MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autor: Lorenzo Acosta Gempeler
Edición: Jeanneth Galeano Peñaloza
Rafael Ballestas Rojano

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Relaciones

Relaciones

Una relación (real) es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Una relación (real) es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Si S es una relación entonces el dominio de S es el conjunto de las primeras componentes de las parejas en S,

$$\mathrm{Dom}(S) = \{x : (\exists y)((x, y) \in S)\}.$$

Relaciones

Una relación (real) es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Si S es una relación entonces el dominio de S es el conjunto de las primeras componentes de las parejas en S,

$$\text{Dom}(S) = \{x : (\exists y)((x, y) \in S)\}.$$

La imagen de S es el conjunto de las segundas componentes de las parejas en S,

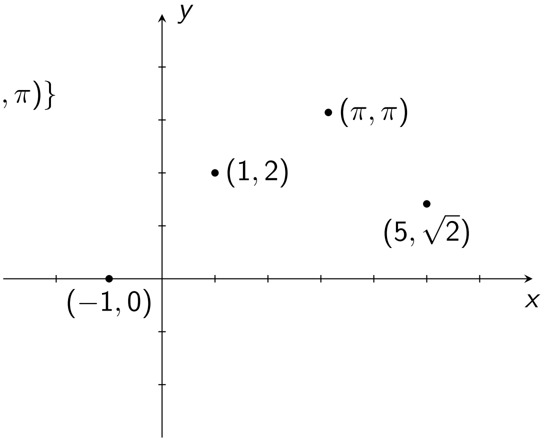
$$\text{Im}(S) = \{y : (\exists x)((x, y) \in S)\}.$$

Ejemplo 1

$$A = \{(1,2), (5, \sqrt{2}), (-1, 0), (\pi, \pi)\}$$

Ejemplo 1

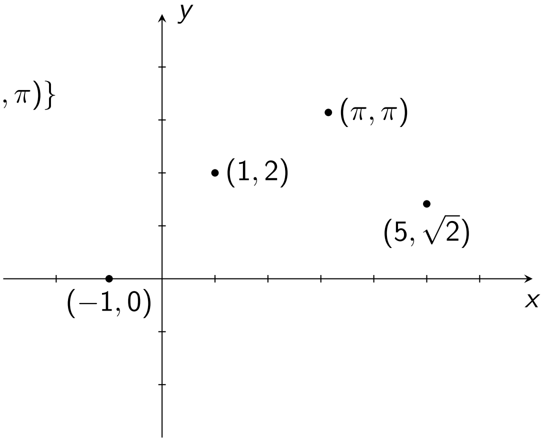
$$A = \{(1,2), (5,\sqrt{2}), (-1,0), (\pi,\pi)\}$$



Ejemplo 1

$$A = \{(1,2),(5,\sqrt{2}),(-1,0),(\pi,\pi)\}$$

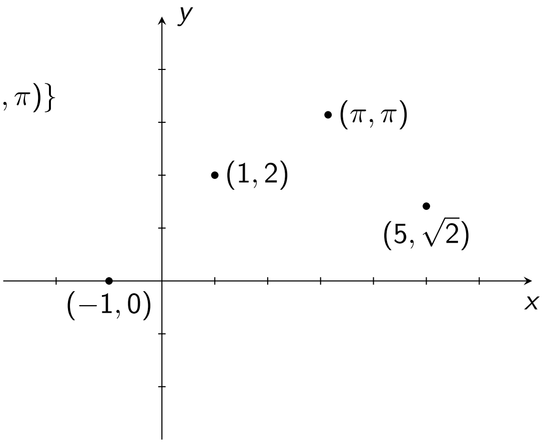
$$\mathrm{Dom}(A) = \{1,5,-1,\pi\}$$



$$A = \{(1,2), (5,\sqrt{2}), (-1,0), (\pi,\pi)\}$$

$$\mathrm{Dom}(A) = \{1, 5, -1, \pi\}$$

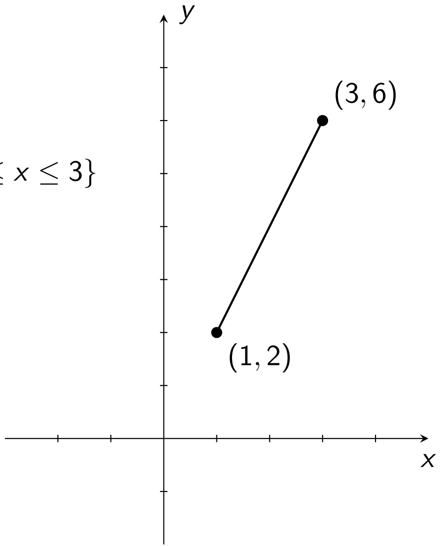
$$\mathrm{Im}(A) = \{2, \sqrt{2}, 0, \pi\}$$



Ejemplo 2

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \wedge 1 \leq x \leq 3\}$$

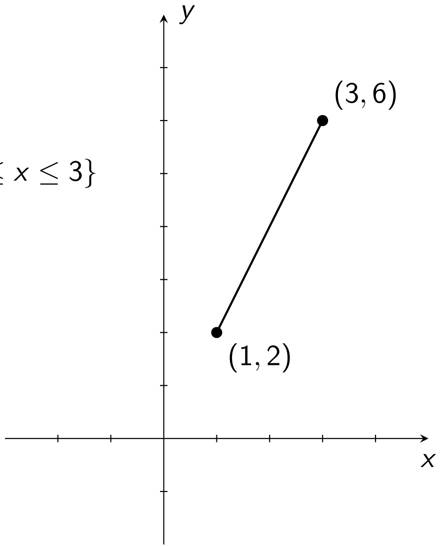
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \wedge 1 \leq x \leq 3\}$$



Ejemplo 2

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \wedge 1 \leq x \leq 3\}$$

$$\mathrm{Dom}(B) = [1, 3]$$

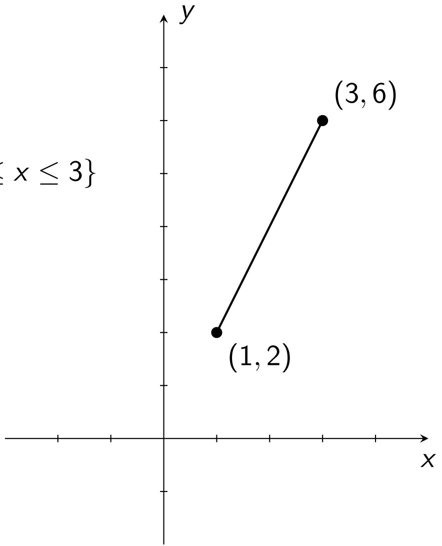


Ejemplo 2

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \wedge 1 \leq x \leq 3\}$$

$$\mathrm{Dom}(B) = [1, 3]$$

$$\mathrm{Im}(B) = [2, 6]$$

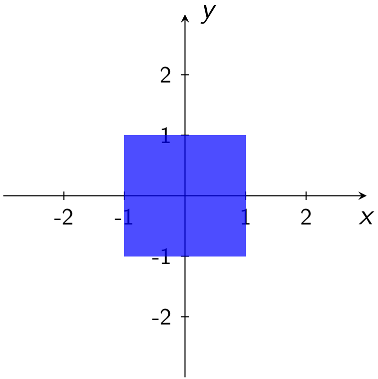


Ejemplo 3

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

Ejemplo 3

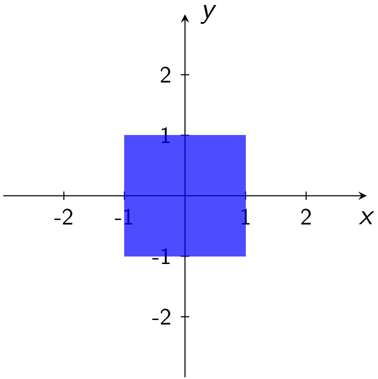
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 3

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$\text{Dom}(C) = [-1, 1]$

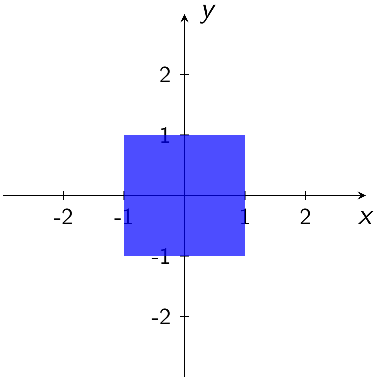


Ejemplo 3

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$\mathrm{Dom}(C) = [-1, 1]$

$\mathrm{Im}(C) = [-1, 1]$



Relaciones

Cuando se define una relación S por comprensión se obtiene

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y)\},$$

donde $p(x, y)$ es un predicado en las variables x e y.
La relación S queda completamente determinada por el predicado $p(x, y)$.

Cuando se define una relación S por comprensión se obtiene

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y)\},$$

donde $p(x, y)$ es un predicado en las variables x e y.
La relación S queda completamente determinada por el predicado $p(x, y)$.

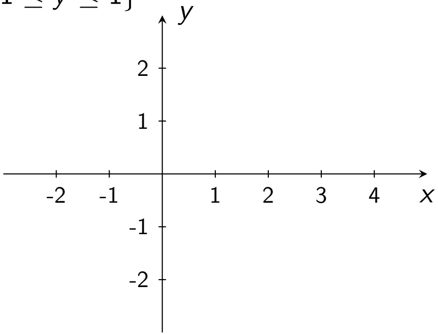
Ejemplo: Si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\}$
entonces $p(x, y)$ es la conjunción

$$-1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1.$$

Ejemplo 4

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x - 3 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x-3, y)\}$$

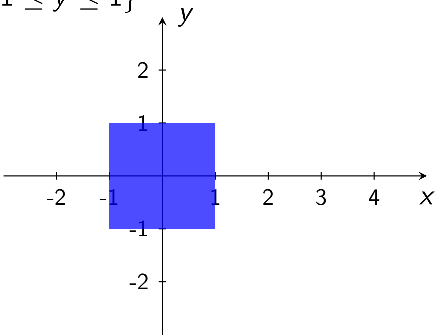


Ejemplo 4

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{-}3 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x - 3, y)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



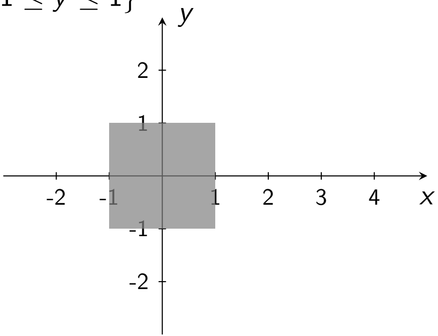
Ejemplo 4

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{-}3 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x - 3, y)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x{-}3 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 4

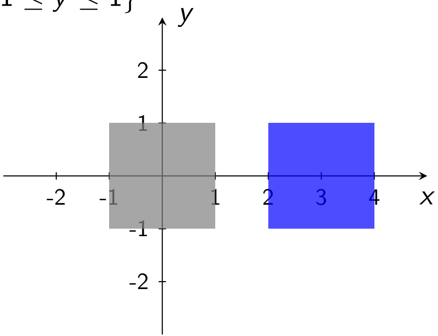
$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{-}3 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x-3, y)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x{-}3 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

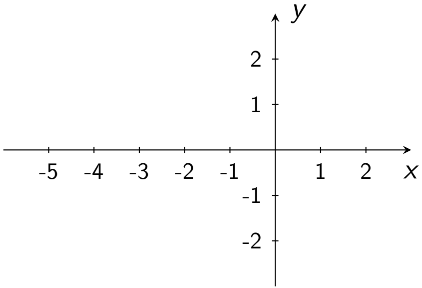
$$\{(x, y) : 2 \leq x \leq 4; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 5

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{+}4 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x+4,y)\}$$

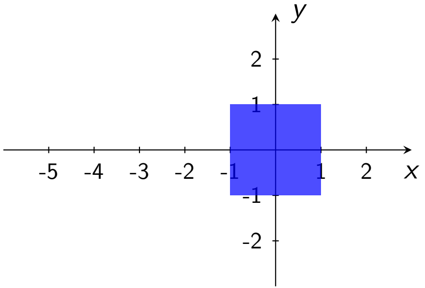


Ejemplo 5

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{+}4 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x+4, y)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



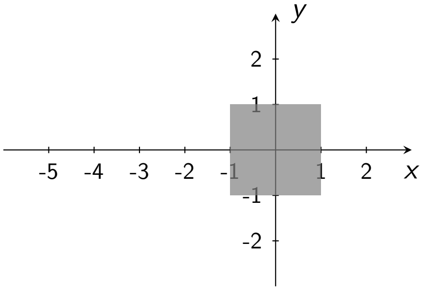
Ejemplo 5

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{+}4 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x+4, y)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x{+}4 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 5

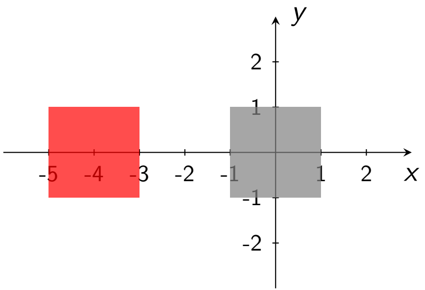
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{+}4 \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x + 4, y)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x{+}4 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

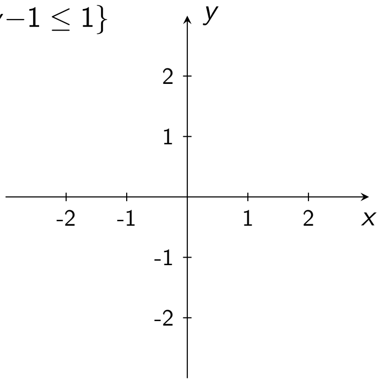
$$\{(x, y) : -5 \leq x \leq -3; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 6

$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y-1 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y-1)\}$$

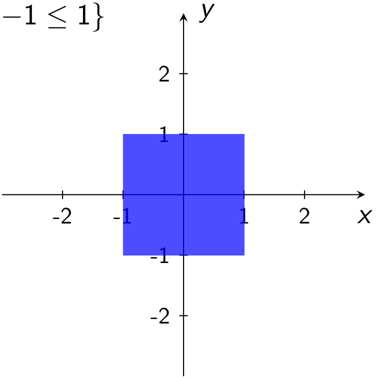


Ejemplo 6

$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y-1 \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y-1)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



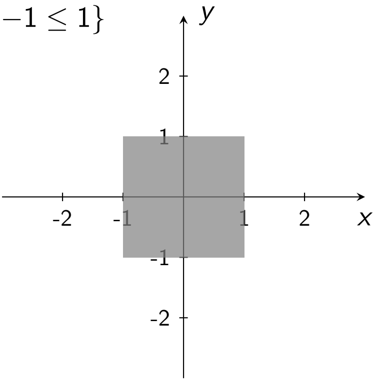
Ejemplo 6

$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y - 1 \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y - 1)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y - 1 \leq 1\}$$



Ejemplo 6

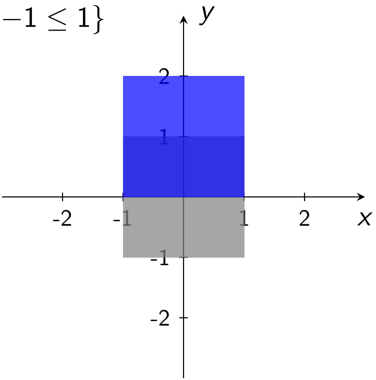
$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y-1 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y-1)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y-1 \leq 1\}$$

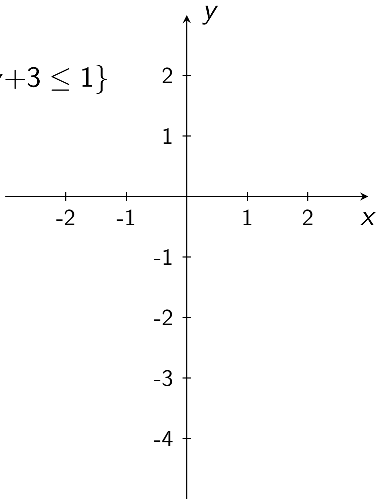
$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$$



Ejemplo 7

$$C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y+3 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y+3)\}$$

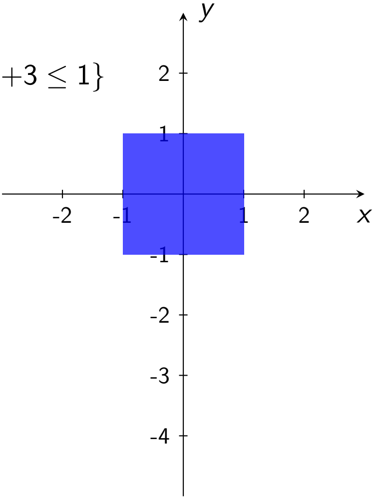


Ejemplo 7

$$C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y+3 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y+3)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



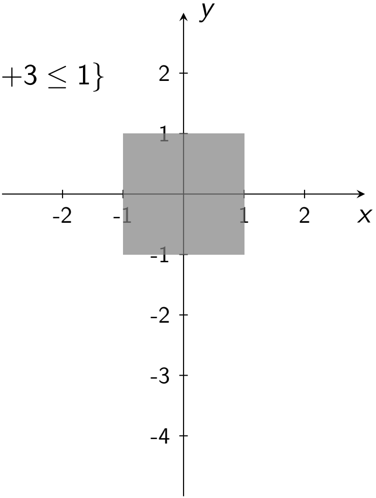
Ejemplo 7

$$C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y+3 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y+3)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y+3 \leq 1\}$$



Ejemplo 7

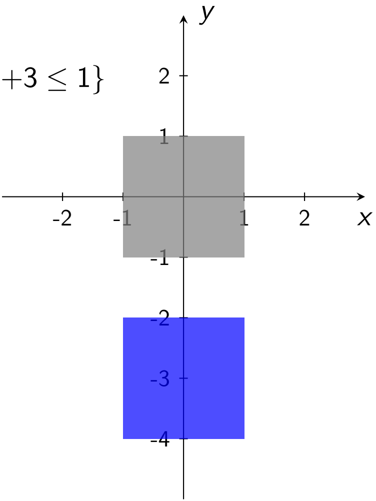
$$C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y+3 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y+3)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y+3 \leq 1\}$$

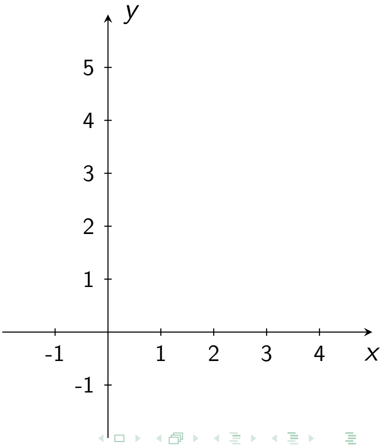
$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -4 \leq y \leq -2\}$$



Ejemplo 8

$$C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{-}3 \leq 1 \wedge {-1} \leq y{-}4 \leq 1\}$$

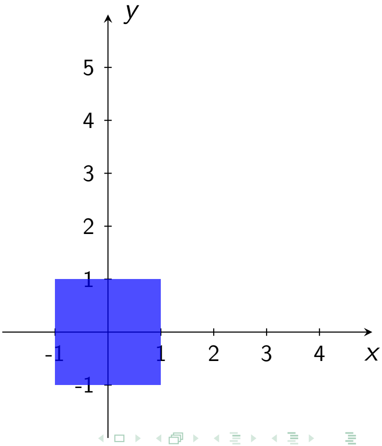
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x - 3, y - 4)\}$$



$$C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x-3 \leq 1 \wedge -1 \leq y-4 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x-3, y-4)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



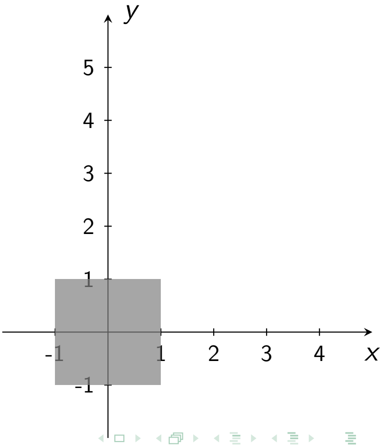
Ejemplo 8

$$C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x - 3 \leq 1 \wedge -1 \leq y - 4 \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x - 3, y - 4)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x - 3 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 8

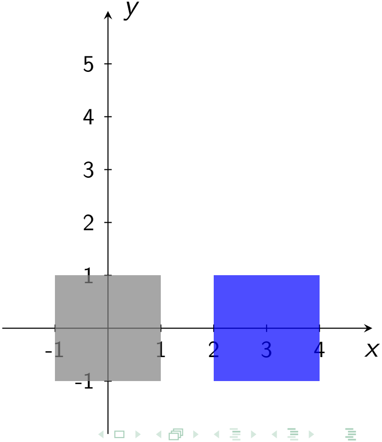
$$C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{-}3 \leq 1 \wedge {-1} \leq y{-}4 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x-3, y-4)\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x{-}3 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : 2 \leq x \leq 4; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 8

$$C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x - 3 \leq 1 \wedge -1 \leq y - 4 \leq 1\}$$

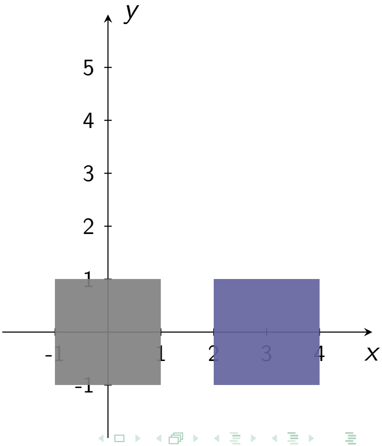
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x - 3, y - 4)\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x - 3 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : 2 \leq x \leq 4; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : 2 \leq x \leq 4; -1 \leq y - 4 \leq 1\}$$



$$C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x{-}3 \leq 1 \wedge -1 \leq y{-}4 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x-3, y-4)\}$$

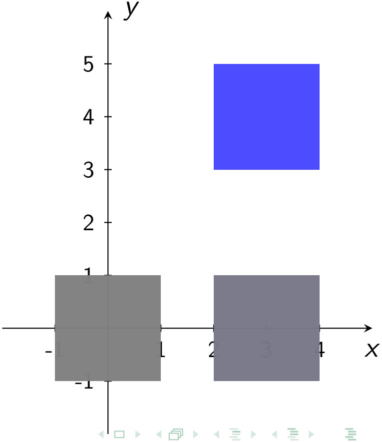
$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x{-}3 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : 2 \leq x \leq 4; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : 2 \leq x \leq 4; -1 \leq y-4 \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : 2 \leq x \leq 4; 3 \leq y \leq 5\}$$



1. Si S es la relación definida por el predicado $p(x, y)$ y

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x - a, y)\}$$

entonces la gráfica de T se obtiene de la de S mediante una traslación horizontal de $|a|$ unidades (hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$).

2. Si S es la relación definida por el predicado $p(x, y)$ y

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y - b)\}$$

entonces la gráfica de U se obtiene de la de S mediante una traslación vertical de $|b|$ unidades (hacia arriba si $b > 0$ y hacia abajo si $b < 0$).

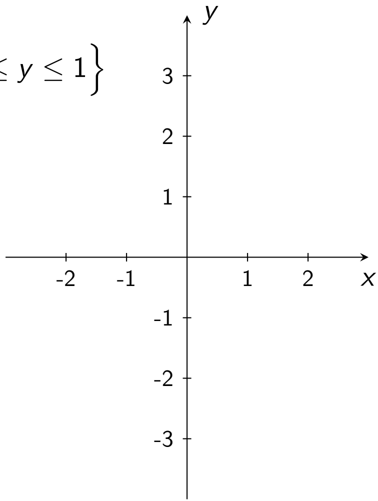
Realicemos otras variaciones a $p(x, y)$ en el ejemplo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\}.$$

Ejemplo 9

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, y\right)\right\}$$

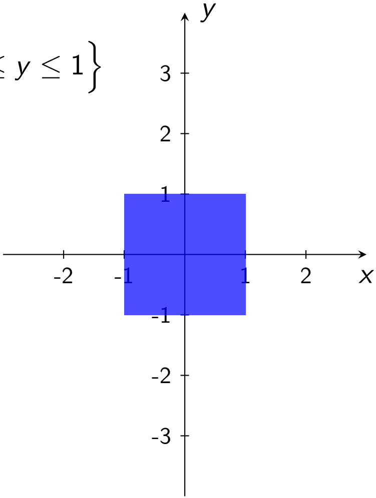


Ejemplo 9

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



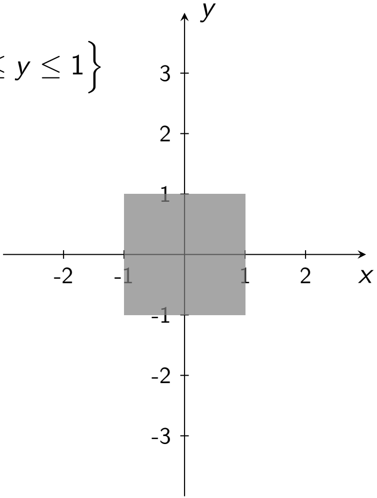
Ejemplo 9

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\}$$



Ejemplo 9

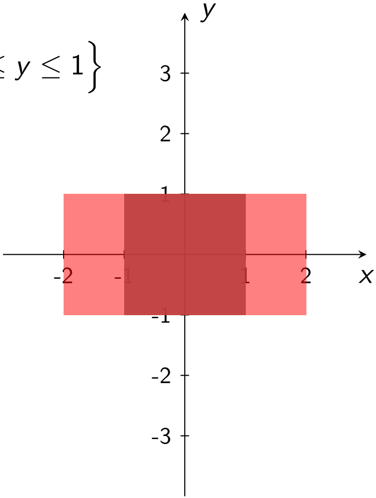
$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\}$$

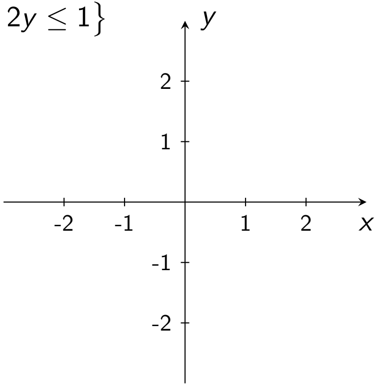
$$\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 10

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq 2y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(x, 2y)\}$$

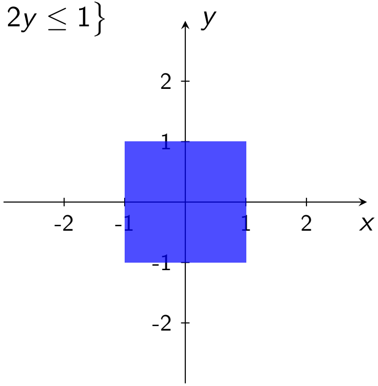


Ejemplo 10

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq 2y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(x, 2y)\right\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

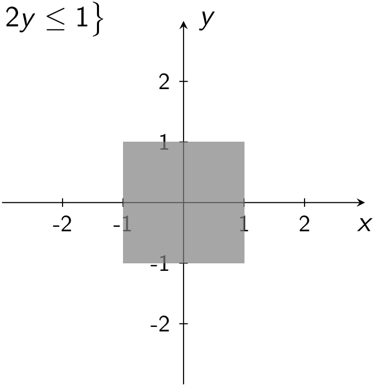


$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq 2y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(x, 2y)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq 2y \leq 1\}$$



Ejemplo 10

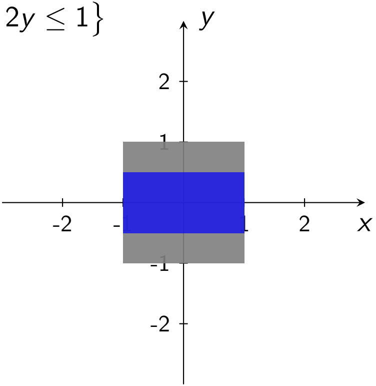
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq 2y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(x, 2y)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq 2y \leq 1\}$$

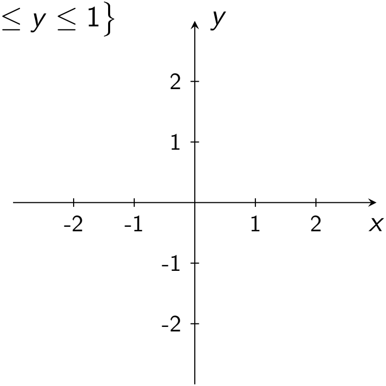
$$\left\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$$



Ejemplo 11

$$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 3x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

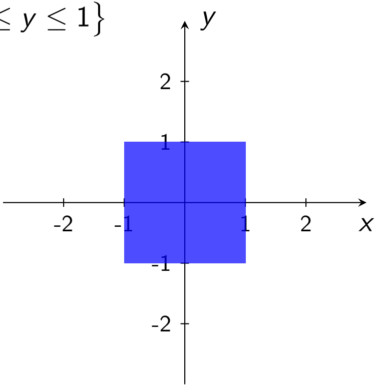
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(3x,y)\right\}$$



$$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 3x \leq 1 \;\wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(3x,y)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



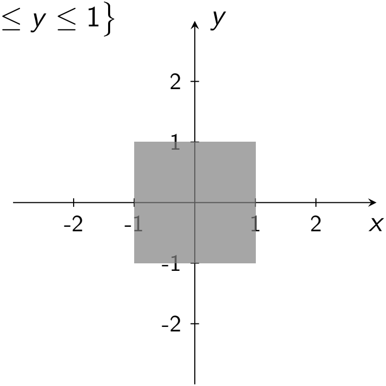
Ejemplo 11

$$D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 3x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(3x, y)\right\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) : -1 \leq 3x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 11

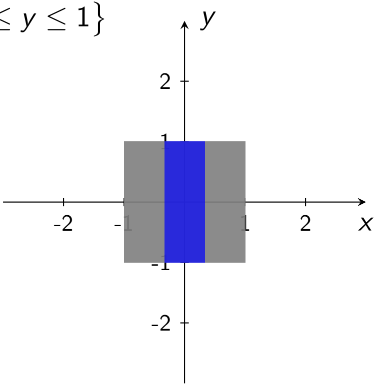
$$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 3x \leq 1 \ \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\,(3x,y)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq 3x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

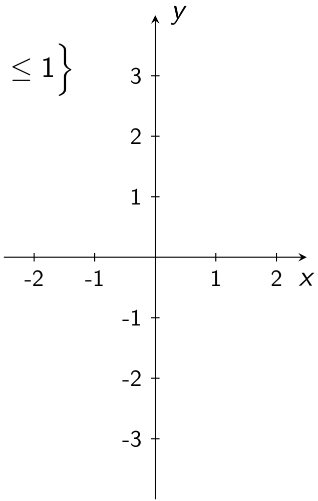
$$\left\{(x,y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}; -1 \leq y \leq 1\right\}$$



Ejemplo 12

$$D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(x, \frac{y}{3}\right)\right\}$$

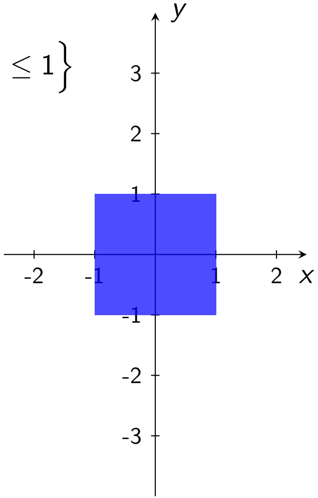


Ejemplo 12

$$D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(x, \frac{y}{3}\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



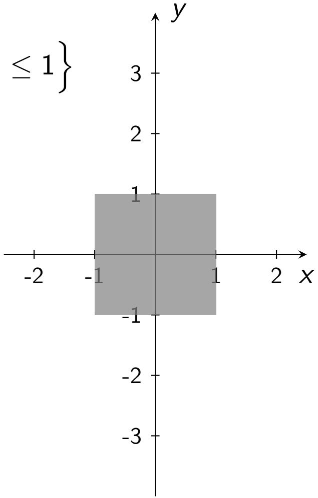
Ejemplo 12

$$D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(x, \frac{y}{3}\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1\right\}$$



Ejemplo 12

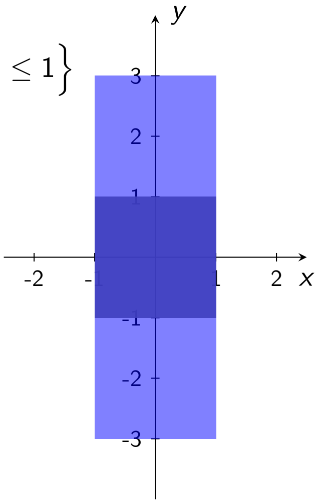
$$D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(x, \frac{y}{3}\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1\right\}$$

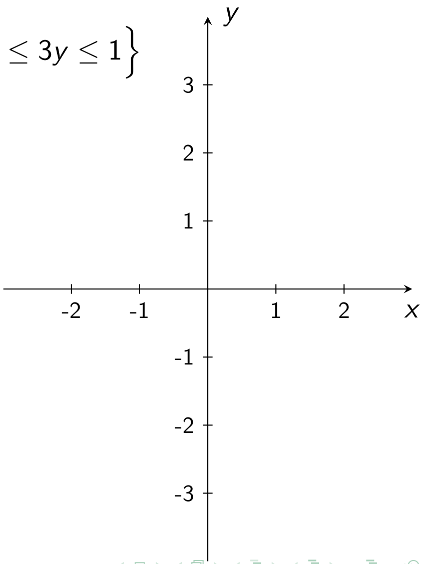
$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -3 \leq y \leq 3\}$$



Ejemplo 13

$$D_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq 3y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, 3y\right)\right\}$$

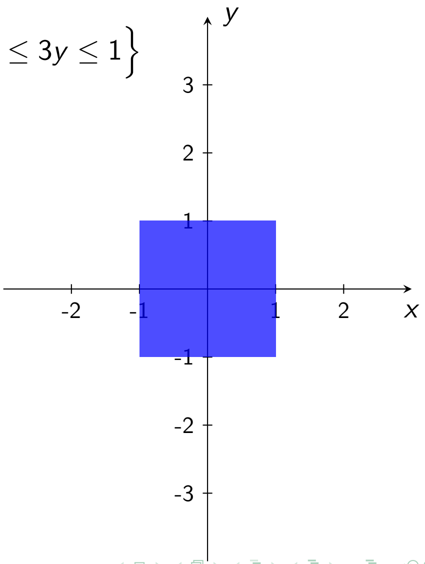


Ejemplo 13

$$D_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq 3y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, 3y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$



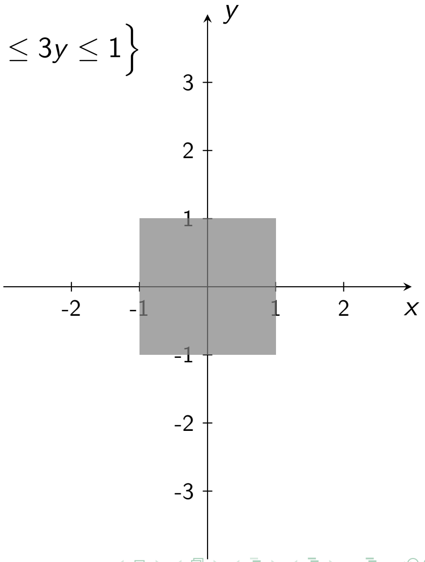
Ejemplo 13

$$D_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq 3y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, 3y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\}$$



Ejemplo 13

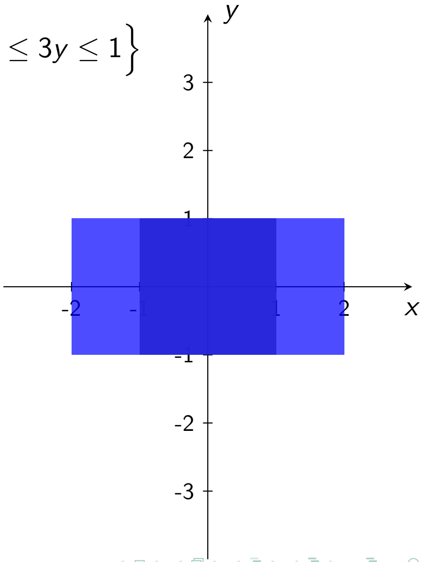
$$D_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq 3y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, 3y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1\}$$



Ejemplo 13

$$D_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ \wedge -1 \leq 3y \leq 1\right\}$$

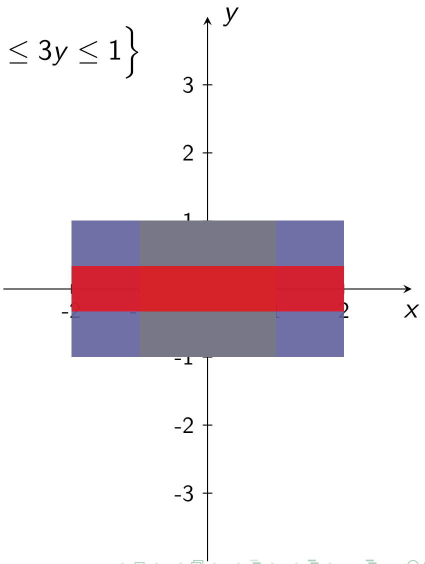
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{2}, 3y\right)\right\}$$

$$\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\}$$

$$\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2; -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}\right\}$$



1. Si S es la relación definida por el predicado $p(x, y)$,
a es un número mayor que 1 y

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{a}, y\right) \right\}$$

entonces la gráfica de T se obtiene de la de S
mediante una expansión horizontal por un factor de a unidades.

2. Si S es la relación definida por el predicado $p(x, y)$,
a es un número entre 0 y 1 y

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(\frac{x}{a}, y\right)\right\}$$

entonces la gráfica de T se obtiene de la de S
mediante una compresión horizontal por un factor de a unidades.

Propiedades

3. Si S es la relación definida por el predicado $p(x, y)$,
b es un número mayor que 1 y

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(x, \frac{y}{b}\right)\right\}$$

entonces la gráfica de U se obtiene de la de S
mediante una expansión vertical por un factor de b unidades.

Propiedades

4. Si S es la relación definida por el predicado $p(x, y)$,
b es un número entre 0 y 1 y

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p\left(x, \frac{y}{b}\right)\right\}$$

entonces la gráfica de U se obtiene de la de S
mediante una compresión vertical por un factor de b unidades.

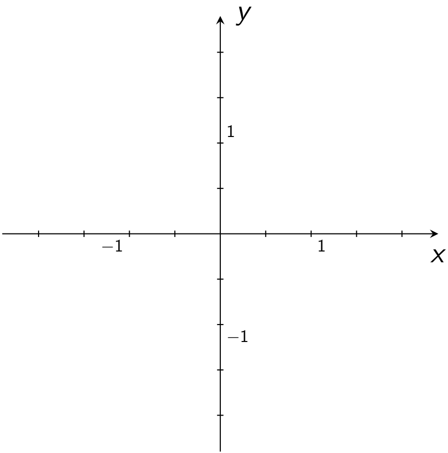
Estudiemos ahora el efecto de estos cambios sobre una relación particular:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Ejemplo 14

$$S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión vertical a la mitad

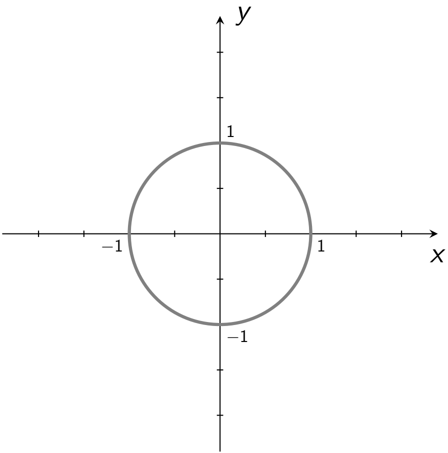


Ejemplo 14

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión vertical a la mitad

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

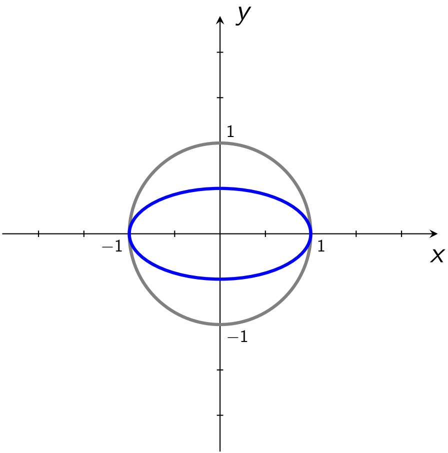


Ejemplo 14

$$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión vertical a la mitad

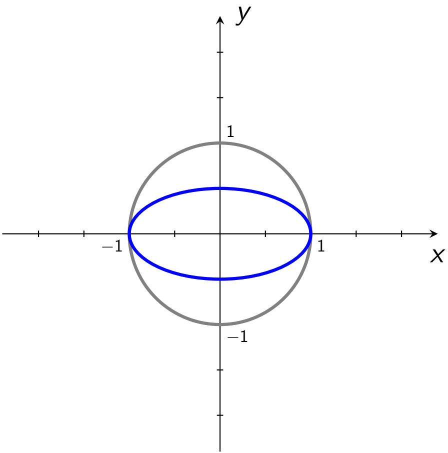
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$



$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión vertical a la mitad

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\}$$

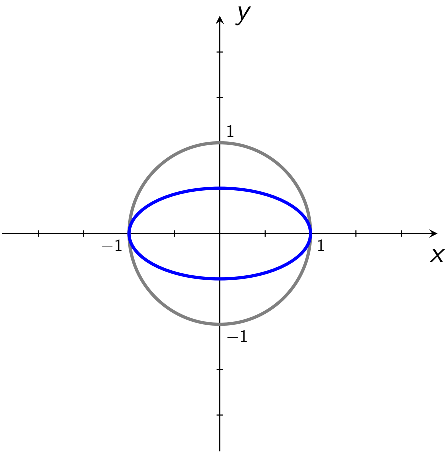


Ejemplo 14

$$S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión vertical a la mitad

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1\right\}$$

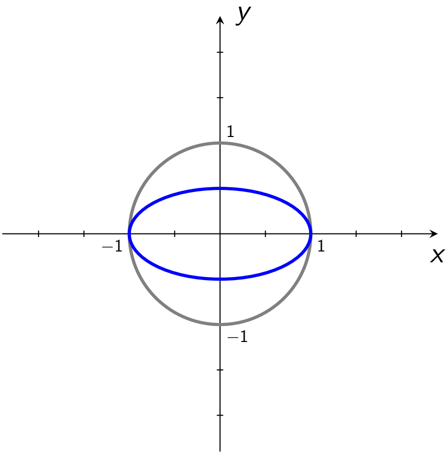


$$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión vertical a la mitad

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (2y)^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1\right\}$$

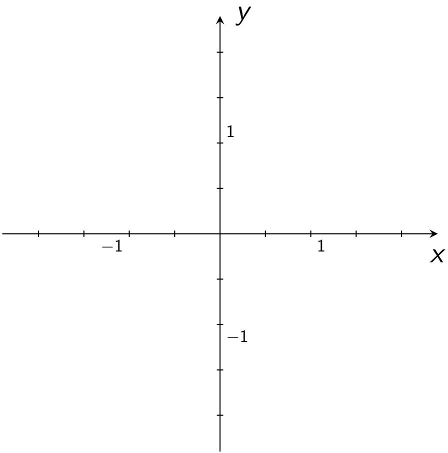
La gráfica de S_1 es una elipse.



Ejemplo 15

$$S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad

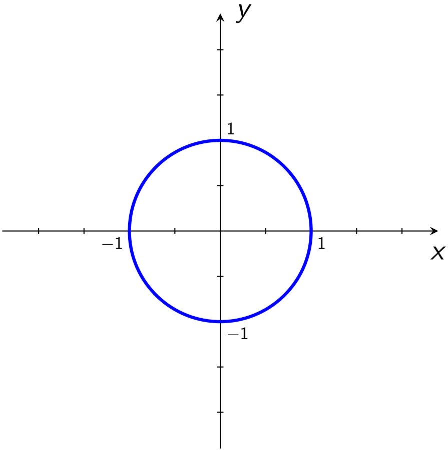


Ejemplo 15

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

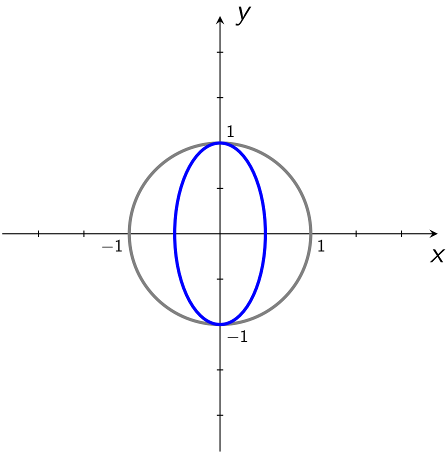


Ejemplo 15

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\}$$

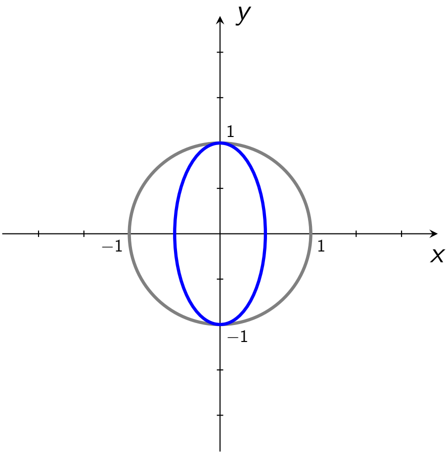


Ejemplo 15

$$S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\right\}$$

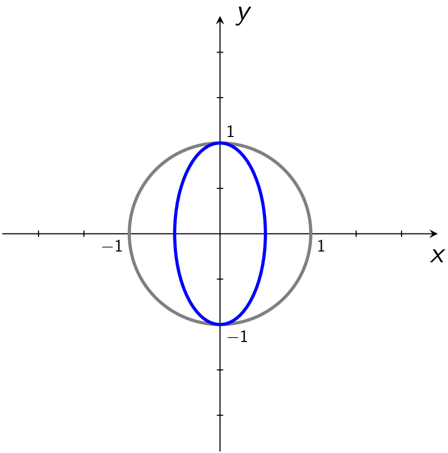


Ejemplo 15

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1\right\}$$



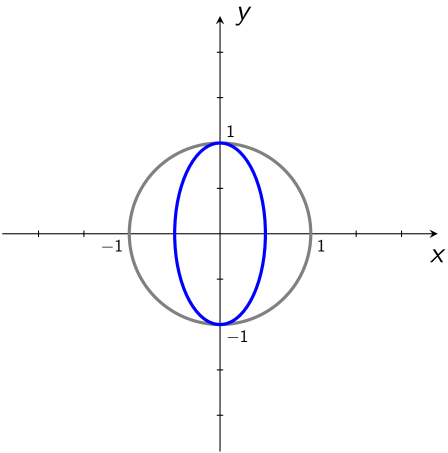
Ejemplo 15

$$S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad

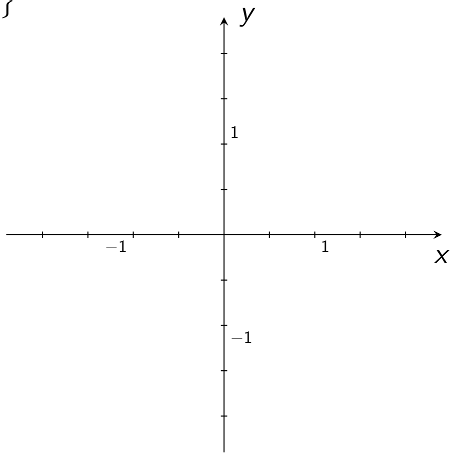
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1\right\}$$

La gráfica de S_2 es una elipse.



$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\}$$

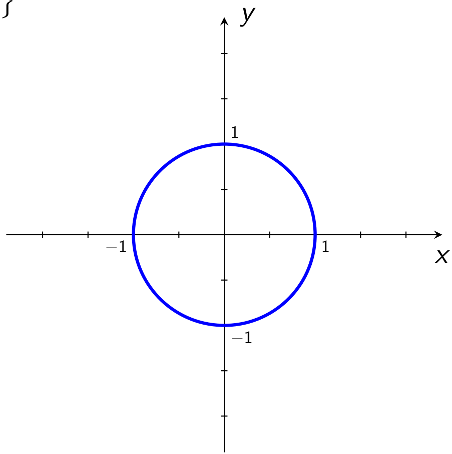
se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad y una compresión vertical a la tercera parte



$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

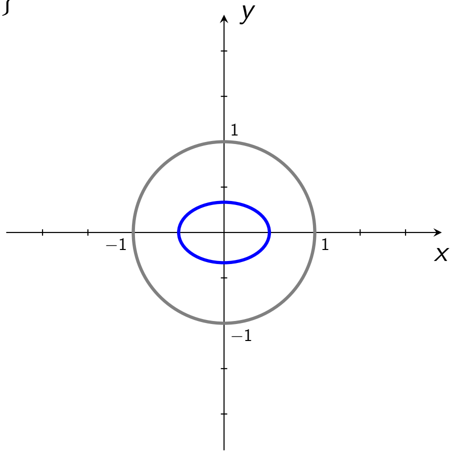


Ejemplo 16

$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\}$$

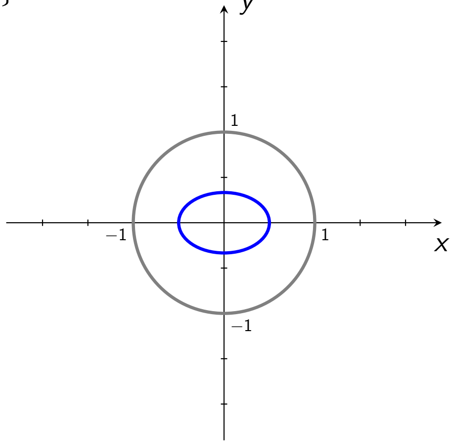


Ejemplo 16

$$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$$

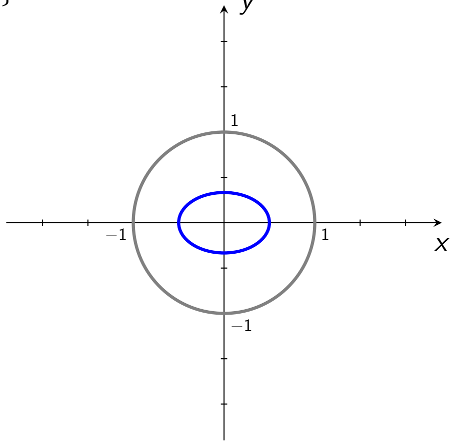


Ejemplo 16

$$S_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad y una compresión vertical a la tercera parte

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1\right\}$$

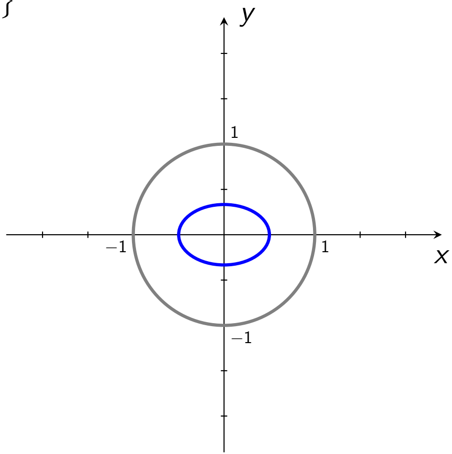


Ejemplo 16

$$S_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una compresión horizontal a la mitad y una compresión vertical a la tercera parte

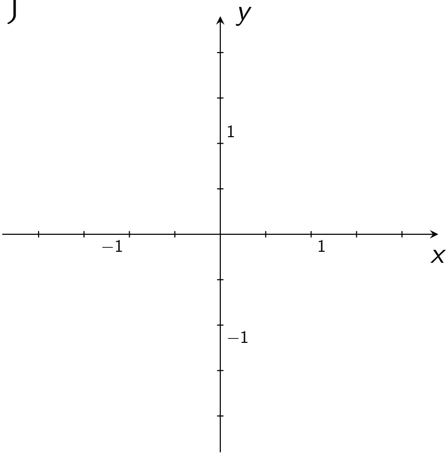
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1\right\}$$



La gráfica de S_3 es una elipse.

$$S_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1 \right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una compresión vertical a la tercera parte

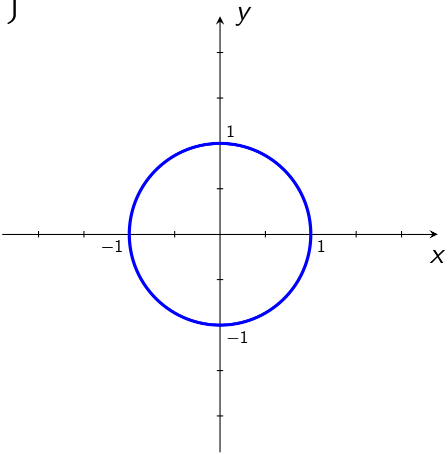


Ejemplo 17

$$S_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una compresión vertical a la tercera parte

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

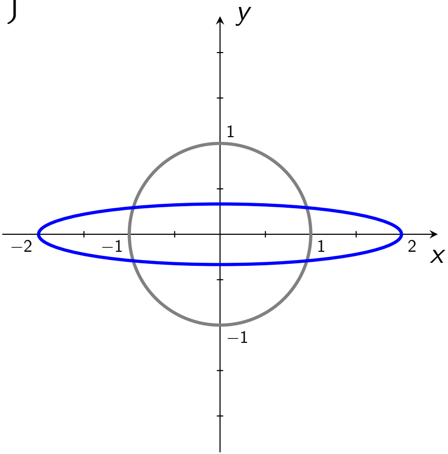


Ejemplo 17

$$S_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$



Ejemplo 17

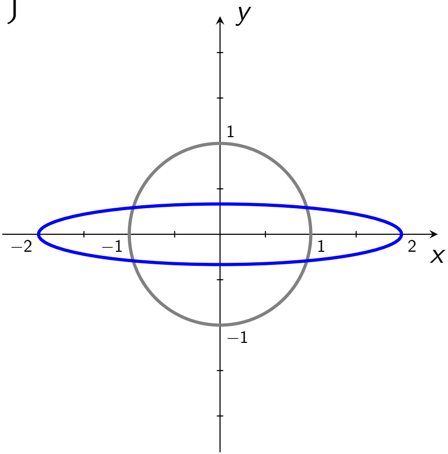
$$S_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1\right\}$$



Ejemplo 17

$$S_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

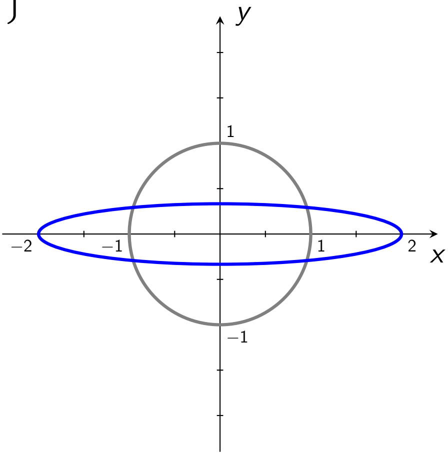
se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1\right\}$$



Ejemplo 17

$$S_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1 \right\}$$

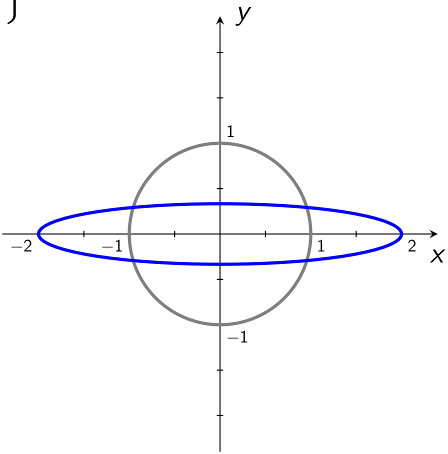
se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una compresión vertical a la tercera parte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3y)^2 = 1 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1 \right\}$$

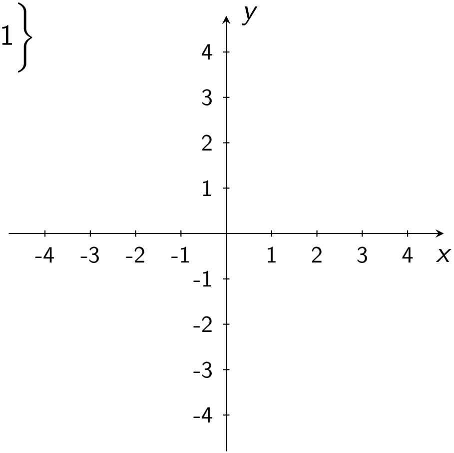


La gráfica de S_4 es una elipse.

Ejemplo 18

$$S_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una expansión vertical al triple

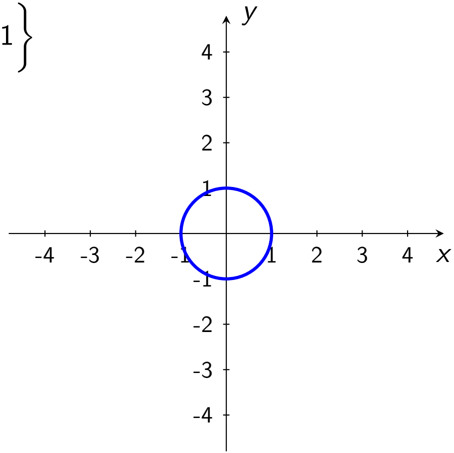


Ejemplo 18

$$S_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una expansión vertical al triple

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$



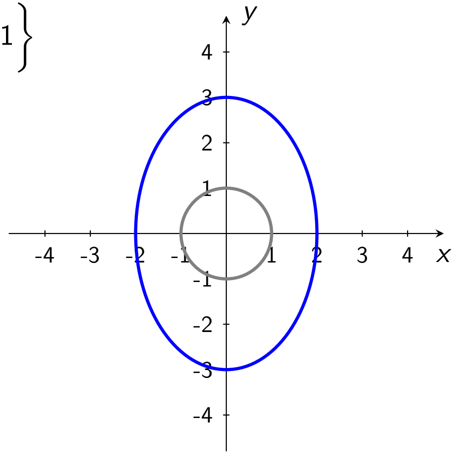
Ejemplo 18

$$S_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una expansión vertical al triple

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \right\}$$



Ejemplo 18

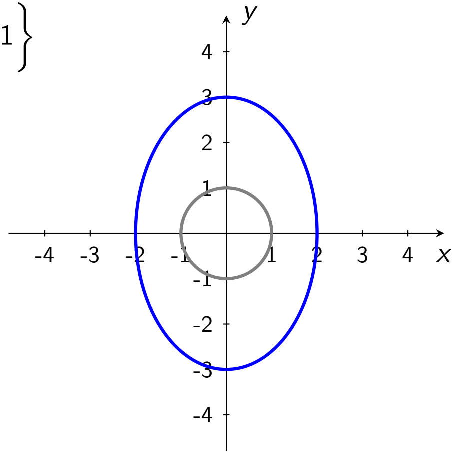
$$S_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una expansión vertical al triple

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$



Ejemplo 18

$$S_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

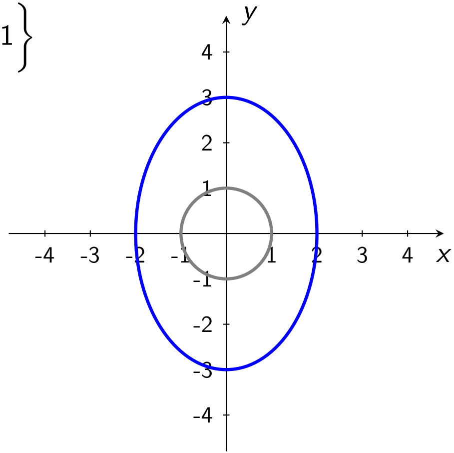
se obtiene de S mediante una expansión horizontal al doble y una expansión vertical al triple

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

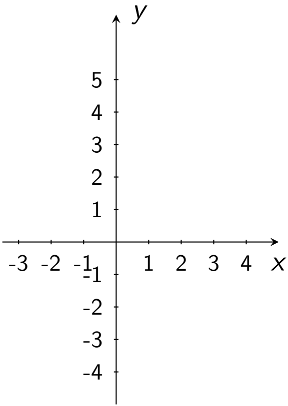
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

La gráfica de S_5 es una elipse.



$$S_6 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \right\}$$

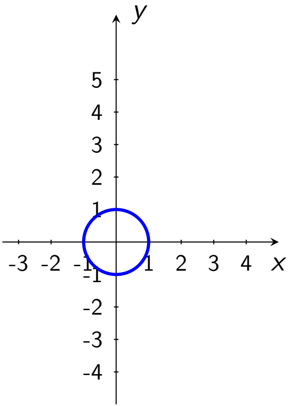
se obtiene de S_5 mediante una traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha y una traslación vertical de tres unidades hacia arriba



$S_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$

se obtiene de S_5 mediante una traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha y una traslación vertical de tres unidades hacia arriba

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

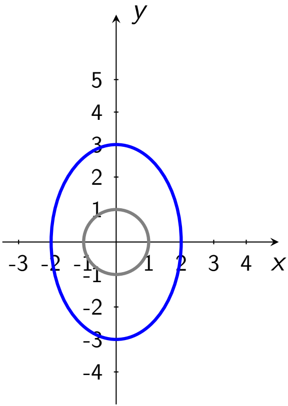


$$S_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$$

se obtiene de S_5 mediante una traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha y una traslación vertical de tres unidades hacia arriba

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$



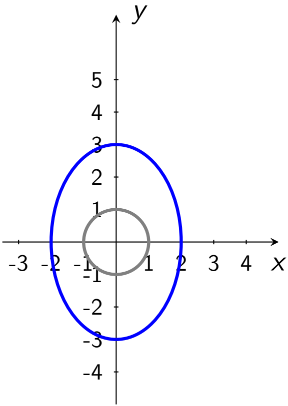
$S_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$

se obtiene de S_5 mediante una traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha y una traslación vertical de tres unidades hacia arriba

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$



$S_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$

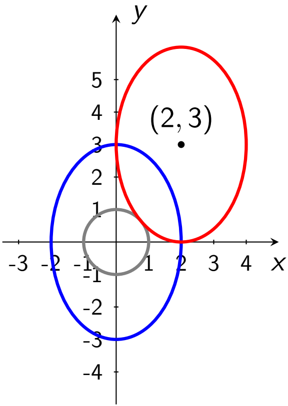
se obtiene de S_5 mediante una traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha y una traslación vertical de tres unidades hacia arriba

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

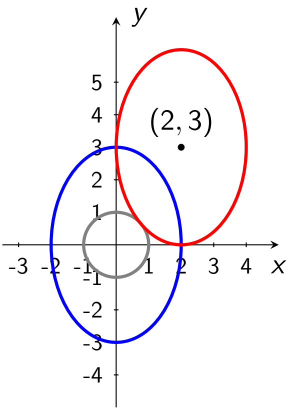
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$$



$S_6 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$

se obtiene de S_5 mediante una traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha y una traslación vertical de tres unidades hacia arriba

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$$



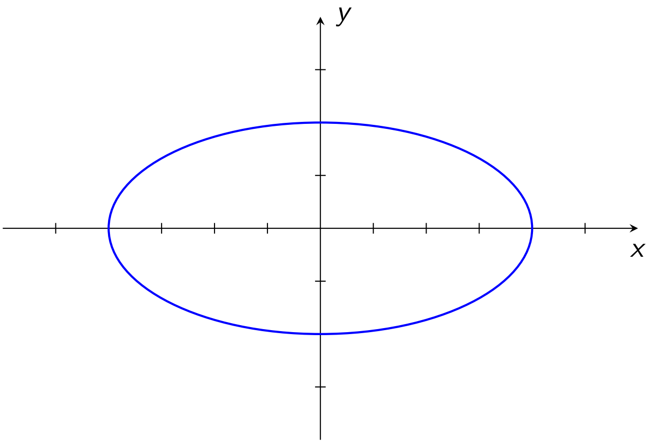
La gráfica de S_6 es una elipse con centro en $(2,3)$.

Si se da la ecuación

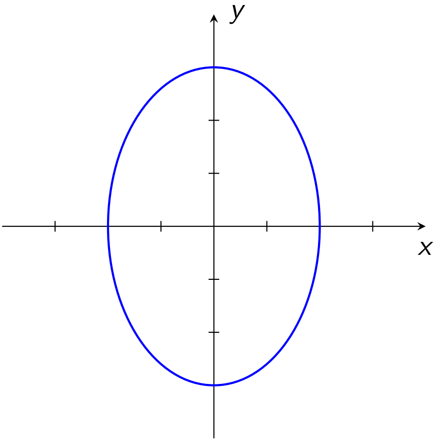
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \qquad a \neq b,$$

ésta representa una elipse con centro en (h, k), eje horizontal de longitud $2a$ y eje vertical de longitud $2b$. Este tipo de ecuación se llama ecuación canónica de la elipse.

Si $a > b$ entonces la elipse tiene eje mayor horizontal y eje menor vertical.



Si $a < b$ entonces la elipse tiene eje mayor vertical y eje menor horizontal.



Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y = -49$$

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y &= -49 \\ 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) &= -49 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y &= -49 \\ 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) &= -49 \\ 4(x^2 - 2x \qquad) + 9(y^2 + 6y \qquad) &= -49 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y &= -49 \\ 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) &= -49 \\ 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 6y \qquad) &= -49 + 4 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y = -49$$

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) = -49$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 6y + 9) = -49 + 4 + 81$$

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y &= -49 \\ 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) &= -49 \\ 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 6y + 9) &= -49 + 4 + 81 \\ 4(x-1)^2 + 9(y+3)^2 &= 36 \end{aligned}$$

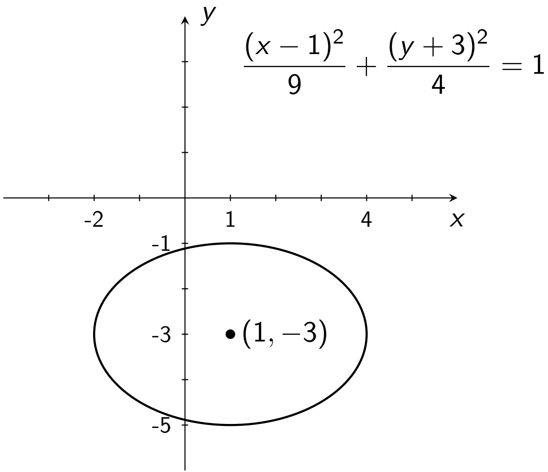
Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned}
4x^2 - 8x + 9y^2 + 54y &= -49 \\
4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 6y) &= -49 \\
4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 6y + 9) &= -49 + 4 + 81 \\
4(x-1)^2 + 9(y+3)^2 &= 36 \\
\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$



y
$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$
-2
1
4
x
-1
-3
-5
$(1, -3)$