETA, que el recto de la hoja cubre estados de cosas indefinidos, es decir, existenciales (∃), mientras que el verso propende a lo general, universal (∀). Por otro lado, desde la perspectiva ALFA, se ve cómo el "límite mutuo" (corte) es el que progresivamente va determinando las proposiciones. En efecto, sólo gracias al corte ALFA se pueden *escribir* proposiciones, pues las reglas de inserción ALFA indican que sólo en regiones impares, del tipo *verso* de la hoja, pueden insertarse nuevos gráficos.

El *horos* es el *concepto* imprescindible subyacente a los *tránsitos de información ALFA*. Ahora bien, el concepto encarna en un *diagrama* dual, polar, gracias al *corte ALFA clásico*, pero también, como veremos más adelante en este capítulo, puede hacerlo triádicamente, dialécticamente, en un *rizo ALFA intuicionista*, vislumbrado por Peirce, aunque sólo entendido cabalmente desde los recientes trabajos de

Oostra. El *horos*, el borde, puede clásicamente seccionar ("sever"), pero puede también intuicionísticamente mediar. El caso más patente de esa mediación es el entendimiento *bipolar* de las reglas de iteración/ desiteración ALFA: la comprensión *simultánea del ir y venir a través de la negación* expresado en la ley $p \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg(p \wedge q)$. De hecho, sin conocer previamente las ideas de Peirce, Xavier Caicedo ha mostrado cómo detrás de la iteración/desiteración yace una ley general que permite definir un *conectivo intuicionista © arbitrario:* $p \wedge © \, q \equiv p \wedge © \, (p \wedge q)$ ([Caicedo 1997], [Caicedo & Cignoli 2001]). El *péndulo horótico*, el *tránsito doble* de la información, yace así en lo más profundo del proceder intuicionista.

Detrás de la iteración/desiteración ALFA, que vale tanto clásica como intuicionísticamente, se encuentra un proceso horótico aún más general, fundamental en toda la arquitectónica peirceana. Yendo y viniendo a lo largo de un rango inusitadamente amplio de fronteras –linderos en el mapa ternario del conocimiento, puntos de ramificación en las ciencias especiales, enlaces evolutivos entre determinación e indeterminación, bandas entre razonabilidad y creatividad, bordes en cálculos axiomáticos de lógica topológica–, el pensamiento peirceano detecta en efecto algunos *modos genéricos de ósmosis* que recorren *tanto* el espectro de los fenómenos, *como* nuestras formas de conocer ese espectro. El *más ubicuo de esos modos* es aquel donde se delimita un cierto entorno relacional R, se introduce un dato adicional en el interior de R, se le hace reaccionar contextualmente, se registran los cambios obtenidos, y luego se borra el dato adicional, retrotrayéndolo de nuevo hacia el exterior. Es una expresión amplia del *péndulo horótico*, que

Peirce usa constantemente en sus procesos de *invención*, pues tiende a acercarse al *summum bonum* ("crecimiento continuo de la potencialidad") al ir *enriqueciendo* de múltiples maneras el entorno R.

Las consecuencias lógicas, epistemológicas y metafísicas de ese "enriquecimiento" son muy complejas. Desde un punto de vista *lógico*, el proceso pendular iteración/desiteración a través de un borde sirve *simultáneamente* para caracterizar la noción de conectivo proposicional intuicionista, como hemos visto, pero también para realizar un cálculo de formas normales en la lógica clásica de primer orden, como veremos en el próximo capítulo. Desde un punto de vista *epistemológico*, la oscilación activo-reactiva a través de una frontera elimina la posibilidad de asentamientos definitivos del conocimiento, pero permite la *construcción de orientaciones dentro de lo relativo*. Desde un punto de vista *metafísico*, la ampliación iterativa del *horos*, entendido como *concepto reflexivo*, anclado sobre sí mismo, da opciones para considerarlo como parte genuina de una "filosofía primera". En realidad, nos acercamos con el *horos* a una forma *genérica y universal* de terceridad peirceana, *genuina* si se entiende como borde para el tránsito de información, o *degenerada* si se entiende como corte dual que secciona la información.

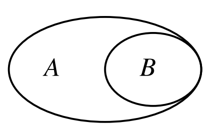
Sobre el fondo continuo de la hoja de aserción, las marcas discretas ALFA intentan delinear una *esquelética básica* sobre la cual luego se ajusten, crezcan y encarnen los procesos de transferencia. El cuerpo vivo (BETA, GAMA) se asienta sobre un esqueleto (ALFA) que le sirve de sostén. Desde el punto de vista de la modelización matemática de los gráficos existenciales, la entrada en juego de las categorías sirve precisamente para capturar, en forma progresiva, *(i)* la esquelética inicial ALFA, *(ii)* la encarnación existencial BETA. Ciertas categorías con estructuras muy genéricas y descarnadas (monoides, fuerzas) sirven para modelar ALFA; añadiendo, en cambio, tensiones estructurales más específicas, escondidas detrás de una física del continuo (cuerdas, diagramas de transferencia), surgen modelos para BETA. Antes de entrar en los detalles de las construcciones propuestas por Brady y Trimble para ALFA, es interesante observar cómo la *metodología misma* de la teoría de categorías se encuentra intrínsecamente cercana al *corazón* de los gráficos peirceanos.

Recordemos el triple objetivo de Peirce con su diagramatización de la lógica: sencillez, iconicidad, analiticidad [c. 1905; CP 4.561]. La teoría matemática de categorías responde, en sus paradigmas iniciales, a un triple objetivo (entre otros más) muy cercano al de los gráficos peirceanos: *(i)* sencillez, *(ii)* iconicidad, *(iii)* sinteticidad. En efecto, *(i)* los axiomas de la teoría de categorías, expresables en primer orden, independientemente de referencias conjuntistas, son notablemente más sencillos que los axiomas tipo Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos. La teoría de categorías enfatiza *(ii)* una visualidad a ultranza, donde las definiciones universales (vía existencia y unicidad) fuerzan muy diversas formas de canonicidad e iconicidad. En cambio, *parecería* surgir una importante diferencia en lo que respecta al punto *(iii)*. No obstante, hemos señalado en el primer capítulo cómo la analiticidad de los gráficos se entrelaza *horóticamente*, de manera indisoluble, con su *verso* sintético. El *fondo sintético* de los gráficos (lógica topológica) *parece* contraponerse con su *forma analítica* (seccionamiento diagramático), pero, en realidad, la *integración* de la forma y el fondo en los gráficos, a través del *péndulo horótico*, resulta ser precisamente una de sus mayores especificidades y fortalezas. De esta manera, en algunas de sus tendencias metodológicas mismas, los gráficos existenciales peirceanos y la teoría de categorías se acercan en lo más íntimo.

Yendo aún más al *fondo*, gráficos y categorías responden de forma similar a la *aporía fundadora* de las matemáticas según Thom: la irresoluble antinomia de lo continuo y lo discreto. Los esqueletos (clásico o intuicionista) ALFA discretizan un continuo primigenio. Las categorías (en su jerarquía natural, de regulares a topos, por ejemplo) discretizan una geometrización primigenia (topos clasificadores). En ambos casos, los procesos de paso al límite resultan ser cruciales, y muestran cómo el conocimiento se genera a través de marcaciones/demarcaciones sucesivas de un *arquetipo* inicial (no genético, ni histórico, pero sí conceptual): la hoja de aserción o el topos libre. El *arkhê* (principio) propone un comienzo (*arkhô*), pero sobre todo comanda (*arkhên*). En los gráficos peirceanos, la hoja comanda su evolución, proyectando espacios de inserción e iteración. Por su lado, las definiciones universales en categorías abstractas comandan su proyección en categorías concretas. La notable *capacidad proyectiva* de los gráficos y de las categorías surge de su *carácter esquelético*, de su sencillez, iconicidad y maleabilidad horótica. A su vez, esa capacidad proyectiva está ligada a una peculiar *ubicación universal*, reflejada en la capacidad de los gráficos de integrar múltiples cálculos lógicos y en la capacidad de las categorías de integrar múltiples clases de estructuras.

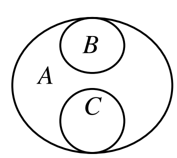
Veremos a continuación cómo se tiene una muy interesante *lucha esquelética clasicismo vs. intuicionismo* entre *(i)* tipos de diagramas (corte clásico, rizo intuicionista), *(ii)* tipos de categorías (categorías *-autónomas, categorías monoidales arbitrarias). En realidad, desde la perspectiva conceptual de las fuerzas en juego, la tensión esquelética ALFA corresponde a una alternativa filosófica de fondo. En efecto, la partición de caminos *nominalismo vs. realismo*, que cubre toda la historia de la filosofía, consigue plasmarse sorprendentemente en los gráficos existenciales. Una posición nominalista abordaría los gráficos como formas de lenguaje propias, independientes de una urdimbre correlativa similar en la naturaleza; una posición realista los contemplaría, en cambio, como fragmentos de un ubicuo continuo. Para Peirce, *debe* prevalecer claramente la segunda opción, pues los gráficos reflejan la arquitectónica sinequista peirceana, que a su vez intenta reflejar una cosmogonía continua universal. Una ubicación de los gráficos en esa amplia perspectiva realista *fuerza* entonces el que se *deban* entender los cortes clásicos como ficticias escrituras nominalistas, y que, en realidad, esas útiles ficciones *deban* estar escondiendo trazos realistas ligados a un continuo no seccionable. Bajo esa perspectiva, el corte clásico emerge una vez más como límite “ideal”, mientras que deberían existir trazos intuicionistas mucho más “reales”, acordes con el fondo topológico subyacente.

Por caminos puramente lógicos, sin especulaciones metafísicas, pero íntimamente convencido del carácter topológico del pensamiento peirceano, Arnold Oostra descubrió en 2007 esos *trazos intuicionistas reales* en el ámbito de los gráficos existenciales peirceanos. La primera obstrucción que tuvo que enfrentar Oostra fue la de eliminar la regla de *borramiento del doble corte* ALFA, correspondiente a la ley clásica, no intuicionista $\neg\neg A \rightarrow A$ (obsérvese que, en la primera presentación de los gráficos de Junio 9 1898, que hemos visto al comienzo de este capítulo, eso equivaldría a eliminar la regla VII). Desafortunadamente, la eliminación a secas del borramiento del doble corte, o de la regla VII, impide el buen funcionamiento deductivo de los gráficos: la regla crucial del Modus Ponens ya no es deducible en el sistema. Así, los primeros ensayos de modificación de las reglas no funcionaron. En ese momento, Oostra se dio cuenta de que el programa de construcción de gráficos existenciales intuicionistas no podría tener éxito si se enfocaba *solo en modificaciones de reglas*, pues intuicionísticamente los conectivos *no* son interdefinibles. *Había que extender el lenguaje*, y Oostra comenzó sistemáticamente la búsqueda de *nuevos signos diagramáticos ALFA para la negación y la disyunción intuicionistas*. Después de diversos cálculos y ajustes, Oostra propuso los siguientes diagramas:



$A \rightarrow B$

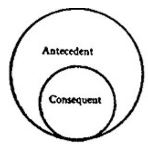
implicación intuicionista



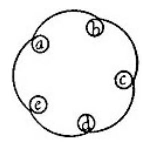
$A \rightarrow (B \vee C)$

mixto de implicación y *disyunción* intuicionista
(generalizable a *n* proposiciones disyuntadas)

Poco después, para nuestra gran sorpresa, encontramos con Oostra esos *mismos signos*, con las *mismas* interpretaciones, en los escritos de Peirce:



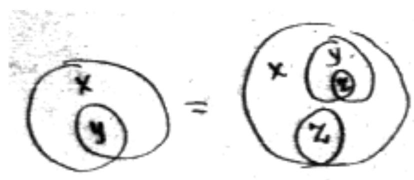
scroll [1903; CP 4.435]

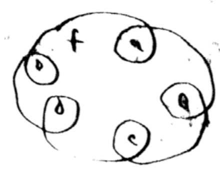


many inloops in one sep [1903; CP 4.457]

En medio de diversos ensayos, Peirce de hecho definió alternativamente la implicación como una *curva con dos cortes pegados* ("scroll"), o como un *encaje formado por dos cortes separados*. Las dos definiciones alternativas son equivalentes clásicamente (por ejemplo, después de dibujar el "scroll" como un trazo continuo, Peirce dice que este "may equally be drawn" mediante dos cortes separados [1903; CP 4.436]), pero *no* lo son en cambio intuicionísticamente, pues intuicionísticamente el trazo continuo $A \rightarrow B$ no equivale al encaje discreto $\neg(A \wedge \neg B)$. La diferencia para el cálculo intuicionista es crucial, pero puede entenderse perfectamente que Peirce no la detectara, ya que la problemática intuicionista ni siquiera había empezado a plantearse. Precisamente por ello mismo, sorprende el uso de los trazos continuos ALFA en Peirce, lo que *refuerza* su intuición y su orientación topológicas *aun en la construcción sintáctica* de signos apropiados para sus cálculos.

Las primeras formas de lo que Oostra terminará definiendo como los *trazos continuos* ALFA *apropiados para desarrollar los gráficos* *existenciales intuicionistas* aparecen en el *Logic Notebook* (Ms. 339), uno de los grandes laboratorios de la invención peirceana.





El *rizo* ("scroll", traducción de Oostra) se encuentra en algunos registros de Diciembre 11 1900 (pp. 177r, 179v) donde Peirce parece estar realizando cálculos para obtener formas normales proposicionales. El *bucle* ("many inloops in one sep", traducción de Oostra, cobijando la multiplicidad bajo la forma "helicoidal" del bucle, según definición de "bucle" en el Diccionario de la Real Academia Española) ocurre en Noviembre 26 1902 (p. 235v), en forma suelta, sin conexión con otros temas en la página. Resulta claro que *solo las semillas* de los gráficos intuicionistas están allí presentes, y se requerirá todo un siglo para que germinen finalmente en los trabajos de Oostra. El resultado fundamental [Oostra 2009, 2010a, 2010b] consiste en que, con las *mismas* reglas peirceanas (inserción/borramiento, iteración/desiteración, rizado: forma débil del doble corte) aplicadas al lenguaje *extendido* intuicionista ALFA (vía rizo, bucle y una convención de identificación para la negación) se obtiene una presentación diagramática *válida y completa* del cálculo proposicional intuicionista.

Entre los muchos resultados interesantes obtenidos en [Oostra 2009], llama la atención el paso *deducible –dentro* del sistema de gráficos existenciales intuicionistas propuesto– que lleva de un *rizo* (dos cortes pegados) a un *encaje* de dos cortes separados, es decir, el paso de la implicación intuicionista a la implicación clásica, *pero no viceversa*. En sintonía plena con el pensamiento peirceano, vemos que los gráficos existenciales intuicionistas codifican así una urdimbre plástica de *transferencias* (despegar el rizo) y *obstrucciones* (no pegar el encaje). De hecho, existe una *exigencia mayor* en los gráficos "pegados" que en aquellos "separados", una condición de *solidaridad* que, por un lado, coincide con la prioridad ideal de una *unidad plástica conexa* sobre una multiplicidad disconexa, y, por otro lado, coincide con el pensamiento intuicionista, para el cual una prueba *exige* fuertes lineamientos de constructibilidad y de control que desaparecen a menudo en las disyuntivas disconexas clásicas. El que la solidaridad del continuo peirceano (pragmática global) se refleje en el pegamiento del rizo y del bucle intuicionistas (sintaxis local) indica, una vez más, la asombrosa coherencia del sistema peirceano. El hecho mismo de que las semillas sembradas por Peirce *hayan conseguido* germinar de manera inesperada e improbable, en el Tolima colombiano, un siglo después, muestra la solidez, la solidaridad, de un pensamiento integral que sólo debe ser impulsado cada tanto para ir progresivamente concretando su potencial.

Otra perspectiva novedosa en un entendimiento más cabal de los gráficos ALFA (clásicos o intuicionistas) ha consistido en proponer *semánticas* para ALFA con *contenido matemático relevante*. La vía se abre en [Brady & Trimble 2000a], una verdadera revelación en el estudio de los gráficos existenciales peirceanos, que debe marcar *un antes y un después* para su comprensión matemática profunda. El *fondo* semántico de los gráficos explota con los trabajos de Brady y Trimble. El entorno de interpretación propuesto está formado por las *categorías monoidales*, es decir, categorías equipadas con un funtor "tensorial" en las que puede definirse de manera natural una noción abstracta de monoide (las categorías monoidales aparecen en forma *ubicua*: cartesianas, endofuntores, R-módulos, etc.; los monoides abstractos "encarnan" en monoides usuales, triplas, R-álgebras, etc.) Dentro de esas categorías monoidales, Brady y Trimble muestran que *(i)* todo gráfico (clásico) ALFA da lugar a una operación algebraica en una *teoría algebraica a la Lawvere* (caso particular de categoría monoidal), *(ii)* las reglas de deducción (clásicas) ALFA se *factorizan* vía *fuerzas* funtoriales (dada una categoría monoidal C con tensorial $\otimes$, y dado un funtor contravariante F: $C \to C$, una "fuerza" para F es una transformación natural $\theta ab : F(a) \otimes b \to F(a \otimes b)$; las fuerzas, introducidas en los años 1980 por Kelly para resolver delicados problemas de *coherencia*, es decir, reducciones de la conmutación de una infinitud de diagramas a la conmutación de un subconjunto finito de ellos, han aparecido luego en los dominios más alejados: curvaturas en grassmannianas y en geometría subriemanniana, fuerzas débiles en física subatómica, operadores de conteo en lógica lineal, etc.) Los avances de Brady y Trimble indican así la existencia de un *fondo universal algebraico* (semántica) detrás de los gráficos existenciales peirceanos (pragmática): *(i)* asociación de operaciones a gráficos, *(ii)* asociación de fuerzas a reglas. El hecho confirma, por otros caminos, la ubicuidad y universalidad del *hacer gráfico*. En efecto, si ya hemos visto cómo ese hacer se conecta en lo profundo con lo lógico y lo topológico, su emergente conexión con lo algebraico, vía el tratamiento de operaciones y fuerzas en un ámbito categórico muy general, respalda la riqueza *real* de ese hacer.

En realidad, podría hallarse aquí el *fondo* más enigmático y atractivo de los gráficos. Nos referimos a lo que podríamos llamar una suerte de *programa homológico* de entendimiento de los gráficos. Una de las grandes conquistas de la matemática del siglo XX es la comprensión de ciertos espacios topológicos a través de adecuados invariantes algebraicos: las homologías (apropiadas cadenas de grupos abelianos que miden, de manera exacta, redes de transferencias y obstrucciones en la deformación del espacio topológico) y las cohomologías (cadenas duales más cómodas de manejar y calcular). Las (co)homologías constituyen, en palabras de Grothendieck, “los más potentes instrumentarios del siglo” [Grothendieck 1985, p. 43], pues detectan *formas* profundas para clases de *estructuras*. Al observar cómo la estructura lógica de los gráficos existenciales (centrada en la iteración/desiteración intuicionista y en su consiguiente red de transferencias y obstrucciones) se combina con sus *fondos* topológico y algebraico, resulta entonces natural preguntarse *(i)* si los gráficos pueden verse como invariantes de grupos subyacentes, *(ii)* si las reglas pueden codificarse a través de ciertas transformaciones de esos eventuales grupos. En caso de tenerse éxito en ese programa homológico, aún por precisarse, la emergencia de *grupos canónicos* detrás de los gráficos existenciales confirmaría aún más su especificidad e importancia.

Por nuestra cuenta, hemos emprendido otros dos caminos que pueden ayudar a complementar las aproximaciones de Oostra, Brady y Trimble: *(i)* construir semánticas categóricas intuicionistas para los gráficos ALFA [Zalamea 2008c, 2010], *(ii)* proponer nuevas semánticas matemáticas para los gráficos gracias a construcciones de la variable compleja [Zalamea 2008b]. En efecto, por un lado, la construcción de Brady y Trimble, que utiliza categorías *-autónomas (modelos generalizados de álgebras booleanas), parece poder generalizarse a categorías monoidales arbitrarias, donde las ecuaciones de conmutación funtoriales para las reglas de iteración y desiteración valen intuicionísticamente: el camino de fuerzas $a \otimes b \rightarrow (\neg\neg a) \otimes b \rightarrow \neg(b \otimes \neg(a \otimes b)) \otimes b \rightarrow \neg\neg(a \otimes b)$ (donde la segunda flecha es una doble iteración y la tercera es una desiteración combinada con un borramiento) resulta ser un camino de fuerzas *intuicionistas intermedias* que coincide con el camino $a \otimes b \rightarrow \neg\neg(a \otimes b)$. La eliminación de los dobles cortes, que vale clásicamente, pero no intuicionísticamente, no necesita usarse en este contexto.

Por otro lado, como la hoja de aserción ALFA es inmediatamente modelable por el plano complejo, el *recto* debería poder entenderse como un ámbito de *analiticidad* (en el sentido de las funciones holomorfas de variable compleja), mientras que el *verso* debería poder ser entendido como ámbito de *meromorfía*. Nuestros trabajos en curso indican que las marcas de gráficos en regiones pares (respectivamente impares) parecen poder ser modeladas por instancias del haz de gérmenes de funciones analíticas (respectivamente meromorfas) en esas regiones. El interés de un tal modelo, en caso de llegar a confirmarse su corrección, sería doble: *(i)* la *polaridad* ALFA (recto/verso, par/impar, verdadero/falso) se obtendría estructuralmente como *caso límite natural* de otro tipo de *haces intermedios*, entre el haz analítico y el meromorfo, *(ii)* la emergencia de la variable compleja reconfirmaría el lugar central, universal, "privilegiado" (en el sentido proustiano) de los gráficos, pues la variable compleja, en muchos sentidos, puede ser considerada como el *corazón* mismo de la matemática moderna.

CAPÍTULO 3

IDENTIDADES Y LOGOS.
BETA: LÓGICA RELACIONAL Y VARIACIONES FUNCIONALES

Como hemos señalado, el primer recurso diagramático inventado por Peirce para expresar una forma de cuantificación parece surgir en una carta a Mitchell de 1882. Son los años de eclosión de la *lógica de relaciones* en el pensamiento peirceano. En medio de las preponderantes notaciones algebraicas y calculatorias, provenientes de Boole y De Morgan, y retomadas en su inmensa mayoría por el mismo Peirce, resulta significativo su interés por aquel *diagrama ocasional*, que de hecho rememorará al final de su vida al dejar constancia de una breve genealogía de los gráficos y subrayar cómo usó en ellos algunas ideas de Ladd Franklin y de Mitchell, sus brillantes estudiantes de Johns Hopkins [1908, CP 4.618]. En el *fondo* de la lógica de relaciones, se encuentran entonces *sumergidos* los gráficos, una situación que metafóricamente recuerda los fondos de algas donde vive la sabiduría según Melville, quien relata en *Moby Dick* la inmersión de Pip en los estratos inferiores del océano: “El mar había burlonamente mantenido arriba su cuerpo finito, mientras anegaba la infinitud de su alma. No anegada por entero, sin embargo. Más bien hundida viva en portentosas profundidades donde extrañas formas del desenhebrado mundo primario se deslizaban de un lado para otro ante sus ojos pasivos; y el avaro tritón, la Sabiduría, revelaba sus tesoros apilados” [Melville 1988, p. 414]. En forma similar, en un desenhebrado mundo primario, arquetípico, originario, los gráficos peirceanos yacen escondidos, *hundidos vivos*, durante años, hasta su emergencia definitiva en el *Logic Notebook* en junio de 1898 (aunque, en el pasaje recién mencionado [CP 4.618], Peirce afirma que los habría descubierto en enero de 1897).

Los gráficos *existenciales*, como su nombre lo indica, más allá de “graficar”, se refieren a la “existencia”, y, en realidad, siguiendo las preocupaciones de Mitchell, a la *identidad* eventual de las cosas existentes: “It was the genius of my gifted student, Dr. O. H. Mitchell, that first opened our eyes to the identity of the subject of all assertions (...) The entire Phemic Sheet and indeed the whole Leaf is an image of the universal field of interconnected Thought (for, of course, all thoughts are interconnected)” [c. 1906; CP 4.553 nota 2]. Obsérvese cómo la “página” de aserción (Phemic Sheet) es aquí el *recto* de la “hoja” (Leaf). Entre dos símbolos de relación aislados, la *línea de identidad* BETA *pega* dos de sus valencias libres, *identifica e interconecta* fragmentos de información. Una existencia separada (“severed”: $\exists x R(x)$, $\exists y S(y)$), es decir, una diferencia, se contrasta con una existencia común, es decir, con una identidad ($\exists z(R(z) \wedge S(z))$).

Así como sucede con los gráficos existenciales intuicionistas (encaje obtenido al despegar un rizo, pero no viceversa), la *condición de pegamiento* es mucho más exigente que la de separación y, en las regiones de conocimiento positivo, es decir, en las regiones pares, puede borrarse un fragmento de la línea de identidad, permitiendo pasar así de una existencia común a una separada, *pero no viceversa*. Vemos entonces cómo el sistema arquitectónico de Peirce se *refleja*, una vez más, en sus componentes: el abstracto cálculo diferencial e integral subyacente a la máxima pragmaticista y a la semiosis generalizada (entendimiento de un signo como la integral pragmática de las acciones-reacciones diferenciales de sus representaciones contextuales) corresponde aquí a los *quiebres* (diferencias) y *pegamientos* (integraciones) de la línea de identidad, es decir, a las *formas normales* del cuantificador existencial, a las obstrucciones y tránsitos en el movimiento del existencial y la conjunción.

Hemos revisado en el *capítulo 1* (pp. 34-37) algunas formas profundas de *horosis* que surgen al considerar *sintéticamente* en BETA algunos *reflejos de continuidad* entre la hoja de aserción y la línea de identidad. La descomposición *analítica* de la línea de identidad provee otras instancias peculiares de *horosis*. A partir de la regla de iteración aplicada a un *fragmento* de la línea de identidad, una importante regla derivada en BETA permite ramificar la línea: pasar de la identidad lineal a la *teridentidad* ramificada (un uso típico de un tal proceso se encuentra en una prueba gráfica del silogismo *Barbara* [Roberts 1973, p. 61]). En la teridentidad, la horosis adquiere una singular riqueza: con la ramificación se *abre la posibilidad* de buscar una nueva identidad, por tanto se *amplía la frontera* del espectro de conectividad. El "campo universal del pensamiento interconectado" utiliza en BETA la teridentidad (e, inductivamente, una *n*-identidad) como recurso de apertura. Es conocida la importancia central de la *idea de ramificación* en matemáticas (Grothendieck unificando con ella, por ejemplo, la separabilidad de Galois y las superficies de Riemann), y resulta así fascinante observar, no sólo su aparición en las reglas BETA (pragmática), sino también (*capítulos 4, 5*) en ciertos modelos de GAMA (semántica).

La línea de identidad dibuja, icónicamente, una *idea dinámica de identidad*: la *permanencia dentro del cambio*. La *continuidad* de la línea evoca la permanencia, el *tránsito* entre los extremos evoca el cambio. Esta construcción peculiar de la igualdad (recuérdese que la línea representa $\exists x \exists y(x=y)$) muestra que una identidad entre extremos es realmente una *trans-identidad*, de acuerdo una vez más con los lineamientos generales del pensamiento peirceano. Se trata de una constatación importante a nivel filosófico, pues la lógica BETA deja entonces de lado la búsqueda de supuestas "esencias" y procede, en cambio, a definiciones de los entes a través de invarianzas en sus acciones-reacciones, a través de su *función* en un contexto dado. El salto de la substancia a la función, imprescindible en [Cassirer 1910], se encuentra así implícito desde la simbología inicial misma de la línea de identidad.

En el fondo, la línea de identidad BETA se acopla de manera casi perfecta a la *horosis*, entendida como *tercera vía* ante la polaridad análisis/síntesis. Giovanni Maddalena (comunicación personal) ha propuesto entender *análisis* como "lo que disuelve/descompone una identidad en un cambio" y *síntesis* como "lo que reconoce/recompone una identidad en un cambio". Extendiendo las ideas de Maddalena, la *horosis* sería "lo que limita/delimita una identidad en un cambio". En lo que se refiere a la línea de identidad, los procesos de limitación se asocian entonces a las deformaciones inválidas de la línea (obstrucciones), y aquellos de delimitación a las deformaciones válidas a través de apropiados bordes (transferencias). En ese caso, la regla central iteración/desiteración de la línea de identidad, es decir, su extensión/ retracción continua, resulta ser una forma *arquetípica* –"desenhebrada", "primaria"– de horosis. *Metafísicamente*, allende la física, la riqueza semiótica de la línea de identidad se acerca a una "filosofía primera".

Como es bien sabido ([Roberts 1973], [Thibaud 1982], [Oostra 2011]), uno de los méritos mayores de los gráficos existenciales consiste en proponer *reglas comunes* para ALFA y BETA, modos unitarios que, en el lenguaje proposicional, producen las reglas derivadas proposicionales ALFA, y, en el lenguaje relacional, las reglas derivadas de primer orden BETA. Este es un *metaejemplo* de trans-identidad, de permanencia dentro del cambio, o, como veíamos (p. 28), una plena apología del pragmaticismo. En realidad, se trata de lo que podríamos llamar, sin temor a fantasmas, un verdadero *descubrimiento metafísico*, pues, allende muy diversos niveles de concreción –pragmático vía reglas, sintáctico vía signos especiales, semántico vía modelos categóricos– los gráficos existenciales consiguen describir una *red de procesos primigenios de transferencia de la información*. En esa perspectiva, se asumen el cambio, el tránsito, la transferencia, como *condiciones iniciales* del pensamiento (entendido en un sentido amplio, como semiosis universal allende el hombre) y se describe(n) luego la(s) identidad(es) como invarianza(s) relativa(s), contextual(es), con respecto a colecciones dadas de transformaciones. El salto de *una* identidad (singular, absoluta, esencial) a *muchas* identidades (plurales, correlativas, funcionales) es crucial para el mundo moderno, y se encuentra incorporado en la arquitectónica general de Peirce, en su lógica de relaciones y en los gráficos BETA.

La primera aparición de la línea de identidad en el *Logic Notebook* (Ms. 339) ocurre en Junio 14 1898. Peirce escribe (p. 110r):

> Continuity of a heavy line signifies the individual identity of all its parts. The whole graph may be conceived as connected by a heavy line with an index of the individual state of things described, but this line is not written.

Los estados de cosas, singulares, indiciales, segundos, se conectan a través de la línea de identidad, continua, tercera. Debajo de la línea continua, donde se pegan las partes, subyace una línea *no escrita* donde se tienen testigos indiciales de las diferencias singulares. Debajo de la línea de identidad, integral, se esconde por tanto una línea de distinciones, diferencial. La aporía de lo continuo y lo discreto, así como un abstracto "cálculo integral y diferencial", subyacen en las raíces mismas, en el corazón inventivo emergente de los gráficos. Al día siguiente, Junio 15, reescribiendo sus reglas para los gráficos, Peirce anota: "VIII. Every heavy line is a graph and can have attached to it a capital letter (index of some designate individual)" (p. 114r). La precedencia de la línea sobre la letra mayúscula, que *puede* o no aparecer ("can"), es de importancia. En efecto, se tiene *ante todo* un continuo –primigenio, originario, simbólico– que pasa *luego* a discretizarse gracias a eventuales índices singulares. El hecho queda patente en la génesis misma de la frase: Peirce escribe primero el término "individual", pero luego lo tacha, lo reemplaza por "index of a designate individual" y, finalmente, se decide por "index of *some* designate individual" (nuestras cursivas, aparición del existencial ligado a lo indicial). La siguiente convención reza: "IX. Any two capital letters, transformable into one another, can be joined by a heavy line" (p. 114r). Un par de meses después, en Agosto 4, se acentúa la regla: "IV. Mutually transformable indices can always be joined by a heavy line" (p. 127r, subrayado de Peirce). Las posibles transformaciones de los índices relacionales se restringen entonces a conexiones continuas: el gobierno de la *trans-identidad* por la lógica topológica es completo (confirmación en [Burch 1991]).

Sin embargo, si la contrastación de los índices relacionales es manejable mediante el aparato de los gráficos, ya en los siguientes desarrollos del *Logic Notebook* Peirce se enfrenta con el *problema mayor del sistema*: "An Extension of Existential Graphs permitting Abstraction" (p. 128r). En efecto, los gráficos constituyen una herramienta muy dúctil para un cálculo relacional *puro*, sin símbolos de función, pero surge el problema de cómo introducir, no sólo la *idea* de funcionalidad, ya presente en el funcionamiento activo-reactivo de los gráficos, sino sus adecuadas *representaciones* en el sistema. Entre Agosto 4 y Agosto 8 1898, Peirce dedica un número inusual de entradas en el *Logic Notebook* (pp. 128r-140r) a tratar de definir gráficamente, en BETA, los conceptos de par, sucesión y orden, conceptos fundamentales para poder representar funciones en una aproximación conjuntista. Los diagramas, muy originales pero demasiado complicados y difíciles de comprender, no parecen llevar a ninguna parte.

Sin capacidad de incorporar variaciones funcionales en su formalismo, al menos hasta el momento (2010), los gráficos BETA no pueden pretender reemplazar entonces la gran riqueza del lenguaje de primer orden, con el que se ha levantado la matemática del siglo XX y cuya enorme *plasticidad* se deriva precisamente de la posibilidad de manejar *símbolos funcionales*. Desde el punto de vista de su eventual *utilización matemática*, esa *obstrucción* BETA parece ser el principal demérito de los gráficos. No obstante, si recordamos el triple objetivo buscado por Peirce con los gráficos –*(i)* sencillez, *(ii)* iconicidad, *(iii)* analiticidad– se observa que *no* se intenta con ellos crear un cálculo *fundamentador* (donde la representación de funciones resulta ser una condición *sine qua non*), sino, *luego* de que la matemática se encuentre en curso, lo que se espera es crear un cálculo *revelador* de procesos. Acorde con las ideas de Peirce sobre la prioridad de las matemáticas (*1* en la clasificación triádica de las ciencias) sobre la lógica (*2.2.3* en la clasificación), la lógica gráfica no se derrumba si no puede representar las formas funcionales matemáticas. Algunas de las *revelaciones* conseguidas –núcleo de reglas subyacente a lo proposicional y lo cuantificacional, fondo intuicionista y topológico subyacente a la lógica, ubicuidad de la *horosis*– explican en cambio el interés de los gráficos.

El *logos* (palabra, discurso, razón) de la Antigua Grecia ha determinado nuestra aproximación Occidental al conocimiento. La raíz

**leg* denota recolectar, es decir, observar el todo, *sintetizar*. Con Heráclito, el *logos* pretende a su vez descubrir un cierto *orden* en el universo. Hemos visto cómo la lógica intuicionista y las aproximaciones topológicas proveen un cierto *orden sintético de la razón*. De esta manera, cercanos a una lógica topológica intuicionista, los gráficos existenciales peirceanos pueden situarse dentro de las matrices originarias del *logos*. Por otro lado, desde los avances conceptuales actuales de la teoría matemática de categorías, [Freyd 1990] ha definido una noción de *logos* como una categoría *relacional*, *ordenada* y *dialéctica* –de manera precisa, un *logos* es una categoría regular (lo que permite composición de relaciones) cuyos subobjetos forman retículos (lo que introduce un orden) con adjuntos derechos para las funciones inversas (lo que abre un espacio para la dialéctica)–. Los logos de Freyd se entrelazan con los gráficos existenciales de Peirce en al menos tres aspectos relevantes y sorprendentes: *(i)* el *fondo filosófico* coliga objetivos relacionales y dialécticos (la regla central iteración/desiteración en ALFA es caso particular de una adjunción), *(ii)* el *fondo lógico* devela una construcción de la existencia como *trans-identidad* (línea continua BETA, por un lado, emergencia del cuantificador existencial como adjunto, por otro lado), *(iii)* el *fondo matemático* esconde una profunda topologización subyacente (un orden, visto como categoría, es logos si y sólo si es álgebra de Heyting; por tanto, los logos, las álgebras de Heyting y los espacios topológicos pueden verse como clases equivalentes de modelos, en este caso para la lógica intuicionista).

Peirce indicaba que la construcción de una adecuada lógica del continuo debía ser una tarea imprescindible para las futuras generaciones:

"A satisfactory evolutionary logic of mathematics remains a desideratum. (...) This defect cannot be remedied until topology –or, as I prefer to call it, mathematical topics– has been further developed and its logic accurately analysed" [1897; CP 3.526]. Los gráficos existenciales constituyen la herramienta más fina propuesta por Peirce para empezar a realizar ese análisis preciso de la lógica de la topología. Vienen luego, por otros caminos, los trabajos de Brouwer en topología y la elaboración de su programa intuicionista, los resultados de Tarski sobre la validez y completud de la semántica de espacios topológicos para la lógica intuicionista, los modelos de Kripke para el intuicionismo, los topos elementales de Lawvere con sus álgebras de Heyting de subobjetos y sus lógicas intuicionistas intrínsecas, los logos de Freyd, la semántica de haces de Caicedo. Es interesante observar cómo, *en todos estos caminos alternativos*, se mantienen y desarrollan las problemáticas originarias de Peirce, claramente encarnadas en los gráficos existenciales: *(i)* la dialéctica de la palabra y la figura, el símbolo algebraico y el diagrama topológico, el cálculo y la geometría, el *logos* y el *topos*, *(ii)* la búsqueda de herramientas *analíticas* (axiomas, reglas) que, contrapuntísticamente, otorguen panoramas *sintéticos* unitarios (clases naturales de modelos), *(iii)* a partir del punto anterior, la elucidación de una *horosis* permanente –delimitación de bordes axiomáticos y limitación de clases semánticas– para captar diversas mediaciones conceptuales propias de las lógicas del continuo.

[Brady & Trimble 2000b] propone otra estrategia alternativa para acercarse a modelar BETA mediante categorías apropiadas. Se tienen dos etapas fundamentales en la aproximación de Brady y Trimble: *(i)* a partir de un lenguaje *L* con símbolos de relación que permitan hablar de BETA, la definición, por un lado, de una *categoría monoidal libre M(L)* asociada a *L*, y, por otro lado, de una clase *JS(L)* de *diagramas Joyal-Street* (condiciones de naturalidad en *M(L)*, vía diagonales y proyecciones) junto con ciertas *deformaciones* permitidas de los diagramas (condiciones de unidad/counidad en adjunciones asociadas); *(ii)* la utilización de un procedimiento bien conocido en lógica categórica según el cual, a partir de una teoría categórica de primer orden *(C,T)* (*C* categoría con productos finitos, *T* funtor del dual de *C* en álgebras booleanas, con existenciales como adjuntos y con substituciones Beck-Chevalley), se construye una categoría *Rel(C,T)* donde se tiene un cálculo categórico relacional canónico que generaliza los cálculos relacionales de Tarski en primer orden clásico. Combinando *(i)* y *(ii)*, Brady y Trimble muestran que las deformaciones lógicas de Peirce en BETA(*L*) corresponden a las deformaciones categóricas de Joyal-Street en *JS(L)*, que los diagramas en *JS(L)* corresponden a tipos en *Rel(M(L),T)* para un adecuado *T*, y que la congruencia asociada a esa correspondencia consiste precisamente en las deformaciones Joyal-Street. Como consecuencia, el cociente de BETA(L), partido por deformaciones, resulta ser isomorfo a *Rel(M(L),T)*, lo que provee un nuevo modelo matemático para BETA.

Los gráficos existenciales BETA se enriquecen notablemente con el modelo propuesto por Brady y Trimble, puesto que los diagramas tipo Joyal-Street emergieron en *contextos completamente diferentes*, para modelar, por un lado, diagramas en la teoría de cuerdas asociados a los diagramas de Feynman y de Penrose en *física*, y, por otro lado, para modelar operadores de intercambio en representaciones lineales de *espacios de Hilbert* [Joyal & Street 1991]. El *intercambio de información* en las reglas de iteración/desiteración de Peirce, *proceso semiótico universal* si lo hay, se refleja y confirma con estas nuevas modelizaciones. De hecho, los modelos categóricos precisan el *intercambio como formas finas de adjunción*: a nivel ALFA una adjunción operacional algebraica cuyos adjuntos son los conectivos, a nivel BETA una adjunción relacional algebraica cuyos adjuntos son los cuantificadores. Hemos visto (resultados de Oostra y Caicedo mencionados en el *capítulo 2*) que los conectivos en cuestión son, de hecho, *intuicionistas*. No parecería existir ninguna obstrucción para que no sucediese lo mismo a nivel de cuantificadores: los métodos categóricos propuestos por Brady y Trimble deberían poder extenderse al ámbito intuicionista. Para ello, hay que transformar los funtores T, cuyos rangos caen en álgebras booleanas, considerarlos en cambio hacia álgebras de Heyting y debilitar las deformaciones asociadas tipo Joyal-Street. Como la lógica subyacente a las categorías monoidales libres es intuicionista y como las condiciones tipo Beck-Chevalley valen intuicionísticamente, una modelización Brady-Trimble modificada debería poder proveer una *semántica matemática de interés, intuicionista, de primer orden* para BETA [Zalamea 2010].

Allende logos y categorías relacionales, un tercer camino de construcción de semánticas matemáticas de interés para BETA podría consistir en modelar el cálculo de extensiones/retracciones de la línea de identidad como cálculo de *continuaciones analíticas* de ciertas funciones de variable compleja. Para ello, habría que entender los cortes ALFA como regiones del plano con singularidades, que servirían de obstrucciones a la continuación analítica. Las deformaciones BETA de la línea corresponderían a deformaciones holomorfas; ciertos teoremas de representación conforme podrían calibrar las deformaciones. El cálculo de los residuos de Cauchy, en regiones con singularidades, podría ser testigo de leyes lógicas. Las formas normales del existencial, codificadas en la iteración/ desiteración de la línea BETA a través de cortes ALFA, podrían corresponder a los cálculos que, con singularidades removibles, dan lugar a la fórmula integral de Cauchy. No obstante, a pesar de la naturalidad de la idea [Zalamea 2008b], debe subrayarse que la situación actual (2010) es meramente especulativa.

Más allá del interés semántico que se obtiene con los nuevos modelos matemáticos para BETA (2000-2010), debe notarse cómo la perspectiva matemática ayuda a "hozar más adentro" [Musil 1913, p. 43] y a definir mejor la *"metafísica"* subyacente. De hecho, aunque los gráficos existenciales peirceanos poseen un enorme valor lógico (unificación pragmática de reglas proposicionales y cuantificacionales), matemático (cruce de lógica, álgebra, topología y, posiblemente, variable compleja), arquitectónico (urdimbre de reflejos del sistema peirceano), su cometido mayor, más ambicioso y, por supuesto, más vago, es el de ayudar a desbrozar una *metafísica matemática*. Para Peirce, la metafísica "is an imitation of mathematics" [1885; CP 8.45], "has always formed itself after the model of mathematics" [1893; CP 1.132]. En sus *Cambridge Lectures* de 1898, Peirce aborda la problemática de acotar una "mathematical metaphysics, or Cosmology" [1898; CP 6.213] a través de su *lógica del continuo*. En las conferencias de 1898, el énfasis se dirige a la explicitación del *continuo peirceano* y de la *hipótesis sinequista* que sostiene el andamiaje filosófico del sistema. No obstante, como hemos visto, resulta ser también la época de emergencia creativa de los gráficos existenciales (que tendrán que esperar a las *Lowell Lectures* de 1903 para su discusión en público), y es difícil no pensar que Peirce no intuyera desde entonces su potencial "metafísico", "cosmológico". El potencial se concretará en la década final del pensamiento peirceano, cuando Peirce conectará una "prueba del pragmaticismo" con la *lógica de la abducción*, a su vez interconectada con los gráficos existenciales (ver [Zalamea 2001, capítulo 4], [Nubiola & Zalamea 2010]).

Los modelos matemáticos para BETA refuerzan su hondo potencial metafísico subyacente. Las lecturas categóricas indican que, al menos en el ámbito matemático, los gráficos corresponden a *conceptos universales*, tanto en su formación sintáctica (vía categorías monoidales libres), como en su reglamentación pragmática (vía adjunciones). Su *universalidad* misma –es decir, su *libertad*, alejada de particulares y singulares– permite su *proyectividad* semántica sobre otros ámbitos de la matemática: álgebra, topología, variable compleja, teoría de cuerdas. La constatación de esa universalidad matemática confirma, localmente, en un ámbito restringido del pensamiento, una suerte de universalidad metafísica. En efecto, si la metafísica se modela sobre la matemática, como pensaba Peirce, los gráficos pueden estar sirviendo de *testigos fieles* para corrientes metafísicas profundas. Y ese parece ser el caso en diversos registros de suma penetración: *(i) formas ubicuas de una semiosis universal* (tracción/retracción de información) reflejadas en la iteración/desiteración, ya sea ALFA, BETA O GAMA; *(ii) formas ubicuas de un continuo universal* (genericidad/ pegamiento/modalidad) reflejadas en la hoja de aserción ALFA, la línea de identidad BETA, el libro de hojas GAMA; *(iii) formas ubicuas de un archê universal* (origen/polaridad/ pendularidad) reflejadas en la introducción obligatoria del doble corte en pruebas ALFA, en la ramificación BETA de la línea de identidad, en la pendularidad GAMA del corte quebrado y el corte entero.

Cassirer señalaba cómo

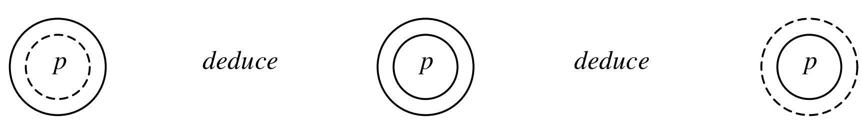
> La lógica empieza con la extrañeza, con el «asombro» filosófico de que el pensamiento puro pueda llegar a (...) estar en condiciones de poner identidades y de retenerlas en modo duradero [Cassirer 1975, p. 190; fragmento no fechado]

Se trata de una extrañeza repetida también en el "asombro" que producen los gráficos existenciales, con su *plasticidad* para diagramar identidades, por un lado, y con la elucidación de un *núcleo* de reglas que retienen duraderamente el pensamiento pragmático, por otro lado. La variación (plasticidad) y la permanencia (nucleización) incorporan la riqueza lógica indicada por Cassirer. Como muchos de los conceptos importantes en filosofía, en teoría de la cultura o en matemáticas, el *tejido* de la diferenciación y la integración, de lo Múltiple y lo Uno, gobierna las estrategias en acto en los gráficos existenciales. El profundo descubrimiento peirceano de las reglas comunes para ALFA, BETA O GAMA (unidad) muestra cómo ciertas diferencias aparentes, proposicionales, relacionales o modales (multiplicidad), no son más que variaciones de dinámicas semióticas universales (inserción/eliminación, iteración/desiteración). La construcción de los gráficos intuicionistas según Oostra muestra cómo una reflexión autorreferente alrededor del pegamiento/seccionamiento de las formas mismas de los gráficos (unidad) codifica la lógica intuicionista y el trasfondo topológico subyacentes (multiplicidad). Los modelos categóricos ALFA y BETA de Brady y Trimble muestran cómo claras operatorias y dialécticas libres (unidad) subyacen a posteriores fuerzas y deformaciones funtoriales (multiplicidad). Con los gráficos existenciales, el *logos de la dialéctica platónica –simultáneo lugar metafísico* de tensiones creativas Uno/Múltiple, Mismo/Otro, y *lugar lógico* de permanencias y variaciones de las identidades– renace de las cenizas con inmitigada energía.

CAPÍTULO 4

MODULACIONES Y ÁRBOLES. GAMA (I): CÁLCULOS PROPOSICIONALES MODALES

La primera aparición del sistema GAMA modal parece ocurrir en las *Lowell Lectures* de 1903. El “broken cut” (que traduciremos por corte quebrado) se define como el lugar de la contingencia (posibilidad de la negación) y, *aplicando las reglas generales* de inserción/borramiento al corte quebrado como *nuevo signo GAMA*, Peirce *demuestra* [1903; CP 4.516] las leyes fundamentales de una modalidad *normal*:



$\neg\Diamond\neg p$	$\neg\neg p$	$\Diamond\neg\neg p$
$\Box p$	p	$\Diamond p$
necesidad	*actualidad*	*posibilidad*

[por inserción en área impar, el corte quebrado GAMA se “llena” en un corte cerrado ALFA]

[por borramiento en área par, el corte cerrado ALFA se “medio borra” en un corte quebrado GAMA]

Al igual que sucedía con BETA, algunos *modos generales de acción* siguen siendo los que, aplicados a una nueva *sintaxis extendida*, producen las reglas derivadas específicas de cada sistema. La acción de inserción/borramiento, por ejemplo, inicia y rige (vía *modus ponens*) toda prueba en ALFA, ramifica la línea de identidad y permite argumentos silogísticos en BETA, fuerza las inferencias normales entre modalidades en GAMA. La *belleza* de los gráficos existenciales se mantiene entonces en su asombrosa *unidad pragmática*. De hecho, si la regla de inserción/borramiento aplicada al corte quebrado otorga, desde un comienzo, las leyes normales de la modalidad (sistema K), diversas explicitaciones de *iteración/desiteración a través de cortes quebrados* producen luego algunos de los conocidos sistemas *intermedios* de modalidad (sistemas S de Lewis) (ver [Zeman 1963], [Molina & Oostra 2003]). La estrategia general de definir y acotar *formas de obstrucción y de tránsito* sigue guiando así la lógica de los gráficos.

Tres años después de las *Lowell Lectures*, Peirce propone una lectura profunda de los cortes (ALFA *o* GAMA): "As the main part of the sheet represents existence or actuality, so the area within a cut, that is, the *verso* of the sheet, represents a kind of possibility" [1906; CP 4.577]. La nueva visión es fundamental: "This improvement gives substantially, as far as I can see, nearly the whole of that Gamma part which I have been endeavoring to discern" [1906; CP 4.578]. En efecto, se trata de una modalización con fuertes consecuencias, donde se codifica sintéticamente su *modalización de la máxima pragmaticista* en años previos. El *verso* de la hoja de aserción no representa ya la negación, sino la *posibilidad* de la negación, en el *verso* se pasa a *otros mundos* *posibles*, a mediaciones, intersticios, modulaciones, allende el binarismo sí/no. Lo *actual* se contrasta con la contingencia y, como lo asevera el pragmaticismo, un signo *dado* sólo es cognoscible a través de representaciones en ámbitos de posibilidad.

Al otro lado del espejo la lógica se multiplica. Peirce indica la hondura en juego con una bella metáfora: “My operose method like that of a hydrographic surveyor sounding out a harbour, suddenly brought me up to the important truth that the *verso* of the sheet of Existential Graphs represents a universe of possibilities” [1906; CP 4.581]. *Sondando en lo profundo* –recuérdese al matemático de Musil hozando “más adentro”– el hidrógrafo encuentra toda suerte de corrientes submarinas. La verticalidad del mundo y de la experiencia se refleja en la *horosis de los gráficos entre recto y verso*: “two indefinite propositions define, or rather partially define, each other on the *recto* and (...) two general propositions mutually limit each other upon the *verso*” [1906: CP 4.583]. La *pendularidad horótica* es plena: delimitación, definición, determinación en el *recto*, limitación, finición, terminación en el *verso*; secciones y marcas de existencia en el *recto*, pegamientos posibles y extensiones de ámbitos generales en el *verso*.

Requiriéndose el uno al otro, lo actual y lo posible *evolucionan* conjuntamente en los sistemas de gráficos existenciales. Como el mismo Peirce lo subraya [1906; CP 4.581], ese entendimiento de GAMA como contrapunto de ALFA lleva a una consecuencia filosófica de peso: la constatación de una eventual existencia de “posibilidades reales” (*verso*) en el universo, por tanto, la constatación de un *reflejo lógico local* del realismo escolástico *global* de Peirce. La *conexión estructural* entre lo posible y lo real, sustentada en varios de los entronques fundamentales del sistema peirceano –sinequismo, c(i)enopitagorismo, pragmaticismo– se refleja en la *horosis* sofisticada del corte quebrado. Por un lado, sintácticamente, el corte quebrado es un *ícono horótico* de gran fuerza: su medio borramiento delimita el plano de verdad (*recto*) y, en el borde (*horos*), se abren caminos hacia lo posible (*verso*). Por otro lado, semánticamente, la horosis recién recalcada de lecturas entre *recto* y *verso* muestra cómo la página se multiplica en su revés (veremos pronto que esa multiplicación corresponde a la *arborización* natural de modelos de Kripke para las lógicas modales), lo que genera a su vez múltiples nuevos *tránsitos* de información (pragmática horótica).

La lógica de la modulación, del quiebre intersticial, del *horos* modal, es aún más visible en las múltiples *gradaciones* del principio de iteración/desiteración aplicado a los cortes GAMA (agradecemos aquí diversas comunicaciones personales de Arnold Oostra). Debe observarse, ante todo, que si se admite la introducción arbitraria de un doble corte de necesidad (p. 79) para gráficos marcados en la página –hecho que equivale a la regla bien conocida de necesitación modal: α demostrable implica $\Box\alpha$ demostrable– un candidato a sistema GAMA *no puede aceptar iteraciones/desiteraciones arbitrarias a través de cortes quebrados*, pues entonces el sistema se trivializa: los cortes ALFA resultan ser equivalentes a cortes GAMA. En GAMA emerge por tanto una muy importante *obstrucción* al principio de iteración/desiteración, y una serie de *resoluciones parciales* de esa obstrucción es la que da lugar a sistemas modales intermedios alternativos. Específicamente, se tienen las siguientes representaciones de sistemas intermedios ([Zeman 1963], [Molina & Oostra 2003]): *(i) L* débil de Lukasiewicz, en caso de *no* tenerse la regla de necesitación y aceptar (des)iteraciones *arbitrarias*; *(ii) S4* de Lewis, en caso de tenerse la regla de necesitación y aceptar *sólo* (des)iteraciones de gráficos *necesarios*; *(iii) S4.2*, en caso de tenerse necesitación y aceptar *tanto* (des)iteraciones de gráficos *necesarios*, *como* de gráficos rodeados de un *doble corte quebrado* ("posiblemente necesarios"); *(iv) S5*, en caso de tenerse necesitación y aceptar sólo (des)iteraciones de gráficos cuyas *componentes mínimas* estén rodeadas por algún corte quebrado del mismo gráfico.

La gran *dialéctica de tránsitos/obstrucciones* en el sistema global de Peirce encarna así en GAMA con inusitada sutileza. De hecho, podemos entender esa dialéctica como una *horosis autopoiética* (Maturana) de enorme finura, ya que la riqueza del corte quebrado se multiplica gracias a una autorreferencia vital: el corte GAMA, borde entre actualidad y contingencia, borde entre recto y verso, borde entre pegamiento y quiebre –*forma icónica del horos*– es *también* el lugar donde el tránsito del principio central iteración/desiteración se modula, limita y delimita, lugar donde una jerarquía de obstrucciones determina pragmáticamente las lógicas subyacentes –*fondo simbólico del horos*–. El corte GAMA, a la vez *tupos* (figura, diagrama) y *topos* (lugar, pasaje), combina entonces forma y fondo de la horosis, y se erige en uno de los más asombrosos signos plásticos creados por Peirce.

La multiplicatividad de los sistemas GAMA está ligada a la ramificación de los *árboles de posibilidad* escondidos detrás de todo sistema modal. Desde Leibniz, se interpreta naturalmente lo necesario como lo válido en *todos* los mundos, mientras lo posible se entiende como lo válido en *algún* mundo. La semántica leibniziana se formaliza por medio de los *modelos de Kripke* para la lógica modal (1963): *marcos* de mundos conectados entre sí por una relación de accesibilidad, metafóricamente visualizables como árboles cuyas ramificaciones expanden el ámbito de lo posible. Desde el punto de vista de la semántica kripkeana, la *jerarquía de permisos* en la iteración/desiteración GAMA corresponde a una *jerarquía de propiedades* de la relación de accesibilidad en los marcos, caracterizándose *S4* mediante marcos que son preórdenes, *S4.2* mediante preórdenes dirigidos, *S5* mediante relaciones de equivalencia. La dialéctica de *lo Uno y lo Múltiple* adquiere entonces nueva fuerza en el ámbito propio de la modalidad, pues ciertas propiedades algebraicas *aparentemente* distantes (preorden, preorden dirigido, relación de equivalencia) se ven *unitariamente* como formas de adecuación del *principio universal* iteración/desiteración. Más aún, dado que los preórdenes y las relaciones de equivalencia son relaciones *canónicas* en matemáticas (índices *distinguidos* de expansión y de tamaño dentro del universo conjuntista), resulta muy revelador el poder detectar esas canonicidades mediante formas precisas de iteración/desiteración.

Por otro lado, como es sabido desde la escuela polaca, el espectro *proposicional modal* puede ser representado mediante un cálculo monádico *en primer orden clásico*. Desde un punto de vista *algebraico*, Peirce intuía ya asombrosamente la situación ("Schröder, with the majority of the Boolians, abandoned Boole's conception that every logical term has one or other of two values. For my part (...) I introduced relative terms which correspond to what Sylvester called the *umbræ* of quantities (the conception is due to Leibniz), and employed various signs of operation upon these *umbræ*" [1904; CP 4.327]), pero es sobre todo en la *topología* GAMA donde esas *sombras de lo posible*, que expanden la lectura binaria de la lógica, adquieren pleno derecho operativo. Para ello, Peirce introdujo sus *tinturas*, predicados monádicos de color, con los que esperaba poder codificar las modalidades [1906; CP 4.553]. Después de algunas manipulaciones sin éxito, Peirce creyó que las tinturas eran un callejón sin salida ("nonsensical", carta a Woods (1913) citada como Miscelánea 22 en CP 8), pero, en detrimento de ese comentario final, Zeman ha demostrado en cambio la coherencia de la intuición original de Peirce, al caracterizar diversas lógicas modales mediante pragmáticas de cambios de color en un computador personal [Zeman 1997]. Las *sombras* GAMA, ya sea a través del corte quebrado que envía a la penumbra de la hoja, ya sea a través de las tinturas que abren penumbras de posibilidad, multiplican la profundidad lógica.

Como hemos indicado en el *capítulo 1*, Peirce intuía desde las *Lowell Lectures* (1903) que esa profundidad lógica podía ser representada gracias a un *libro de hojas* de aserción. La extensa cita que hemos incluido (p. 37) sobre el *book of separate sheets* muestra la riqueza de las ideas en juego, dentro de una dialéctica plástica de continuidad y cortes. Cien años después, con los modelos de Kripke a nuestra disposición, se ve cómo se acercan el *libro* peirceano y el *árbol* kripkeano. En efecto, mientras el árbol de Kripke captura tránsitos y obstrucciones modales gracias a la accesibilidad e inaccesibilidad entre sus nodos (mundos posibles), el libro de Peirce concibe a su vez el tránsito y la obstrucción modal gracias a los "cortes donde se pasa a otras áreas", suerte de "mundos imaginarios" [1903; CP 4.512]. El *libro entendido como árbol* posee la ventaja de no tener que preocuparse sobre cómo las hojas se "pegan" entre sí ("tacked together at points": clavan, hilvanan, cosen, pegan), pues la relación (usualmente discreta) de accesibilidad sirve de sustituto para ese apilamiento. No obstante, en acuerdo más preciso con la cita de Peirce [1903; CP 4.512], el *libro de hojas podría también entenderse como una superficie continua*. En ese caso, podría modelarse tal vez gracias a las *superficie de Riemann*, cuyas hojas se pegan *continuamente* en los puntos de ramificación y cuyas proyecciones pueden captar la relación de accesibilidad [Zalamea 2008b]. Por otro lado, un *haz de hojas* podría ser un modelo más natural para la aproximación modal peirceana, ya que el haz combina, *sobre un fondo continuo*, la doble dialéctica unidad/multiplicidad y globalidad/localidad del *book of sheets*. Como la *variable compleja* resulta ser el ambiente matemático *canónico* donde emergen las superficies de Riemann y los haces (gérmenes analíticos y meromorfos), esta aproximación para GAMA podría estar entrelazándose en el *fondo* con los modelos parciales de variable compleja que hemos sugerido para ALFA (pp. 61-62) y BETA (p. 75).

En la entrada "Unity and Plurality" del *Baldwin Dictionary* [1902; CP 6.377], Peirce explica el trasfondo metodológico de la *composicionalidad*, es decir, del entendimiento sintético del mundo, ligándolo a consideraciones modales:

> *Composition* is divided into *real, rational,* and *modal*. *Real composition* is the union of distinct entities in the real thing itself. It is either *actual* or *potential*. *Actual composition* is either *per compositionem,* as when water and alcohol are mixed, or *per aggregationem* (as in an army). *Potential*

> *composition* is when one thing is united in potentia to another. It is either *per informationem* or *per inhaerentiam;* a distinction peculiar to a certain kind of Aristotelianism. *Rational composition* is either of things which differ by reason alone, or of things brought together in one concept; it includes, firstly, genera, species, etc.; secondly, equality, similitude, etc.; thirdly, agreement in effects, external causes, etc. *Modal composition* is composition from a thing and a mode.

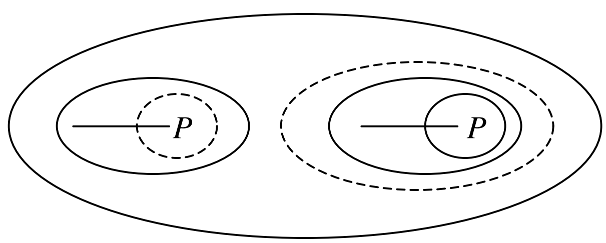
La jerarquía de reglas a través del corte GAMA constituye un ejemplo perfecto de composición potencial *per informationem*: los tránsitos y obstrucciones de información en la iteración/desiteración determinan los sistemas intermedios. Es importante notar que Peirce sitúa ese tipo de composición potencial como parte de una *composición real*, "unión de entidades distintas en la cosa real misma". Los gráficos existenciales se sitúan en efecto sobre un *continuo natural, dentro del sinequismo universal peirceano*. Lejos de ser un simple artificio de la lógica, los gráficos conforman una red sofisticada de íconos, índices y símbolos donde se refleja una Unidad mucho más extensa.

La comprensión de la composicionalidad como *forma triádica plena* aparece en "Some Amazing Mazes, Fourth Curiosity", uno de los lúcidos artículos finales de Peirce: "A triadic relationship cannot be built up from dyadic relationships. Whoever thinks it can be so composed has overlooked the fact that *composition* is itself a triadic relationship, between the two (or more) components and the composite whole" [1909; CP 6.321]. Cuarenta años después, Eilenberg y MacLane axiomatizarían en efecto la teoría matemática de categorías –es decir, el *ámbito canónico para composicionalidad y síntesis*– a través de cinco muy sencillos axiomas sobre la *relación triádica de composición* $R(f,g,h) \Leftrightarrow f \circ g = h$. Como lo intuía Peirce, se tiene precisamente una relación triádica entre las partes (componentes *f,g*) y el todo (composición *h*), relación primigenia, arquetípica, inaugural, base de toda la teoría de categorías. Por otro lado, ochenta años después, [Burch 1991] *demostraría* la *irreducibilidad* del 3 al 2+1 en el ámbito de la lógica topológica de los gráficos existenciales. Aunque sabemos que, discretamente, en la teoría de conjuntos, las relaciones triádicas *sí* son reducibles (*toda* relación es un conjunto apropiado de parejas ordenadas, conformables mediante el 2+1 de Kuratowski: $(x,y)=\{\{x,y\},\{x\}\}$), los resultados recién señalados indican en cambio que, en el ámbito de la teoría de categorías y en el ámbito de la topología, la situación es muy distinta. Nos encontramos ante una *emergencia forzosa e irreducible de terceridad* ligada, en el fondo, al sustrato continuo y modal subyacente.

Diversas formas de *horosis*, propias del continuo peirceano [Zalamea 2001], se entrelazan con la perspectiva modal. Por un lado, la *generalidad* del continuo, allende lo particular y lo determinado, regulariza los modos de conexión (bordes, *horos*) entre las partes y el todo, ente lo local y lo global. Este es también el caso "real general" de la *composición potencial*, así como el caso "real concreto" de la jerarquía GAMA iteración/desiteración, donde se regularizan transferencias sintéticas de información. Por otro lado, la *reflexividad* del continuo peirceano afirma que cada una de sus partes posee a su vez otra parte similar al todo (*horos* del *horos*), lo que genera su inextensibilidad, es decir, su indefinibilidad vía puntos. Hemos visto cómo en los gráficos existenciales (ALFA, BETA y GAMA) imperan los procesos de autorreferencia, y cómo la lógica intrínseca asociada a esos gráficos resulta ser la lógica intuicionista, por tanto, la lógica natural de la topología, donde priman las vecindades en vez de los puntos. Por último, la *plasticidad* del continuo asegura el adecuado "tránsito" de las modalidades, la "fusión" de las fronteras (*horos*) y el "solapamiento" de las vecindades que lo conforman. Toda la estrategia GAMA ideada por Peirce apunta también a capturar diagramáticamente esa plasticidad imprescindible del pensamiento modal.

Si recorremos la clasificación peirceana de las ciencias, podemos observar cómo los gráficos existenciales (y, en particular, GAMA) entran en un muy fino *contrapunto estructural* con la arquitectónica peirceana. Desde la *matemática* (1), hemos ya indicado el hondo "contrapunteo" (Fernando Ortiz) de los gráficos con áreas estructuradas avanzadas de la disciplina (categorías, álgebras, topologías, funciones de variable compleja). Desde la *fenomenología* (2.1), el entrelazamiento recursivo de las tres categorías "resuena" en la urdimbre diagramática de los gráficos, al invocar en su manejo la tríada plena sintaxis/semántica/pragmática. Desde la *estética* (2.2.1) –en lo que se refiere al *summum bonum*, es decir, al "crecimiento continuo de la potencialidad", una de cuyas encarnaciones puede precisamente contemplarse en los gráficos existenciales (pp. 35-36)– la multiplicatividad GAMA y sus enlaces con el continuo muestran que el sistema es estéticamente muy *rico*: estructuralmente *bello* en la acepción profunda de ayudar a expandir las potencias del entendimiento. Desde la *semiótica* (2.2.3), la polaridad recto/revés y su jerarquía de mediaciones constituyen verdaderos *símbolos* del pensamiento peirceano, signos estructurales de múltiples tensiones entre segundidad y terceridad; por su lado, el corte quebrado GAMA, en su inmediatez, en su potencialidad, emerge como fugaz *ícono* de la primeridad misma. Desde la *lógica* (2.2.3), se descubren los grandes principios dialécticos (inserción/borramiento, iteración/desiteración) que sirven de núcleos estructurales para sistemas de deducción aparentemente distantes (cálculos proposicionales, relacionales, modales). Desde la *metafísica* (2.3), el *sinequismo* y el *tiquismo* peirceanos alcanzan contrastable y calculatoria evidencia gracias a la continuidad BETA y a la cesura GAMA.

Adecuadas combinaciones de BETA y GAMA proveen fragmentos de lógicas modales de primer orden. Por ejemplo, la ley de Barcan (1946), que coliga *clásicamente* necesidad y cuantificación universal ($\forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$), es representable en BETA+GAMA por medio del gráfico siguiente, donde eliminamos dos dobles cortes ALFA después de la primera diagramación literal de la fórmula:



Si extendemos la dialéctica de inserción y borramiento a cortes quebrados que intersecten la línea de identidad, habría que encontrar las subreglas adecuadas que permitan demostrar este gráfico. Por ejemplo (comunicación personal de Oostra), el gráfico de la izquierda puede *(i)* insertarse en el anillo de un corte necesario GAMA, *(ii)* iterarse hacia el interior, *(iii)* completarse el corte quebrado alrededor de *P* (en área impar). Aquí se usa una iteración de gráficos con cortes quebrados a través de cortes quebrados, por lo tanto se asume un cálculo subyacente de tipo *S4*. Algo nuevo en la mixtura BETA+GAMA está entonces emergiendo, pues, en cambio, la reducción proposicional de la fórmula es trivial (contingencia implica contingencia).

Hemos indicado cómo GAMA *modal* debe revelar aún muchos de sus frutos escondidos. Su riqueza incluye aspectos de sumo relieve en muchas aproximaciones fundamentales –matemática, fenomenología, estética, semiótica, lógica, metafísica– y constituye uno de los sostenes más originales de toda la arquitectónica peirceana. Pero Peirce *alcanzó a ver aún más allá* y propuso abordar una *forma extendida de GAMA* (que denominaremos GAMA II) como el *lugar de la invención sistemática en lógica allende lo proposicional, relativo o modal*. Peirce vislumbró explícitamente ese GAMA II como un lugar natural para el estudio del *metalenguaje* (!), pero su profunda intuición alcanzó realmente una dimensión visionaria al propugnar a GAMA II como *topos* privilegiado de la creatividad, donde las generaciones venideras ampliarían el pensamiento exacto, extenderían indefinidamente el *summum bonum* y harían crecer continuamente el potencial lógico de la humanidad.

CAPÍTULO **5**

TIPOS Y TOPOS. GAMA (II): LÓGICAS EXTENDIDAS

Peirce subrayaba que "In the Gamma part of the subject all the old kind of signs take new forms" [1903; CP 4.512; ver la cita entera, p. 34], y que consideraría como un "new Columbus" a quien descubriría algún signo gráfico radicalmente diferente de aquellos ya introducidos. Aunque este *nuevo Colón* no ha surgido aún, tanto [Zeman 1997] con su cálculo de tinturas, como [Oostra 2009, 2010a, 2010b] con su cálculo de gráficos intuicionistas, han conquistado realmente por vez primera algunos de los subcontinentes avizorados por Peirce. La tarea para las generaciones venideras empieza a adquirir mayores posibilidades de éxito gracias a los notables avances de Zeman y de Oostra. Coincidiendo con Oostra, hemos de hecho sugerido múltiples veces que ha llegado la hora de empezar a *liberarse* del influjo mismo de Peirce y de sus direccionamientos y configuraciones iniciales. En este capítulo final, después de revisar la herencia de las ideas peirceanas, sugeriremos algunos caminos alternativos de desarrollo para los gráficos existenciales.

Peirce construyó *nuevas formas para viejos tipos de signos* al *autorreferir* el pensamiento diagramático, es decir, al intentar expresar algunas propiedades de los gráficos a su vez en un *metalenguaje* gráfico. Por ejemplo, Peirce extendió la línea de identidad BETA $P \,\text{———}\, Q$, donde se identifican individuos existentes ($\exists x(P(x) \wedge Q(x))$), a una línea de identidad GAMA $X \mathrel{-\!\!\supset\!\!-} Y$, donde se identifican gráficos (Y substituible por, o coincidente con, X). Asociados a esa línea extendida, Peirce introdujo nuevos signos en el metalenguaje ("potentials") para representar la hoja de aserción, un área, un corte, un individuo, una mónada, una relación binaria, etc. [1903; CP 4.528-529], pero, lo que es aún más asombroso, mucho antes de la eclosión de la escuela de Hilbert, Peirce detectó también el eventual interés de empezar a manejar no sólo un metalenguaje sino un verdadero *metacálculo lógico* ("It is necessary that we should be able to reason in graphs about graphs" [1903; CP 4.527]). Diversos *ejemplos de metacálculo*, en manuscritos aún inéditos (Mss. 467, 468, 511, descritos en parte en [Roberts 1973, pp. 71-74]), muestran en efecto cómo ese metacálculo de orden superior (II) se aplica al cálculo subyacente (I) de los gráficos: prueba tipo (II) de que un gráfico (I) es correcto, expresión tipo (II) de la regla de doble corte (I), prueba tipo (II) del borramiento parcial (en área par) de una línea de identidad (I), vía el hecho (II) de que una línea de identidad (I) es la superposición de dos líneas que luego se encogen, etc.

Dentro de las progresivas clasificaciones de las ciencias propuestas por Peirce [Kent 1987], el polígrafo norteamericano no alcanzó nunca a estudiar detenidamente la última subentrada de la clasificación (3.3), es decir, las ciencias mismas de la clasificación científica ("No classification of the science of review has been attempted" [1903; CP 1.202]). Un *reflejo* importante de esa "science of review" yace sin embargo en el lugar (2.2.3.3) donde viven los gráficos existenciales (y, en particular, GAMA II). El entorno (3.3) cubre lo que, a fines del siglo XX, se empezaría a denominar *sistémica* [Luhmann 1998] y que se refleja, en forma acotada, en las experimentaciones de tipo GAMA II emprendidas por Peirce. En efecto, el metalenguaje gráfico debe entenderse precisamente como forma prematura de jerarquización y organización *sistémica* del saber: descubrimiento de razonamientos de tipos distintos (I, II), formación de íconos reflexivos entre ambos niveles (la "autopoiética" de Maturana y Luhmann), construcción de procedimientos de transvase entre ellos, etc.

Ahora bien, la reflexividad es plena *en ambos sentidos*, con lo que tenemos una *"buena" dialéctica*, no formalizada, pero que podría tal vez modelarse categóricamente vía el concepto de "adjunción". En realidad, si la sistémica se refleja en GAMA II, el procedimiento básico fundamental de los gráficos se refleja a su vez en la sistémica. Hemos ya indicado cómo la *iteración/desiteración* en los gráficos existenciales supera su campo de introducción y constituye un proceso semiótico *universal* mucho más vasto. En particular, la iteración/desiteración *actúa* sobre la clasificación de las ciencias con muy diversos *subreflejos* dentro de la clasificación, con lo que tenemos aquí también una *"buena" simetría*, no formalizada, pero que podría tal vez modelarse algebraicamente vía el concepto de "acción" de un monoide o grupo. La jerarquización sistémica y la emergencia sistémica misma de GAMA II pueden verse así como fragmentos parciales de una iteración/desiteración muy general dentro de la arquitectónica peirceana. La coherencia de la urdimbre es siempre sorprendente. Los procesos de *autorreferencia* enriquecen el panorama. La *multiplicatividad sistémica* del sistema mismo asegura su progresivo acercamiento al *summum bonum*, pues el "crecimiento continuo de la potencialidad" se nutre de sus propias iteraciones dentro de contextos evolutivos y alternos del saber.

Las "nuevas formas" para los viejos signos en los gráficos existenciales deben empezar a multiplicarse. En esa dirección, Oostra ha sugerido (comunicación personal) que la hoja de aserción, asumida desde Peirce como el plano euclideano entero, debería poder entenderse más débilmente como *localmente euclideana*. Esto daría lugar a modelos "no euclideanos" de la hoja de aserción que sean, por ejemplo, superficies del tipo de una *esfera*, o del tipo de una *banda de Möbius*, o del tipo de un *toro*, etc. Las lógicas de gráficos existenciales en esas superficies serían sin duda muy extrañas. Oostra ha indicado, por ejemplo, cómo la *lógica de la esfera* llevaría a leyes antiintuitivas de la forma $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \wedge q$: tómese el corte alrededor de q y defórmese (en caso de no tener nada más escrito sobre la esfera) haciendo girar uno de sus bordes completamente alrededor de la esfera hasta liberar q y encerrar p. La lógica de la esfera tiene que ser entonces una lógica *paraconsistente*, pues una escritura de un doble corte (clásico) alrededor de un gráfico vacío lleva por deformación del corte exterior a una aserción (doble) del pseudográfico. La *lógica de la banda de Möbius* identifica por su parte recto y revés, invalidando todas las consideraciones básicas de Peirce sobre la profundidad de los cortes y los pasajes a otros mundos, pero podría llegar a tener algún interés que no vislumbramos por el momento.

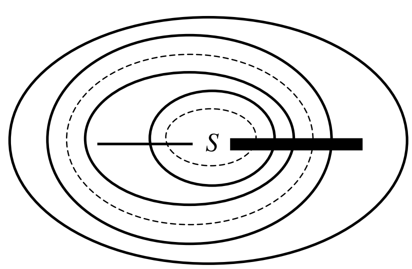
Los cambios de *tipos*, los cambios de *topos*, son estrategias típicamente peirceanas. Arquitectónica general del tránsito, el *sistema sistémico* de Peirce convoca el cambio y busca el conocimiento a través de residualidades dialécticas, remanentes relacionales o niveles de permanencia detrás del movimiento. Muchos de los invariantes universales fundamentales para Peirce, como las categorías cenopitagóricas o los pegamientos sinequistas, emergen justamente como *arquetipos* detrás de la variabilidad de los *topos*. Las transformaciones de los lugares (*topos*) conllevan sus *tipos* de lógicas asociadas. De nuevo, la teoría de categorías provee aquí guías que pueden ser de gran ayuda (para otras conexiones entre el sistema *general* de Peirce y la teoría de categorías, ver [Zalamea 2008c]). Los *topos elementales* de Lawvere modelan colecciones de conjuntos variables, con lógicas intuicionistas subyacentes codificadas por *arquetipos* de pertenencia generalizada ("clasificadores de subobjetos"), y, como casos particulares de topos elementales, los topos de acciones de un monoide poseen interesantes lógicas no clásicas *exactamente* cuando el monoide *no* es grupo. Una pregunta de *fondo* consiste en averiguar si diversos tipos de acciones monoidales corresponden a diversas deformaciones de gráficos en extensiones del tipo GAMA II. Para ello, habría que introducir cruciales *homologías/cohomologías* para los gráficos existenciales, una línea ciertamente aún vaga de trabajo que, no obstante, podría llegar a constituir su mayor eclosión matemática.

Por otro lado, la jerarquía *sistémica* en los topos elementales funciona a la perfección, ya sea entre niveles de morfismos (conectivos internos en el clasificador asociados a operadores externos entre subobjetos), ya sea a través del uso ubicuo del proceso iteración/desiteración (conectivos automáticamente intuicionistas). Más allá de sus eventuales conexiones con los gráficos, los topos elementales incorporan de hecho –tanto en su metodología filosófica subyacente (teoría de cambios e invarianzas en el cruce de lógica y geometría) como en su arsenal técnico (suficiencia de límites, internalización de Yoneda en el clasificador)– procedimientos sistémicos que podrían llamarse típicamente peirceanos: *(i)* ubicación de distintos niveles de signos, *(ii)* construcción de un instrumentario de pasajes entre esos niveles, *(iii)* representación de invariantes para el tránsito vía arquetipos universales, *(iv)* estructuración global a través de acciones locales arquetípicas. Todo Peirce resurge y revive así en las postrimerías del siglo XX y en los comienzos del XXI.

El lenguaje gráfico de primer orden (ALFA, BETA o GAMA) puede también extenderse a *segundo orden* en GAMA II, introduciendo *cuantificaciones sobre relaciones* (y no sólo sobre individuos) que pueden ser útiles en diversas instancias. Por ejemplo, con un cuantificador de segundo orden puede formalizarse como sigue un enunciado de la máxima pragmaticista (para más detalles ver [Zalamea 2001], [Nubiola & Zalamea 2010]). Sea *S* un símbolo cualquiera; la máxima afirma que el conocimiento de *S* se obtiene mediante la integración de todas las relaciones necesarias entre las interpretaciones de *S* y elementos de su contexto, al recorrer todos los posibles ámbitos interpretativos. Con la simbología usual, esto se puede escribir semiformalmente:

$$\forall S \ (S \equiv \int_{R,\#} \lozenge \exists x \Box \, S^{\#}(R,x) \,) \qquad (*)$$

El ícono integral expresa la *dimensión pragmática*, coligazón vertical de todas las interpretaciones concebibles, y el índice sostenido $S^{\#}(R,x)$ denota el interpretante de S en el contexto x de acuerdo con las relaciones R del contexto. La implementación de esta frase semiformal en un lenguaje lógico formal depende de las traducciones de la integral y de los sostenidos. Una primera implementación propondría identificar # con la *identidad* –uso de la *Nota notae*, principio de *autorreferencia* predilecto de Peirce ([1902; CP 2.590-591]; "The sign of anything, *X*, is itself a sign of the very same *X*" [c. 1906; CP 4.561 nota 1]) según el cual se codifican los interpretantes de un signo en el signo mismo– y traducir la integral como una *cuantificación universal sobre relaciones*. En GAMA II, esta última traducción puede graficarse mediante una *línea de identidad gruesa* que represente el *existencial de relaciones*, y obtenemos entonces un gráfico existencial para el segundo miembro de la equivalencia (*):



(**)

donde la línea gruesa representa un existencial de segundo orden. Para establecer la validez de la máxima pragmaticista, la manipulación de este gráfico mediante reglas adecuadas debería resultar ser *equivalente* a *S*. Hemos verificado ([Zalamea 2001], [Nubiola & Zalamea 2010]) que este gráfico es *reducible* a *S*, en caso de que puedan *eliminarse los dobles cortes quebrados*, es decir, en caso de que las posibilidades necesarias $\Diamond\Box$ se reduzcan a lo actual (recuérdese la aparición de esos dobles cortes quebrados en sistemas modales del tipo *S4.2* (p. 83)). No obstante, la implicación inversa (pasar de *S* a la "lectura pragmática" de *S* (**)) no parece ser demostrable, ni siquiera con la eventual introducción del doble corte quebrado. Lo más importante queda entonces por realizarse aún en esta dirección de trabajo (no trivializar # en la identidad, devolver *S* hacia su lectura pragmática), pero lo anterior provee un ejemplo de manejo en GAMA II donde emergen *nuevas formas para viejos tipos de signos*.

Para Peirce, los gráficos existenciales constituían un verdadero *laboratorio del pensamiento*. En el ámbito acotado y moderado de los gráficos, la arquitectónica general del sistema peirceano se ponía a prueba. Como hemos visto, muchas de las fuerzas cruciales de la arquitectónica entera –reglas pragmáticas, tránsito semiótico, realismo modal, categorías cenopitagóricas, sinequismo, lógica de la abducción– alcanzan "reflejos privilegiados" en el espacio de los gráficos (recordemos los "momentos privilegiados" de Proust). La *plasticidad* del laboratorio *delimitado* (*in nuce*, yendo a lo esencial) es capaz de reflejar la plasticidad del sistema *ilimitado* (*in extenso*, reverberando sobre todo el cosmos). De hecho, algunas de las ampliaciones GAMA corresponden *in nuce* a eventuales ampliaciones *in extenso* de la arquitectónica peirceana desde una perspectiva categórica. Señalamos esquemáticamente a continuación dos líneas (*A*, *B*) abiertas en la exploración del sinequismo peirceano (*in extenso*) mediante las herramientas de la teoría matemática de categorías, e indicamos algunos de sus apuntadores o reflejos (*in nuce*) en GAMA II.

Una primera línea podría denominarse *(A) Pragmae del continuo*: construir una "tópica categórica" que estudie sistemáticamente las correlaciones sintéticas globales entre sitios del conocimiento, y construir una geometría que estudie los modos de conexión local entre esos lugares y detecte sus invariantes modales. Se trata de dos subprogramas vagos e indeterminados (en un sentido peirceano) pero que deben proponer *alternativas* ante una filosofía analítica cuyos orígenes fueron excesivamente determinados por los fundamentos, los conjuntos y la lógica clásica. Precisando esas alternativas, los *pragmae* del continuo proponen una reconstrucción de la matemática como *diferencial relacional de posibilidades reales, en un contexto evolutivo y dinámicamente platónico*. En la frase anterior cada término se contrapone con un correspondiente concepto *pendular* dentro de la edificación analítica de la teoría clásica de conjuntos. En efecto, desde la perspectiva de la teoría matemática de categorías, la matemática resulta ser *evolutiva* (los objetos de un topos son básicamente conjuntos que se desarrollan en el tiempo), un hecho que se contrapone con la creencia clásica de una matemática fija y rígida en el tiempo; *dinámicamente platónica* (las categorías proponen una red de contrastaciones entre naturalidad y artificialidad, preocupándose siempre por una jerarquía de obstrucciones reales en el mundo matemático), un hecho que se contrapone con la lectura "vulgarizada" de un Platón situado meramente en lo ideal, y que en realidad se aproxima a una dinámica de gradaciones mucho más cercana al Platón original; *diferencial relacional* (las categorías descubren una unidad relacional detrás de la diferencia, pero asumen esta diferenciabilidad como el motor mismo del pensamiento matemático), un hecho que se contrapone con el reduccionismo conjuntista clásico; *modal* (las categorías configuran una red de constantes translaciones, que pueden entenderse como redes de representación e interpretación abiertas a la modulación/modalización), un hecho que se contrapone con la reconstrucción clásica uniforme de la matemática mediante el infinito actual cantoriano. Como puede observarse, este amplio programa, *in extenso*, tiene sus precisos apuntadores *in nuce* en GAMA II: la *evolución* de los nuevos signos GAMA II es permanente, el *dinamismo platónico* es visible en la jerarquía de permisos y obstrucciones de los sistemas, la *relacionalidad diferencial* se capta con las diferentes líneas de identidad (fina, primer orden; gruesa, segundo orden, etc.), la *modalidad* recorre todo GAMA.

Una segunda perspectiva, que reúne específicamente muchos de los temas abiertos en los capítulos anteriores, puede designarse como *(B) Modelización de los gráficos existenciales en el "corazón" de la matemática:* construir modelos matemáticos relevantes dentro de tres líneas centrales de desarrollo matemático –variable compleja [Zalamea 2003], lógica de los haces ([Caicedo 1995], [Zalamea 2007]), categorías monoidales generales ([Brady & Trimble, 2000a, 2000b], [Zalamea 2010])– que acerquen los gráficos a algunas consideraciones de peso en la disciplina. No se puede seguir pensando en los gráficos como un mero *lenguaje* o como una *sintaxis* diagramática [Shin 2002], y debe en cambio insertarse su complejidad semántica y pragmática dentro de los cauces centrales de la matemática. El tránsito *natural* entre la lógica intuicionista, sus modelos topológicos y el pensamiento lógico/ topológico de Peirce debe explicitarse y desarrollarse completamente, siguiendo los importantes avances de Burch, Havenel y Oostra. Las conexiones entre gráficos existenciales intuicionistas, lógica de haces, fibraciones complejas y superficies de Riemann (cercanas a los libros GAMA de hojas de aserción) pueden llevar a revolucionar, no sólo nuestra actual percepción excéntrica y aislada de los gráficos, sino nuestra comprensión de temas tan nucleares en la matemática (y aún inexplorados) como puede ser la lógica intrínseca de la variable compleja. Deben entenderse también aquí las ideas de genericidad que están surgiendo en técnicas matemáticas avanzadas, como cobordismo algebraico y cohomología motívica. Toda una tendencia categórica a buscar arquetipos iniciales (topos clasificadores, alegorías libres, motivos) debe poder ayudar a encauzar la búsqueda peirceana de un continuo genérico inicial, que pueda ser *proyectado* sobre contextos parciales de continuidad. Este es el caso de un eventual entendimiento de la hoja de aserción ALFA, las deformaciones de la línea de identidad BETA o los libros GAMA mediante el plano complejo, ciertas formas de extensión analítica o adecuadas superficies de Riemann.

Al recordar las ventajas de observar el *revés* de los gráficos (“el otro lado del espejo”, p. 81), Peirce indicaba cómo “This, taken in connection with other premisses, led me back to the same conclusion to which my studies of Pragmatism had already brought me, the reality of some possibilities. This is a striking proof of the superiority of the System of Existential Graphs to either of my algebras of logic” [1906;

CP 4.581]. Hemos registrado, en efecto, la asombrosa *superioridad* de ese laboratorio. Se ha avanzado mucho desde que [Quine 1934] afirmara su supuesta inferioridad, descartándolos como "good entertainment" en su condescendiente reseña de los *Collected Papers IV*:

> The other material on exact logic has to do with logical graphs. A series of extensions and modifications of Euler's scheme of diagrams leads Peirce to an elaborate scheme of his own, designed for the expression of propositions involving any manner of complexity in point of relational structure, quantity and even modality. The system is intended rather for the analysis of logical structure than for the facilitation of inference; because of its cumbersomeness it is less suited to the latter purpose than is the algebraic form of logic. One questions the efficacy of Peirce's diagrams, however, in their analytic capacity as well. Their basic machinery is too complex to allow one much satisfaction in analyzing propositional structure into terms of that machinery. While it is not inconceivable that advances in the diagrammatic method might open possibilities of analysis superior to those afforded by the algebraic method, yet an examination of Peirce's product tends rather, apagogically as it were, to confirm one's faith in the algebraic approach. [...] The volume as a whole recommends itself to the logico-mathematical reader above its predecessors in the series. Its 600 pages contain a generous variety of good entertainment.

El tiempo ha confirmado la fe de Peirce en los gráficos y ha devaluado la torpe reseña de la joven estrella naciente de Harvard en 1934. Demasiado dirigido a la gramática del lenguaje y a la lógica clásica, Quine no pudo intuir la riqueza pragmática, topológica y extensiva (lógicas no clásicas) de los gráficos. El asunto tendría poca importancia si no fuese por el prestigio del autor, quien desprestigió a su vez, de manera más bien superficial, un profundo potencial subyacente.

A contracorriente, allende Quine y su enorme influencia, las tesis doctorales de Roberts y Zeman salvaron a los gráficos de su olvido. Y aún a contracorriente, las últimas dos décadas de trabajo alrededor de los gráficos, con los aportes espectaculares de Burch, Zeman, Brady, Trimble y Oostra, auguran finalmente la emergencia del "lugar privilegiado" que los gráficos merecen ocupar. Tal como Peirce intuía en uno de sus manuscritos inéditos (Ms. 295, c. 1906, p. 53), los gráficos han requerido, y seguirán requiriendo, la *creatividad creciente* de una comunidad de investigadores:

> The above are the conventions establishing the System of Existential Graphs in its present state. I should be greatly disappointed if this were to be its final state. For it is at present far from the ideal perfection to which I hope some student may bring it.

Los avances en el entendimiento de los gráficos existenciales peirceanos muestran que el deseo de Peirce se está realizando, y que ese conocimiento se acerca progresivamente al *summum bonum*. De hecho, en el caso de los gráficos, el *crecimiento continuo de la potencialidad* no ha cesado de ampliarse gracias a ese "student" del futuro –llámese Roberts, Zeman, Burch, Brady, Trimble, Oostra– que el genio de Peirce logró anticipar con humildad y *esperanza*.

BIBLIOGRAFÍA E ÍNDICE BIBLIOGRÁFICO (*)

BAJTIN, Mijail (1924). "El problema del contenido, el material y la forma en la creación literaria", en: Mijail Bajtin, *Teoría y estética de la novela*, Madrid: Taurus/Santillana, traducción 1991. [33]

BRADY, Geraldine & TRIMBLE, Todd (2000a). "A Categorical Interpretation of C. S. Peirce's Propositional Logic Alpha." *Journal of Pure and Applied Algebra* 149, 213-239. [15, 41, 58, 102]

-- (2000b). "A String Diagram Calculus for Predicate Logic and C. S. Peirce's System Beta." *Preprint*. [16, 41, 72, 102]

BURCH, Robert (1991). *A Peircean Reduction Thesis. The Foundations of Topological Logic*, Lubbock: Texas Tech University Press, 1991. [41, 69, 88]

CAICEDO, Xavier (1995). "Lógica de los haces de estructuras", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74) (1995), 569-585. [102]

------------------------ (1997). "Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XXI (81) (1997), 521-534. [50].

CAICEDO, Xavier & CIGNOLI, Roberto (2001). "An Algebraic Approach to Intuitionistic Connectives", *Journal of Symbolic Logic* 66 (2001): 1620-1636. [50]

(*) Entre paréntesis cuadrados [ ], al final de cada referencia bibliográfica, se indican la(s) página(s) del cuerpo del texto donde se menciona o se estudia la referencia en cuestión.

CASSIRER, Ernst (1910). *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (traducción: *Substance et fonction*, París: Minuit, 1977). [66]

----------------------- (1975). *Esencia y efecto del concepto de símbolo* (1959), México: Fondo de Cultura Económica, 1975. [77]

COLMAN, Felicity (2009). *Film, Theory and Philosophy. The Key Thinkers*, Durham: Acumen, 2009. [38]

FABBRICHESI LEO, Rossella (1992). *Peirce – Categorie*, Bari: Laterza, 1992. [32]

FREYD, Peter (1990). (con André Scedrov) *Categories, Allegories*, Amsterdam: North-Holland, 1990. [71]

GROTHENDIECK, Alexander (1985). *Récoltes et semailles* ("Cosechas y siembras"), inédito, 1000 pp., 1985-1986. [60]

HAMILTON, William (1890). *Lectures on Metaphysics and Logic, Volume IV*, Edimburgo: Blackwood, 1890. [45]

HAVENEL, Jérôme (2006). *Logique et mathématique du continu chez Charles Sanders Peirce*, Thèse de Doctorat, Paris: École des Hautes Études en Sciences Sociales, 2006. [28, 47]

JOYAL, André & STREET, Ross (1991). "The Geometry of Tensor Calculus I", *Advances in Mathematics* 88 (1991): 55-112. [74]

KENT, Beverly (1987). *Logic and the Classification of Sciences*, Montreal: McGill-Queen's University Press, 1987. [94]

LUHMANN, Niklas (1998). *Sistemas sociales. Lineamientos para una teoría general*, Barcelona: Anthropos, 1998. [95]

MELVILLE, Herman (1988). *Moby Dick* (1849-51) (eds. H. Hayford, H. Parker, G.T. Tanselle), Evanston and Chicago: Northwestern University Press and The Newberry Library, 1988. [64]

MOLINA, Fabián & OOSTRA, Arnold (2003). "Correspondencia entre algunos sistemas de lógica modal y los gráficos existenciales gama de Peirce", Tesis de Pregrado de Molina bajo la dirección de Oostra, Universidad del Tolima. [80, 83]

MOORE, Matthew (2010). (ed.) *New Essays on the Mathematical Philosophy of C. S. Peirce*, Chicago: Open Court, 2010. [28]

MURPHEY, Murray (1961). *The Development of Peirce's Philosophy*, Cambridge: Harvard University Press, 1961. [25]

MUSIL, Robert (1913). “El hombre matemático”, en *Ensayos y conferencias*, Madrid: Visor, 1992. [75]

NUBIOLA, Jaime & ZALAMEA, Fernando (2006). *Peirce y el mundo hispánico. Lo que C. S. Peirce dijo sobre España y lo que el mundo hispánico ha dicho sobre Peirce*, Pamplona: Eunsa, 2006. [19]

-- (2010). “Existential Graphs and Proofs of Pragmaticism”, *Semiotica* (2010), por aparecer. [76, 98, 100]

OOSTRA, Arnold (2008). “La matemática intuicionista y sus conexiones con el pensamiento de Peirce”, *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 1 (2008), por aparecer. [18, 47]

-------------------- (2009). “Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista”, *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 2 (2009), por aparecer. [15, 18, 47, 57, 58, 93]

-------------------- (2010a). “Gráficos existenciales intuicionistas: Alfa, Beta, Gama”, preprint. [15, 18, 41, 57, 93]

-------------------- (2010b). “A Lattice of Intuitionistic Existential Graphs Systems”, preprint. [15, 18, 41, 57, 93]

-------------------- (2011). *Lógica gráfica*, en curso, planeado para 2011. [13, 17, 26, 67]

POVEDA, Yuri (2000). “Los gráficos existenciales de Peirce en los sistemas Alfa^{o} y Alfa^{oo}”, *Boletín de Matemáticas* Nueva Serie 7 (2000), 5-17. [18]

QUINE, W.V.O. (1934). “Review – Collected Papers of Charles Sanders Peirce – Volume IV”, *Isis* XXII (1934), 551-553. [104]

ROBERTS, Don (1963). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, Ph. D. Thesis, The University of Illinois, 1963. [13, 26]

------------------- (1973). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton, 1973. [13, 27, 45, 65, 67, 94]

SHIN, Sun-Joo (2002). *The Iconic Logic of Peirce’s Graphs*, Cambridge: MIT Press, 2002. [13, 102]

THIBAUD, Pierre (1982). *La Lógica de Charles Sanders Peirce*, Madrid: Paraninfo, 1982. [13, 67]

THOM, René (1982). “L’aporia fondatrice delle matematiche”, *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1982, pp. 1133-1146. [41]

WATKINS, Calvert (2000). (ed.) *The American Heritage Dictionary of IndoEuropean Roots*, Boston: Houghton Mifflin, 2000. [34]

ZALAMEA, Fernando (1997). "Lógica topológica: una introducción a los gráficos existenciales de Peirce", en: *Memorias XIV Coloquio Distrital de Matemáticas*, Bogotá: Universidad Nacional, 1997. [18]

------------------------- (2001). *El continuo peirceano*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2001. [18, 28, 35, 47, 76, 88, 98, 100]

------------------------- (2003). "Peirce's Logic of Continuity: Existential Graphs and Non-cantorian Continuum", *The Review of Modern Logic* 9 (2003): 115-162. [18, 102]

------------------------- (2007). "Ostruzioni e passaggi nella dialettica continuo/discreto: il caso dei grafi esistenziali e della logica dei fasci", *Dedalus. Rivista di Filosofia, Scienza e Cultura - Università di Milano* 2 (2007): 20-25. [18, 102]

------------------------- (2008a). *Por una re-visión de la mirada creativa. Imágenes, saber y continuidad en Warburg, Florenski, Auerbach, Merleau-Ponty*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2008. [40]

------------------------- (2008b). "Towards a Complex Variable Interpretation of Peirce's Existential Graphs", en: Henrik Rydenfelt *et.al.* (eds.), *Applying Peirce*, Cambridge: Cambridge Scholars Publishers, por aparecer. [15, 18, 41, 61, 75, 86]

------------------------- (2008c). "A Category-Theoretic Reading of Peirce's System: Pragmaticism, Continuity and The Existential Graphs", en: Matthew Moore (ed.), *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*, Chicago: Open Court, por aparecer. [18, 61, 97]

------------------------- (2010). "Category-theoretic Models for Intuitionistic Existential Graphs Systems", en curso, planeado para 2010. [16, 18, 41, 61, 74, 102]

ZEMAN, J. Jay (1963). *The Graphical Logic of C.S. Peirce*, Ph.D. Thesis, University of Chicago, 1963. [13, 26, 80, 82]

------------------ (1997). "The Tinctures and Implicit Quantification over Worlds", en: Jacqueline Brunning, Paul Fortster (eds.), *The Rule of Reason. The Philosophy of Charles Sanders Peirce*, Toronto: University of Toronto Press, 1997. [39, 85, 93]

ÍNDICE ONOMÁSTICO