Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá
Departamento de Matemáticas
Matemáticas Básicas - **Precálculo** - Grupos 1 al 9.
Facultades de Ciencias, Ingeniería, Agronomía y el programa de Zootecnia
Coordinación: Jeanneth Galeano

Taller 3. Tema: Polinomios y teorema del binomio

"La cualidad más importante que influirá en tu éxito en un curso de Matemáticas es tu actitud. Esta determinará lo que estés dispuesto a hacer en el curso, y la calidad de ese esfuerzo contribuirá de la manera más significativa a tu éxito."(Richard Manning Smith, en su libro: Cómo ser un gran estudiante de Matemáticas)

Los ejercicios de este taller han sido tomados de las siguientes fuentes: De talleres anteriores del grupo de Matemáticas Básicas los ejercicios 6, 8, 10, 12, 15 B y C. De colaboración del profesor Bernardo Acevedo de la Sede Manizales los ejercicios 4 y 5. Y del texto guía: Matemáticas Básicas de la profesora Margarita Ospina los ejercicios 1, 2, 3, 7, 9, 13, 14 y 15 A y D.

1. Considere los polinomios $p_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $p_2(x) = 5x - 7$, calcule:

   A. $p_1(x) + p_2(x)$
   B. $p_1(x) - p_2(x)$
   C. $p_2(x) - p_1(x)$
   D. $p_1(x) \times p_2(x)$

2. Considere las siguientes factorizaciones:

Factorizado	Expandido
$(a+b)^2 =$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 =$	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 =$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 =$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

	Expandido	Factorizado
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 =$	$(a-b)(a+b)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 =$	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 =$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

   A. Pruebe la veracidad de las 7 igualdades de las tablas multiplicando los factores y agrupando términos semejantes.
   B. Utilice la información de las tablas para factorizar los siguientes polinomios.

i. $9x^2 + 30x + 25$	ii. $8x^3 - 27$	iii. $64x^3 + 1$
iv. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$	v. $25x^2 - 30x + 9$	vi. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
vii. $100x^2 - 49$	viii. $3x^2 - 5$	ix. $4x^3 - 27$

3. Dados los polinomios

   $p(x) = -2x^3 + x - 1 \qquad q(x) = x^2 - 6x + 2 \qquad r(x) = 5x^4 - 2x^2 - 3$

   $s(x) = x - 5 \qquad t(x) = x - 4 \qquad w(x) = x + 3 \qquad z(x) = 2x - 3$

   Realice las siguientes operaciones (cuando sea posible, si lo prefiere use división sintética):

A. $p(x) \div q(x)$	E. $q(x) \times s(x)$	I. $t(x) \div w(x)$
B. $r(x) \div p(x)$	F. $p(x) \div t(x)$	J. $r(x) \div t(x)$
C. $r(x) \div q(x)$	G. $p(x) \div w(x)$	
D. $s(x) - p(x)$	H. $p(x) \div z(x)$	K. $r(x) \div w(x)$

4. Realice todo el proceso de simplificación para mostrar que las dos expresiones son equivalentes.

   A. $\left[\left(8a^6\right)^{-1/3}\dfrac{1}{\left(a^{-2}\right)^{1/2}}\right]^{-1}$ y $2a$.

   B. $\dfrac{a^{-1}b^{-2}+a^{-2}b^{-1}}{b^{-2}-a^{-2}}$ y $\dfrac{1}{a-b}$.

   C. $\dfrac{ma^{1/3}}{9nb} \div \left(\dfrac{3n^{1/2}a^{1/3}}{b^{-1/2}}\right)^{-2}$ y ma.

   D. $x^{2m} - 2x^m y^n + y^{2n}$ y $(x^m - y^n)^2$.

   E. $-\left[-a+\{-a+(a-b)-(a-b+c)-[-(-a)+b]\}\right]$ y $3a+b+c$.

   F. $(a^m b^x)(-a^2)(-2ab)(-3a^2x)$ y $-6a^{m+5}b^{x+1}x$.

   G. $\dfrac{n^6+1}{n^2+1}$ y $n^4 - n^2 + 1$.

   H. $a^x(a^{x+1}+b^{x+2})(a^{x+1}-b^{x+2})b^x$ y $a^{3x+2}b^x - a^x b^{3x+4}$.

5. Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

A. $6am - 4an - 2n + 3m$	C. $9n^2 + 4a^2 - 12an$	E. $1 + 6x^3 + 9x^6$
B. $20 - x - x^2$	D. $a^2 + 9 - 6a - 12x^2$	F. $x^3 - y^3 + x - y$

6. Encuentre el residuo de dividir $p(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 5$ entre:

   A. $x - 1$ B. $x + 1$ C. $x + 2$

7. En todos los ejercicios de este punto, exprese los polinomios encontrados en forma factorizada y expandida. En caso de no ser posible encontrar un polinomio que cumpla las características pedidas explique por qué.

   A. Encuentre dos polinomios de grado 3 que tengan como ceros a $-1, 5, 3$.

   B. Encuentre tres polinomios de grados $3, 4$ y 5 respectivamente que tengan como ceros únicamente a 2 y -1.

   C. Encuentre un polinomio de grado 4 que tenga como un cero de multiplicidad 2 a 0.

   D. Encuentre un polinomio de grado 3 que tenga como ceros a $2, -1, 1$ y 0.

   E. Encuentre dos polinomio de grado 3 que tengan como ceros a -1 y 2 pero con diferentes multiplicidades en cada caso.

8. Considere el polinomio $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 10x^2 - 2x - 3$

   A. Haga la lista de las posibles raíces racionales.

   B. Factorice completamente el polinomio.

9. En todos los casos factorice al máximo el polinomio dado y determine cuántos ceros tiene, de qué multiplicidad y si son racionales o irracionales. También determine cuándo se presentan factores no lineales (cuadráticos) que no se pueden factorizar en los reales.

   A. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

   B. $3x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 12x + 24$

   C. $x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{53}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{4}{3}$

   D. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

   E. $8x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2$

   F. $8x^5 + 32x^4 + 32x^3 - x^2 - 4x - 4$

   G. $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 9x - 2$

10. ¿Para qué valores de k el polinomio $p(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11$ es divisible por $(x + 2)$?

Las preguntas 11 y 12 son de **selección múltiple con única respuesta.**

11. Sean a y b dos números naturales, afirmamos que:

    I. $(ab)! = a!b!$ II. $(a + b)! = a! + b!$

    De las afirmaciones anteriores es correcto decir que:

    A. Ambas son ciertas

    B. Las dos son falsas.

    C. I es verdadera y II es falsa

    D. I es falsa y II es verdadera.

12. De las afirmaciones:

    I. $\frac{9!6!3!}{8!5!2!} = 162$ II. $C(28, 2) = \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix} = 378$

    es correcto decir que:

    A. Ambas son ciertas

    B. Las dos son falsas.

    C. I es verdadera y II es falsa

    D. I es falsa y II es verdadera.

13. A. Calcule $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$ cualquiera sea n, y concluya.

    B. Encuentre el valor de los siguientes combinatorios y muestre que $\binom{n}{1}$ y $\binom{n}{n-1}$ son iguales.

    C. Observe la simetría que hay en cada renglón del triángulo de Pascal y apóyese en ella para llenar el espacio en blanco que haga cierta la igualdad entre los combinatorios:

i. $\binom{4}{1} = \binom{4}{\ }$	ii. $\binom{4}{0} = \binom{4}{\ }$	iii. $\binom{5}{0} = \binom{5}{\ }$
iv. $\binom{5}{4} = \binom{5}{\ }$	v. $\binom{5}{2} = \binom{5}{\ }$	vi. $\binom{6}{2} = \binom{6}{\ }$
vii. $\binom{23}{5} = \binom{23}{\ }$	viii. $\binom{18}{4} = \binom{18}{\ }$	ix. $\binom{15}{9} = \binom{15}{\ }$

14. En cada literal aparece un sumando del desarrollo del binomio $(x+y)$ elevado a cierta potencia, escriba el coeficiente que le corresponde en forma de combinatorio.

Por ejemplo, si aparece $\binom{\ }{\ }x^{12}y^3$ la potencia a la que está elevado $(x+y)$ es 15 (¿por qué?) y el combinatorio es $\binom{15}{12}$ luego el sumando es $\binom{15}{12}x^{12}y^3$.

A. $\binom{\ }{\ }x^{12}y^3$ B. $\binom{\ }{\ }x^4y^{13}$

C. $\binom{\ }{\ }xy^9$ D. $\binom{\ }{\ }x^{22}$

15. En los ejercicios que siguen presente los coeficientes como combinatorios y potencias de constantes. Luego, simplifique al máximo y si tiene una calculadora a mano también encuentre el valor numérico del coeficiente.

A. En el desarrollo de $(x+y)^{12}$ encontrar:

i. El coeficiente del término que contiene a x^5 y la potencia de y en ese término.

ii. El término que contiene a y^9.

iii. El coeficiente del término que contiene a y^6 y la potencia de x en ese término.

iv. El término donde las potencias de x y y coinciden.

B. En el desarrollo de $(x-y)^{14}$ encontrar (cuidado con el signo)

i. El coeficiente del término que contiene a x^5 y la potencia de y en ese término.

ii. El término que contiene a y^9.

iii. El número de sumandos que tienen coeficiente negativo.

iv. El término donde las potencias de x y y coinciden.

C. Considere el binomio $(2x-3y)^{12}$. En este ejercicio existen varias diferencias con los casos anteriores que debe tener en cuenta cuando aplique sus conocimientos sobre el teorema del binomio. Lea detenidamente las tres advertencias siguientes antes de desarrollar el ejercicio.

- Al elevar el término $2x$ a una potencia, tanto el 2 como la x resultan elevados a dicha potencia.
- El segundo término del binomio es $-3y$ luego su signo debe ser tenido en cuenta al elevar el término a cualquier potencia.
- Las potencias de 2 y de -3 en cualquier término del desarrollo del binomio son constantes, por lo tanto forman parte del coeficiente que acompaña a la variables.

En el desarrollo de $(2x-3y)^{12}$ encontrar:

i. El coeficiente del término que contiene a x^5 y la potencia de y en ese término.

ii. El término que contiene a y^9.

iii. El número de sumandos que tienen coeficiente negativo.

iv. El término donde las potencias de x y y coinciden.

D. En el desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{2}{y}\right)^8$ encontrar: (ojo a los signos y las potencias negativas)

i. El coeficiente del término que contiene a x^{10} y la potencia de y en ese término.

ii. El término que contiene a y^{-5}.

iii. El número de sumandos que tienen coeficiente negativo.

iv. Los términos donde alguna de las potencias de x o y sean impares.