MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autora: Margarita Ospina Pulido
Edición: Andrés Sebastián Ríos Gutiérrez

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Abril de 2016

Parte I

Sistemas de ecuaciones lineales

Formas de la ecuación de una recta

Formas de la ecuación de una recta

Ecuación pendiente-punto

(de la recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_0, y_0))

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Formas de la ecuación de una recta

Ecuación pendiente-punto

(de la recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_0, y_0))

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Ecuación pendiente-corte con el eje y

(de la recta con pendiente m y que corta al eje y en b)

$$y = mx + b$$

Casos especiales

Ecuación de la recta horizontal o de pendiente cero

$$y = k \text{ donde } k \text{ es un número real}$$

Casos especiales

Ecuación de la recta horizontal o de pendiente cero

$$y = k \text{ donde } k \text{ es un número real}$$

Ecuación de una recta vertical

$$x = k \text{ donde } k \text{ es un número real}$$

Para las rectas verticales NO se define pendiente.

Fórmula aplicable a todas las rectas.

Ecuación lineal general en dos variables:

Fórmula aplicable a todas las rectas.

Ecuación lineal general en dos variables:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ y A y B **no son simultáneamente** 0.

Fórmula aplicable a todas las rectas.

Ecuación lineal general en dos variables:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ y A y B **no son simultáneamente** 0.

Note que si $A = 0$ se trata de una recta horizontal, si $B = 0$ se trata de una recta vertical y si $A \neq 0$ y $B \neq 0$ se trata de una recta con pendiente $\dfrac{-A}{B} \neq 0$.

Tomemos ahora dos rectas con ecuaciones:

$$Ax + By + C = 0 \text{ y } Ex + Fy + G = 0.$$

Queremos saber si tienen un punto en común.

Tomemos ahora dos rectas con ecuaciones:

$$Ax + By + C = 0 \text{ y } Ex + Fy + G = 0.$$

Queremos saber si tienen un punto en común.

Las coordenadas (x_0, y_0) de ese punto, si existe, deberían verificar las dos igualdades.

Tomemos ahora dos rectas con ecuaciones:

$$Ax + By + C = 0 \text{ y } Ex + Fy + G = 0.$$

Queremos saber si tienen un punto en común.

Las coordenadas (x_0, y_0) de ese punto, si existe, deberían verificar las dos igualdades.

Es decir, (x_0, y_0) es solución de las dos ecuaciones simultáneamente.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnicas

Hay varios métodos para encontrar la solución de estos sistemas:

Sustitución

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnicas

Hay varios métodos para encontrar la solución de estos sistemas:

Sustitución

Igualación

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnicas

Hay varios métodos para encontrar la solución de estos sistemas:

Sustitución

Igualación

Eliminación

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnicas

Hay varios métodos para encontrar la solución de estos sistemas:

Sustitución

Igualación

Eliminación

Determinantes

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnicas

Hay varios métodos para encontrar la solución de estos sistemas:

Sustitución

Igualación

Eliminación

Determinantes

Describiremos y haremos un ejemplo de los tres primeros.

Método de igualación

Método de igualación

Consiste en despejar en las dos ecuaciones una misma variable, luego igualar las dos expresiones y la situación se transforma en una ecuación con una incógnita de fácil solución.

Método de igualación

Consiste en despejar en las dos ecuaciones una misma variable, luego igualar las dos expresiones y la situación se transforma en una ecuación con una incógnita de fácil solución.

Una vez hallado el valor de esa variable, se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable, y tener así las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Método de igualación

Ejemplo

Encuentre el punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 4 = 0$ y $x + 3y - 1 = 0$.

Método de igualación

Ejemplo

Encuentre el punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 4 = 0$ y $x + 3y - 1 = 0$.

Normalmente escribimos el sistema entre un corchete, dejando a la izquierda las variables y a la derecha el término independiente, de la siguiente forma:

Método de igualación

Ejemplo

Encuentre el punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 4 = 0$ y $x + 3y - 1 = 0$.

Normalmente escribimos el sistema entre un corchete, dejando a la izquierda las variables y a la derecha el término independiente, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Método de igualación

Como los coeficientes de x son 3 y 1, en tanto que los de y son 3 y -2, parece más fácil despejar x en las dos ecuaciones. Hagámoslo.

Método de igualación

Como los coeficientes de x son 3 y 1, en tanto que los de y son 3 y -2, parece más fácil despejar x en las dos ecuaciones. Hagámoslo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{4}{3} \\ x = -3y + 1 \end{cases}$$

Método de igualación

Como los coeficientes de x son 3 y 1, en tanto que los de y son 3 y -2, parece más fácil despejar x en las dos ecuaciones. Hagámoslo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{4}{3} \\ x = -3y + 1 \end{cases}$$

Ahora igualamos los valores de x y solucionamos la ecuación:

Método de igualación

$$\frac{2}{3}y - \frac{4}{3} = -3y + 1$$

Método de igualación

$$\frac{2}{3}y - \frac{4}{3} = -3y + 1$$

$$\frac{2}{3}y + 3y = 1 + \frac{4}{3}$$

Método de igualación

$$\frac{2}{3}y - \frac{4}{3} = -3y + 1$$

$$\frac{2}{3}y + 3y = 1 + \frac{4}{3}$$

$$\frac{11}{3}y = \frac{7}{3}$$

Método de igualación

$$\frac{2}{3}y - \frac{4}{3} = -3y + 1$$

$$\frac{2}{3}y + 3y = 1 + \frac{4}{3}$$

$$\frac{11}{3}y = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{7}{11}$$

Método de igualación

Reemplazamos el valor de y en la segunda ecuación (en la primera también da el mismo resultado).

Método de igualación

Reemplazamos el valor de y en la segunda ecuación (en la primera también da el mismo resultado).

$$x + 3\left(\frac{7}{11}\right) - 1 = 0$$

Método de igualación

Reemplazamos el valor de y en la segunda ecuación (en la primera también da el mismo resultado).

$$x + 3\left(\frac{7}{11}\right) - 1 = 0$$

$$x = 1 - \frac{21}{11}$$

Método de igualación

Reemplazamos el valor de y en la segunda ecuación (en la primera también da el mismo resultado).

$$x + 3\left(\frac{7}{11}\right) - 1 = 0$$

$$x = 1 - \frac{21}{11}$$

$$x = -\frac{10}{11}$$

Método de igualación

Reemplazamos el valor de y en la segunda ecuación (en la primera también da el mismo resultado).

$$x + 3\left(\frac{7}{11}\right) - 1 = 0$$

$$x = 1 - \frac{21}{11}$$

$$x = -\frac{10}{11}$$

Concluimos que el punto de corte de las dos rectas es $\left(-\frac{10}{11}, \frac{7}{11}\right)$

Método de igualación

Hemos terminado, pero los incrédulos podemos hacer dos pasos más, uno visual y uno analítico, que nos corroboren que el resultado es correcto.

Método de igualación

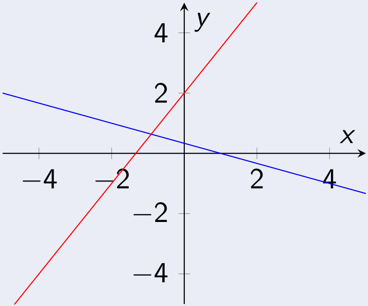
Hemos terminado, pero los incrédulos podemos hacer dos pasos más, uno visual y uno analítico, que nos corroboren que el resultado es correcto.

Comprobación gráfica: Trazamos las dos rectas en un mismo plano cartesiano y el punto queda determinado.

Método de igualación

Hemos terminado, pero los incrédulos podemos hacer dos pasos más, uno visual y uno analítico, que nos corroboren que el resultado es correcto.

Comprobación gráfica: Trazamos las dos rectas en un mismo plano cartesiano y el punto queda determinado.



Método de igualación

No es fácil corroborar que es el punto. Veamos otra comprobación que no depende de la escala ni de la agudeza visual.

Método de igualación

Comprobación analítica: Aquí lo único que necesitamos es reemplazar los valores de x y y en las dos ecuaciones y comprobar que las igualdades se cumplen.

Método de igualación

Comprobación analítica: Aquí lo único que necesitamos es reemplazar los valores de x y y en las dos ecuaciones y comprobar que las igualdades se cumplen.

Para $3x - 2y + 4 = 0$ tenemos:

$$3\left(-\frac{10}{11}\right) - 2\left(\frac{7}{11}\right) + 4 = -\frac{30}{11} - \frac{14}{11} + 4 = -\frac{44}{11} + \frac{44}{11} = 0$$

Método de igualación

Comprobación analítica: Aquí lo único que necesitamos es reemplazar los valores de x y y en las dos ecuaciones y comprobar que las igualdades se cumplen.

Para $3x - 2y + 4 = 0$ tenemos:

$$3\left(-\frac{10}{11}\right) - 2\left(\frac{7}{11}\right) + 4 = -\frac{30}{11} - \frac{14}{11} + 4 = -\frac{44}{11} + \frac{44}{11} = 0$$

Para $x + 3y - 1 = 0$ tenemos:

$$-\left(\frac{10}{11}\right) + 3\left(\frac{7}{11}\right) - 1 = -\frac{10}{11} + \frac{21}{11} - \frac{11}{11} = 0$$

Método de sustitución

Método de sustitución

Consiste en despejar de una de las ecuaciones una variable y sustituirla en la otra ecuación.

Método de sustitución

Consiste en despejar de una de las ecuaciones una variable y sustituirla en la otra ecuación.

Así, una de las dos ecuaciones quedará como una ecuación lineal en una variable de fácil solución.

Método de sustitución

Consiste en despejar de una de las ecuaciones una variable y sustituirla en la otra ecuación.

Así, una de las dos ecuaciones quedará como una ecuación lineal en una variable de fácil solución.

En seguida, como en el caso anterior, reemplazamos su valor numérico en una de las ecuaciones originales y obtenemos el valor de la otra variable.

Método de sustitución

Ejemplo.

Encuentre el punto de intersección de las rectas $2x - y + 3 = 0$ y $4x + 2y - 1 = 0$.

Método de sustitución

Ejemplo.

Encuentre el punto de intersección de las rectas $2x - y + 3 = 0$ y $4x + 2y - 1 = 0$.

Nuestro sistema es

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

Método de sustitución

Ejemplo.

Encuentre el punto de intersección de las rectas $2x - y + 3 = 0$ y $4x + 2y - 1 = 0$.

Nuestro sistema es

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

despejamos y en la primera ecuación

$$y = 2x + 3$$

Método de sustitución

sustituimos en la segunda ecuación

Método de sustitución

sustituimos en la segunda ecuación

$$4x + 2(2x + 3) = 1$$

Método de sustitución

sustituimos en la segunda ecuación

$$4x + 2(2x + 3) = 1$$

encontramos el valor de x

$$4x + 4x + 6 = 1$$

Método de sustitución

sustituimos en la segunda ecuación

$$4x + 2(2x + 3) = 1$$

encontramos el valor de x

$$4x + 4x + 6 = 1$$

$$8x = -5$$

Método de sustitución

sustituimos en la segunda ecuación

$$4x + 2(2x + 3) = 1$$

encontramos el valor de x

$$4x + 4x + 6 = 1$$

$$8x = -5$$

$$x = \frac{-5}{8}$$

Método de sustitución

reemplazamos en la primera ecuación por facilidad (coeficientes más pequeños)

Método de sustitución

reemplazamos en la primera ecuación por facilidad (coeficientes más pequeños)

$$2\left(\frac{-5}{8}\right) - y = -3$$

Método de sustitución

reemplazamos en la primera ecuación por facilidad (coeficientes más pequeños)

$$2\left(\frac{-5}{8}\right) - y = -3$$

$$-\frac{10}{8} + 3 = y$$

Método de sustitución

$$-\frac{10}{8}+\frac{24}{8}=y$$

Método de sustitución

$$-\frac{10}{8}+\frac{24}{8}=y$$

$$y=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$$

Método de sustitución

$$-\frac{10}{8}+\frac{24}{8}=y$$

$$y=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$$

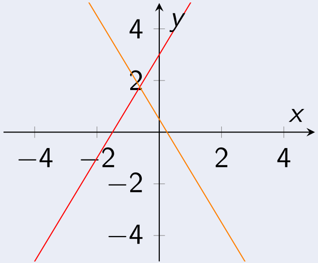
El punto de corte es $\left(-\frac{5}{8},\frac{7}{4}\right)$

Método de sustitución

Para no perder la costumbre hagamos la gráfica y comprobemos analíticamente el resultado.

Método de sustitución

Para no perder la costumbre hagamos la gráfica y comprobemos analíticamente el resultado.



Método de sustitución

Reemplacemos en la primera ecuación:

$$2\left(\frac{-5}{8}\right)-\frac{7}{4}+3=-\left(\frac{10}{8}\right)-\frac{14}{4}+\frac{24}{8}=0$$

Método de sustitución

Reemplacemos en la primera ecuación:

$$2\left(\frac{-5}{8}\right) - \frac{7}{4} + 3 = -\left(\frac{10}{8}\right) - \frac{14}{4} + \frac{24}{8} = 0$$

Y en la segunda ecuación:

$$4\left(\frac{-5}{8}\right) + 2\left(\frac{7}{4}\right) - 1 = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{2}{2} = 0$$

Método de eliminación

La idea en este método es sumar las dos ecuaciones buscando que en la suma alguna de las variables "desaparezca" y el sistema se reduzca a una ecuación con una incógnita; de ahí en adelante hacemos lo mismo que en los otros dos métodos.

Método de eliminación

Hay que tener en cuenta que en la mayoría de los casos al sumar no desaparece ninguna variable, por lo que es necesario multiplicar alguna de las ecuaciones (a veces ambas) por constantes para lograr que alguna de las variables quede con el mismo coeficiente, pero con signo diferente, en las dos ecuaciones. En ese momento sí sumamos y se elimina la variable.

Método de eliminación

Ejemplo: Encuentre el punto de corte de las rectas $2x - y + 1 = 0$ y $x + 3y - 2 = 0$, o lo que es lo mismo, solucione el sistema:

Método de eliminación

Ejemplo: Encuentre el punto de corte de las rectas $2x - y + 1 = 0$ y $x + 3y - 2 = 0$, o lo que es lo mismo, solucione el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 & \qquad\qquad (I) \\ x + 3y = 2 & \qquad\qquad (II) \end{cases}$$

Método de eliminación

Ejemplo: Encuentre el punto de corte de las rectas $2x - y + 1 = 0$ y $x + 3y - 2 = 0$, o lo que es lo mismo, solucione el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 & (I) \\ x + 3y = 2 & (II) \end{cases}$$

Para poder eliminar la x al sumar, necesitamos multiplicar la ecuación (II) por (-2):

Método de eliminación

Ejemplo: Encuentre el punto de corte de las rectas $2x - y + 1 = 0$ y $x + 3y - 2 = 0$, o lo que es lo mismo, solucione el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 & \qquad (I) \\ x + 3y = 2 & \qquad (II) \end{cases}$$

Para poder eliminar la x al sumar, necesitamos multiplicar la ecuación (II) por (-2):

$$\begin{array}{rrrl} \begin{cases} 2x & -y & = -1 \\ -2x & -6y & = -4 \end{cases} & & & \begin{array}{l} (I) \\ (II') \end{array} \\ \hline & -7y & = -5 & \quad \text{Suma} \end{array}$$

Método de eliminación

Ejemplo: Encuentre el punto de corte de las rectas $2x - y + 1 = 0$ y $x + 3y - 2 = 0$, o lo que es lo mismo, solucione el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 & (I) \\ x + 3y = 2 & (II) \end{cases}$$

Para poder eliminar la x al sumar, necesitamos multiplicar la ecuación (II) por (-2):

$$\begin{array}{rrrl} 2x & -y & = -1 & (I) \\ -2x & -6y & = -4 & (II') \\ \hline & -7y & = -5 & \text{Suma} \end{array}$$

De donde $y = \dfrac{5}{7}$.

Método de eliminación

reemplazamos el valor de y en (I), y así tenemos:

Método de eliminación

reemplazamos el valor de y en (I), y así tenemos:

$$2x - \frac{5}{7} = -1$$

Método de eliminación

reemplazamos el valor de y en (I), y así tenemos:

$$2x - \frac{5}{7} = -1$$

$$2x = -\frac{7}{7} + \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$$

Método de eliminación

reemplazamos el valor de y en (I), y así tenemos:

$$2x - \frac{5}{7} = -1$$

$$2x = -\frac{7}{7} + \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$x = -\frac{1}{7}$$

Método de eliminación

reemplazamos el valor de y en (I), y así tenemos:

$$2x - \frac{5}{7} = -1$$

$$2x = -\frac{7}{7} + \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$x = -\frac{1}{7}$$

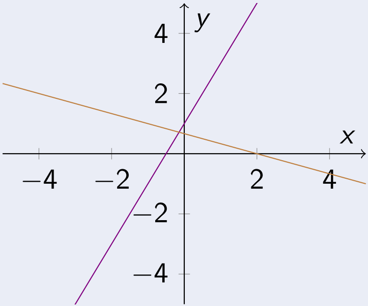
La solución del sistema es $x = -\frac{1}{7}$ y $y = \frac{5}{7}$; por lo tanto el punto de corte de las rectas es $\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$

Método de eliminación

Haremos la gráfica y es un ejercicio la comprobación analítica del resultado.

Método de eliminación

Haremos la gráfica y es un ejercicio la comprobación analítica del resultado.



Ejercicios para este momento.

En cada caso se da un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resuelva el sistema por los tres métodos vistos. Haga la gráfica con las dos rectas que representan las ecuaciones y compruebe la solución gráfica y analíticamente.

(1) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 2x - \dfrac{3}{2}y = 3 \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - \dfrac{2}{3}y = 2 \end{cases}$

Seguramente tuvo problemas con las ecuaciones en **(2)** y **(3)**, pero la representación gráfica le ayudará a encontrar una respuesta.

Seguramente tuvo problemas con las ecuaciones en **(2)** y **(3)**, pero la representación gráfica le ayudará a encontrar una respuesta.

Se enfrentó a cosas tan absurdas como a que una constante distinta de cero era igual a cero, o a que la incógnitas “desaparecieran” al mismo tiempo, quedando algo tan trivial como $0 = 0$.

Pero... si hizo bien las gráficas se dió cuenta de que cuando llegó a lo absurdo estaba frente a dos **rectas paralelas**, que no tenían puntos en común

Pero... si hizo bien las gráficas se dió cuenta de que cuando llegó a lo absurdo estaba frente a dos **rectas paralelas**, que no tenían puntos en común. Esta situación le advertía que si pretendía igualar las ecuaciones, para descubrir los puntos en común, llegaría a algo absurdo porque no existen tales puntos comunes.

Por otro lado cuando llegó a $0 = 0$, lo que pasó es que las dos rectas eran la misma solo que con ecuaciones aparentemente distintas.

Por otro lado cuando llegó a $0 = 0$, lo que pasó es que las dos rectas eran la misma solo que con ecuaciones aparentemente distintas.

Esto conduce a que las soluciones del sistema son todos los puntos de la recta, es decir, infinitos puntos.

Por otro lado cuando llegó a $0 = 0$, lo que pasó es que las dos rectas eran la misma solo que con ecuaciones aparentemente distintas.

Esto conduce a que las soluciones del sistema son todos los puntos de la recta, es decir, infinitos puntos.

Para exhibir algunos de ellos basta con dar valores a x en cualquiera de las dos ecuaciones y encontrar valores de y que hagan cierta la igualdad.

Por otro lado cuando llegó a $0 = 0$, lo que pasó es que las dos rectas eran la misma solo que con ecuaciones aparentemente distintas.

Esto conduce a que las soluciones del sistema son todos los puntos de la recta, es decir, infinitos puntos.

Para exhibir algunos de ellos basta con dar valores a x en cualquiera de las dos ecuaciones y encontrar valores de y que hagan cierta la igualdad.

Por ejemplo en el sistema **(3)** podríamos escoger unas tres soluciones como $(0, -3)$,$(1, 0)$ y $(2, 3)$.

Por otro lado cuando llegó a $0 = 0$, lo que pasó es que las dos rectas eran la misma solo que con ecuaciones aparentemente distintas.

Esto conduce a que las soluciones del sistema son todos los puntos de la recta, es decir, infinitos puntos.

Para exhibir algunos de ellos basta con dar valores a x en cualquiera de las dos ecuaciones y encontrar valores de y que hagan cierta la igualdad.

Por ejemplo en el sistema **(3)** podríamos escoger unas tres soluciones como $(0, -3)$,$(1, 0)$ y $(2, 3)$.

Resumamos en una proposición lo que encontramos:

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Dadas dos ecuaciones lineales con dos incógnitas existen tres posibilidades:

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Dadas dos ecuaciones lineales con dos incógnitas existen tres posibilidades:

(1) **Solución única:** Existen valores únicos x_0 y y_0 que verifican simultámeamente las dos ecuaciones. La solución del sistema determina esos únicos valores.

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Dadas dos ecuaciones lineales con dos incógnitas existen tres posibilidades:

(1) **Solución única:** Existen valores únicos x_0 y y_0 que verifican simultámeamente las dos ecuaciones. La solución del sistema determina esos únicos valores.

Las ecuaciones representan dos rectas que se cortan en el punto de coordenadas $(x_0$ y $y_0)$.

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

(2) **Infinitas soluciones:** Existen infinitos valores x_i, y_i que verifican las dos ecuaciones. Al tratar de solucionar el sistema por cualquiera de los tres métodos nos encontramos con que las variables o incógnitas "desaparecen" y el sistema no se reduce a una ecuación lineal con una incógnita.

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

(2) **Infinitas soluciones:** Existen infinitos valores x_i, y_i que verifican las dos ecuaciones. Al tratar de solucionar el sistema por cualquiera de los tres métodos nos encontramos con que las variables o incógnitas "desaparecen" y el sistema no se reduce a una ecuación lineal con una incógnita.

Las parejas de soluciones se encuentran reemplazando una de las variables en cualquiera de las dos ecuaciones (en realidad son la misma) por cualquier número real y encontrando el valor de la otra variable que haga cierta la igualdad. Las parejas corresponden a las coordenadas de los puntos de la recta.

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

(3) **Sin solución:** No existe una pareja de valores x_0 y y_0 que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones. Al tratar de solucionar el sistema por cualquier método llegamos a inconsistencias como que una constante distinta de cero es igual a cero.

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

(3) **Sin solución:** No existe una pareja de valores x_0 y y_0 que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones. Al tratar de solucionar el sistema por cualquier método llegamos a inconsistencias como que una constante distinta de cero es igual a cero.

Las dos rectas que representan las ecuaciones son paralelas y no pueden tener puntos en común.