Ejemplo de EFICIENCIAS - Matemáticas

Este examen consta de dos partes. En la primera parte hay 40 preguntas de selección múltiple que deben responderse en un tiempo máximo de dos horas. En la segunda parte hay 10 preguntas abiertas que deben responderse en un tiempo máximo de tres horas.

El examen se calificará sobre un total de 100 puntos de los cuales 40 puntos corresponden a la primera parte y 60 puntos corresponden a la segunda parte.

Convenciones generales de notación:

$\mathbb{R}$: *Conjunto de los números reales.*

$\mathbb{Q}$: *Conjunto de los números racionales.*

$\mathbb{Z}$: *Conjunto de los números enteros.*

$\mathbb{Z}_n$: *Conjunto de los enteros módulo* n.

$M_n(K)$: *Conjunto de las matrices de tamaño* $n \times n$ *con elementos en* K.

1 Primera Parte - Preguntas cerradas

Esta parte del examen consta de 40 preguntas de selección múltiple. Cada una de ellas tiene un valor de un punto. Usted dispone de un tiempo total de dos horas para responder esta parte del examen.

1. Sean a, b, c, d enteros positivos tales que $ad - bc = 1$. Considere las siguientes afirmaciones:

   I. El mínimo común múltiplo de a y b es ab.

   II. c y d son primos relativos.

   Es correcto asegurar que

   A. I y II son verdaderas — B. I es verdadera y II es falsa
   C. I y II son falsas — D. I es falsa y II es verdadera

2. Sea p un número primo y sea $m = p^n$ donde n es un entero positivo. El número de divisores positivos de m^2 es

   A. $n+1$ B. $2n+1$ C. $2n-1$ D. $n-1$

3. Sean a y b dos enteros positivos. Sean A y B los conjuntos de divisores positivos de a y de b respectivamente.

   Considere las siguientes afirmaciones:

   I. El conjunto de los divisores positivos de ab es $A \cup B$.

   II. El conjunto de los divisores positivos del máximo común divisor de a y b es $A \cap B$.

   Es correcto asegurar que

   A. I y II son verdaderas — B. I es verdadera y II es falsa
   C. I y II son falsas — D. I es falsa y II es verdadera

4. Considere las siguientes afirmaciones:

   I. Dos cubos consecutivos nunca son congruentes módulo 3.

   II. Dos cubos consecutivos nunca son congruentes módulo 5.

   Es correcto asegurar que

   A. I y II son verdaderas — B. I es verdadera y II es falsa
   C. I y II son falsas — D. I es falsa y II es verdadera

5. Un envase de hojalata cerrado, tiene forma de cilindro circular recto de 60 cm^3 de volumen y se empleó la mínima cantidad de hojalata en su elaboración. El radio de la base es

   A. $\frac{120}{\pi}$ $cm.$ B. $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ $cm.$ C. $\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$ $cm.$ D. $\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$ $cm.$

6. Sean $A(-2,0)$ y $B(2,0)$. Considere el lugar geométrico de los puntos $M(x,y)$ del plano cuya suma de distancias de M a A y de M a B es constante, esto es, $MA+MB$ es constante. Si el punto $M(4,0)$ está en el lugar geométrico, entonces todo punto (x,y) del lugar geométrico satisface la ecuación

   A. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=1.$ B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

   C. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1.$ D. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1.$

7. Sea ABC un triángulo, donde el ángulo entre el segmento AB y el segmento AC es $30°$ y al ángulo entre el segmento AC y el segmento BC es $60°$. Si la mediana que parte de B hacia AC mide 2,el área del triángulo es

   A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 4 D. 2

8. Considere dos circunferencias del mismo radio tales que cada una de ellas pasa por el centro de la otra. Sean P y Q los puntos de corte de estas circunferencias y sean E y F los centros. Considere las siguientes afirmaciones:

   I. El ángulo PEQ mide 120^o.

   II. El cuadrilátero $PEQF$ es un rombo.

   Es correcto asegurar que

   A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
   C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

9. Si T es una transformación lineal del plano en los números reales tal que $f(1,1)=1$ y $f(-1,0)=2$, entonces $f(3,5)$ es igual a

   A. -5 B. 0 C. 8 D. 9

10. Sea A una matriz 2×2 tal que $I\neq A\neq -I$, donde I es la matriz identidad. 2×2. Si $A=A^{-1}$ entonces la traza de la matriz A es

    A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

11. Si M es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces M^{99} es igual a

    A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12. Los valores propios de la transformación lineal real $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, w, z) = (y, -x, z, -w)$ son

    A. $1, 0, -1, 2.$ B. $1, i, -i.$ C. $i, -i.$ D. $2, -2, 0, 1.$

13. Sea P la función de probabilidad de una cierta variable aleatoria en los enteros no-negativos. Si P satisface las relaciones $P(0) = P(1)$ y $P(k + 1) = \frac{1}{k}P(k)$ para $k = 1, 2, 3, ...$, entonces el valor de $P(0)$ es

    A. 1 B. $e - 1$ C. $(e + 1)^{-1}$ D. e^{-1}

14. Tres dados normales con sus caras numeradas de 1 a 6 son lanzados independientemente. Para $k = 1, 2, 3$, se denota con A_k el evento "el k- ésimo dado resulta en un 6". La probabilidad del evento $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es

    A. $\frac{1}{216}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{91}{216}$

15. Sea G un grupo con elemento neutro e. La función $G \to G : x \mapsto axa^2$ es un homomorfismo si y solamente si

    A. G es abeliano. B. $a = e$. C. $a^2 = a$. D. $a^3 = e$.

16. Sea X un conjunto de 5 elementos. Si X^X es el conjunto de funciones de X en X, entonces el número de elementos del grupo de invertibles de $\left(X^X, \circ\right)$ es

    A. 5^5 B. 25 C. 120 D. 32

17. Considere las siguientes afirmaciones sobre un grupo G de orden 49

    (i) G es abeliano.

    (ii) G es isomorfo a $\mathbb{Z}_{49}$.

    (iii) G es simple.

    (iv) G tiene al menos un sub-grupo normal de orden 7.

    Es correcto afirmar que son verdaderas únicamente

    A. (i) y (ii) B. (ii) y (iii) C. (iii) y (iv) D. (i) y (iv)

18. Sea G un grupo. Considere las siguientes afirmaciones:

    I. Si H y K son sub-grupos de G entonces $H \times K$ es un sub-grupo de $G \times G$.

    II. Si H y K son sub-grupos de G entonces $HK = \{hk : h \in H \text{ y } k \in K\}$ es un sub-grupo de G.

    Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

19. El anillo $\mathbb{Z}_{60}$ tiene _________ ideales primos.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

20. Sean F y K anillos conmutativos con unidad, $h : K \rightarrow F$ un homomorfismo que respeta la unidad. Considere las siguientes afirmaciones

I. Si K es un campo entonces h es inyectivo.

II. Si F es un campo entonces h es inyectivo.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

21. Sea F un campo y sea $p(x) \in F[x]$ irreducible sobre F y de grado 4. Sea K el campo de descomposición de $p(x)$ sobre F. Considere las siguientes afirmaciones:

(i) $F[x] / \langle p(x) \rangle$ es un campo.

(ii) $F[x] / \langle p(x) \rangle$ es un espacio vectorial de dimensión 4 sobre F.

(iii) K es un espacio vectorial de dimensión 4 sobre F.

(iv) $K[x] / \langle p(x) \rangle$ es un campo.

Es correcto asegurar que son verdaderas únicamente

A. (i) y (ii) B. (ii) y (iii) C. (iii) y (iv) D. (i) y (iv)

22. La característica del anillo $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ es

A. 8 B. 24 C. 14 D. 48

23. El valor de $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$ es

A. $\frac{1}{4}\ln(2)$. B. $\frac{1}{2}\ln(2)$. C. $\ln(2)$. D. $2\ln(2)$

24. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente decreciente, tal que $\int_0^{\infty} f(x)dx$ es finita y $f(0) = 1$. Considere las siguientes afirmaciones donde f^{-1} es la inversa de f:

I. $\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(y)dy$.

II. $\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ es una integral impropia.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

25. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

entonces

A. f es discontinua en $(0,0)$.

B. existe la derivada direccional de f en $(0,0)$ en cualquier dirección.

C. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.

D. f es uno a uno.

26. En coordenadas cilíndricas, la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r dz dr d\theta$ corresponde al volumen del sólido limitado por

A. la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}$ y el plano $z = 2$.

B. el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

C. el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.

D. el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

27. Sean $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ dos series numéricas convergentes. Considere las siguientes afirmaciones:

(i) $\sum a_n b_n$ converge.

(ii) $\sum (a_n + b_n)$ converge.

(iii) $\sum \frac{a_n}{b_n}$ converge.

(iv) $\sum (a_n + b_n)^2$ converge.

Es correcto asegurar que son verdaderas únicamente

A. (i) y (ii) B. (ii) y (iii) C. (iii) y (iv) D. (i) y (iv).

28. Sea $F(x,y) = (3x^2 + y^2, 2xy)$ un campo de fuerzas en el plano. El trabajo efectuado para desplazar una partícula desde el punto $(-1,1)$ al punto $(1,1)$ a lo largo de una curva c viene dado por la integral de línea $\int_c F \cdot dc$. Considere las siguentes afirmaciones:

I. El trabajo es independiente de la curva.

II. Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

29. Sean f una función diferenciable de una variable y $u = \frac{x}{y} f(\frac{y}{x})$. Si u satisface una ecuación diferencial parcial de la forma $\frac{x}{y} u_x + u_y = G$, entonces G es igual a

A. 0 B. $\dfrac{u}{x}$ C. xyu D. $-\dfrac{x}{y^2} u$

30. La ley de enfriamiento de Newton dice que:

La tasa de cambio de la temperatura de la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura ambiente en cada instante.

Si $T(t)$ es la temperatura de la superficie del objeto en el tiempo t y Q_0 es la temperatura ambiente (que se considera constante), entonces esta ley de Newton corresponde a la ecuación ______ y la solución tiene la forma _______.

A. $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - Q_0) \quad ; \quad T(t) = Q_0 + ce^{-kt}$

B. $\dfrac{dT}{dt} = kT - Q_0 \quad ; \quad T(t) = Q_0 + ce^{-kt}$

C. $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - Q_0) \quad ; \quad T(t) = Q_0 + e^{-kt}$

D. $\dfrac{dT}{dt} = kT - Q_0 \quad ; \quad T(t) = Q_0 + e^{-kt}$

31. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Considere las siguientes afirmaciones:

I. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |z|$.

II. $|f'(0)| \leq 1$.

III. Existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = kz$.

Es correcto asegurar que

A. II y III se deducen de I.

B. II se deduce de I pero III no.

C. III se deduce de I pero II no.

D. ni II ni III se deducen de I.

32. Sea c la circunferencia de centro en 0 y radio 1, en el plano complejo, orientada en el sentido antihorario. El valor de la integral $\int_c \dfrac{1}{z} dz$ es

A. $\dfrac{1}{2\pi i}$ B. $2\pi i$ C. $-\dfrac{1}{2\pi i}$ D. $-2\pi i$

33. Considere las siguientes afirmaciones acerca de la función

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^z.$$

I. f es inyectiva II. $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

34. La función definida por $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ tiene un polo de grado _____ en $z = 0$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

En las preguntas 35 a 38 se supone que $\mathbb{R}^n$ tiene la topología usual.

35. Sea $X = [0,1] \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$. Considere las siguientes afirmaciones sobre X :

I. El conjunto de los puntos de acumulación de X es $[0,1] \times \mathbb{R}$.

II. X es abierto.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

36. Considere las siguientes afirmaciones sobre $X = \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : x \in (0,1]\right\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$.

(i) X es conexo (ii) X es cerrado

(iii) X es compacto (iv) X es tiene puntos aislados

Es correcto asegurar que son verdaderas únicamente

A. (i) y (ii) B. (ii) y (iii) C. (iii) y (iv) D. (i) y (iv).

37. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere las siguientes afirmaciones:

I. Existe una sucesión de funciones polinómicas que converge uniformemente a f sobre $[a,b]$.

II. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $[a,b]$ entonces $\{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tiene puntos de acumulación.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

38. Sea X un sub-conjunto de $\mathbb{R}^n$. Considere las siguientes proposiciones:

I. X es acotado

II. X es cerrado

III. Toda función continua de X en $\mathbb{R}$ alcanza su máximo.

Es correcto asegurar que

A. I implica III. B. II implica III.

C. III implica I. D. II implica I.

39. Sea X el conjunto de los números reales con la topología usual y sea Y el conjunto de los enteros con la topología generada por los conjuntos de la forma $[z, +\infty)$ con $z \in \mathbb{Z}$. Considere las siguientes afirmaciones acerca de la función

$$f : X \to Y : x \mapsto [x]$$

donde $[x]$ es la parte entera de x.

I. f es continua. II. f es cerrada.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

40. Sea X el conjunto de los números reales con la topología usual y sea Z el conjunto de los números reales con la topología generada por los conjuntos de la forma $(-r, r)$ con $r \in \mathbb{R}$. Sea $W = X \times Y$ con la topología producto. Considere las siguientes afirmaciones:

I. W es un espacio de Hausdorff. II. W es un espacio conexo.

Es correcto asegurar que

A. I y II son verdaderas B. I es verdadera y II es falsa
C. I y II son falsas D. I es falsa y II es verdadera

2 Segunda Parte - Preguntas abiertas

Esta parte del examen consta de diez preguntas con un valor de 6 puntos cada una. Cada pregunta tiene tres partes. La primera parte tiene un valor de un punto, la segunda parte tiene un valor de dos puntos y la tercera parte tiene un valor de tres puntos. Usted dispone de un tiempo total de tres horas para responder esta parte del examen.

I. *Diremos que un entero positivo n es 2-primo si $2^n - 1$ es primo.*

1. Verifique si 12 es 2-primo.
2. Demuestre que si n es 2-primo y $n > 2$ entonces n es impar.
3. Pruebe o refute: Si n es 2-primo entonces n es primo.

II. *Diremos que un polígono es m-regular si el valor numérico de su perímetro (en metros) es igual al valor numérico de su área (en metros cuadrados).*

1. Verifique si un cuadrado de 3 metros de lado es m-regular.
2. Demuestre que todos los cuadrados m-regulares son congruentes.
3. Pruebe o refute: Si un rectángulo es m-regular entonces cada uno de sus lados mide más de un metro.

III. *Una transformación lineal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama proyección si $P \circ P = P$.*

1. Verifique si $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ es una proyección.
2. Demuestre que si $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una proyección inyectiva entonces P es la transformación lineal idéntica.
3. Pruebe o refute: Si $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una proyección entonces P transforma rectas en rectas.

IV. *Sea X un conjunto. Una función $f : X \to X$ es una involución de X si $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$. Designaremos por I_X al conjunto de todas las involuciones de X y por S_X al conjunto de todas las biyecciones de X en X. Se sabe que $(S_X, \circ)$ es un grupo.*

1. Verifique si $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} : x \mapsto 11x$ es una involución de $\mathbb{Z}_{12}$.
2. Pruebe que si I_X es un sub-grupo de S_X entonces I_X es normal en S_X.
3. Pruebe o refute: Para cualquier conjunto no vacío X, se tiene que I_X es un sub-grupo de S_X.

V. *Si R es un anillo conmutativo, entonces un elemento $a \in R - \{0\}$ es un divisor de cero si existe un elemento $b \in R - \{0\}$ tal que $ab = 0$. Un anillo conmutativo con unidad es un dominio entero si no tiene divisores de cero.*

1. Verifique si el anillo $\mathbb{Z}_6$ es un dominio entero.
2. Demuestre que si un dominio entero D es finito entonces D es un campo.
3. Pruebe o refute: Si D es un dominio entero y D tiene cardinal m entonces D es isomorfo a $\mathbb{Z}_m$.

VI. *Sean $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Diremos que g crece más rápido que f si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

1. Sean $f(x) = x^3 - 5x + 1$ y $g(x) = 4x^3 + x^2 + 3x + 100$. Verifique si g crece más rápido que f.
2. Demuestre que si f es una función polinómica tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y g es la función exponencial, entonces g crece más rápido que f.
3. Pruebe o refute: Si g crece más rápido que f entonces existe un $N > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x > N$.

VII. *Sea f una función real de clase C^1.Un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ es un cero de la función f. c es un punto de equilibrio estable si toda solución $x = x(t)$ que en el instante inicial t_0 toma un valor x_0 suficientemente cercano a c, permanece próxima a c para todo $t > t_0$.*

1. Verifique si 0 es un punto de equilibrio estable de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = x$.
2. Demuestre que si c es un punto de equilibrio de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ y $f'(c) < 0$ entonces c es un punto de equilibrio estable.
3. Pruebe o refute: Si c es un punto de equilibrio estable de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ entonces $f'(c) < 0$.

VIII. **Teorema de Rouché:** *Sean f, g funciones holomorfas y $B(a, r)$ la bola abierta con centro en $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$. Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo z, con $|z| = r$,entonces f y g tienen el mismo número de ceros en $B(a, r)$.*

1. Verifique si la ecuación $e^z = az^n$ con $|a| > e$, tiene n soluciones en el disco $|z| < 1$.

2. Muestre que $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$ tiene un cero en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

3. Pruebe o refute: Todos los ceros de la función $z^4 - 5z + 1$ están en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

IX. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Se define* $\limsup a_n$ *como el extremo superior del conjunto formado por todos los números* x *para los cuales existe una subsucesión* $\{a_{n_k}\}$ *de* $\{a_n\}$*, tal que* $a_{n_k} \longrightarrow x$.

1. Si $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)$, verifique si $\limsup a_n = 1$.

2. Sea $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $U = \limsup a_n$. Demuestre que si $x \geq U$ entonces existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_n < x$, para todo $n \geq N$.

3. Pruebe o refute: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales. Si existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_n < b_n$, para todo $n \geq N$, entonces $\limsup a_n \leq \limsup b_n$.

X. *Un espacio topológico* X *se llama* ***autosemejante*** *si para todo* $x \in X$ *y toda vecindad* V *de* x *existe una vecindad abierta* $U \subseteq V$ *de* x *tal que* X *es homeomorfo a* U.

1. Determine si $\mathbb{R}$ con la topología usual es autosemejante.

2. Demuestre que si X es un espacio topológico finito y autosemejante entonces X tiene topología trivial (es decir, los únicos abiertos son X y ϕ).

3. Pruebe o refute: El sub-espacio $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es autosemejante.