MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autora: Jeanneth Galeano Peñaloza
Edición: Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Definición

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son reales, x representa una variable y n es un número natural.

Polinomios

Definición

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son reales, x representa una variable y n es un número natural.
Si n es la mayor potencia de la variable se dice que el polinomio es de **grado** n.

Polinomios

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Polinomios

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1 x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$ NO es un polinomio.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$ NO es un polinomio.

$x^{2/5} + 3x^4 - 1$

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$ NO es un polinomio.

$x^{2/5} + 3x^4 - 1$ NO es un polinomio.

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

$$(2x+3)+(x^2-x+2) = x^2+(2x-x)+(3+2)$$

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.

Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

$$\begin{aligned}(2x+3)+(x^2-x+2) &= x^2+(2x-x)+(3+2)\\ &= x^2+(2-1)x+5\end{aligned}$$

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

$$\begin{aligned}(2x+3)+(x^2-x+2) &= x^2+(2x-x)+(3+2)\\ &= x^2+(2-1)x+5\\ &= x^2+x+5\end{aligned}$$

Operaciones entre polinomios

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$(2x + 3) - (x^2 - x + 2)$$

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$(2x+3)-(x^2-x+2)=-x^2+(2x-(-x))+(3-2)$$

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$\begin{aligned}(2x+3)-(x^2-x+2) &= -x^2+(2x-(-x))+(3-2)\\ &= -x^2+(2+1)x+1\end{aligned}$$

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$\begin{aligned}(2x+3)-(x^2-x+2) &= -x^2+(2x-(-x))+(3-2)\\ &= -x^2+(2+1)x+1\\ &= -x^2+3x+1\end{aligned}$$

Producto

Para el producto:

$$(2x + 3)(x^2 - x + 2)$$

Operaciones entre polinomios

Producto

Para el producto:

$$(2x+3)(x^2-x+2) = 2x(x^2-x+2) + 3(x^2-x+2)$$

Producto

Para el producto:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x^2-x+2) &= 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2)\\ &= 2x^3-2x^2+4x+3x^2-3x+6\end{aligned}$$

Operaciones entre polinomios

Producto

Para el producto:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x^2-x+2) &= 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2)\\ &= 2x^3-2x^2+4x+3x^2-3x+6\\ &= 2x^3+x^2+x+6\end{aligned}$$

Producto

Para el producto:

$$
\begin{aligned}
(2x+3)(x^2-x+2) &= 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2) \\
&= 2x^3-2x^2+4x+3x^2-3x+6 \\
&= 2x^3+x^2+x+6
\end{aligned}
$$

Note que aquí la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma es muy importante.

Factorización

Si un polinomio $p(x)$ se puede expresar como producto de polinomios de menor grado, decimos que el polinomio se encuentra factorizado.

Factorización

Si un polinomio $p(x)$ se puede expresar como producto de polinomios de menor grado, decimos que el polinomio se encuentra factorizado.
Por ejemplo,

$$p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

Operaciones entre polinomios

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Operaciones entre polinomios

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Factorización

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Factorización

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Operaciones entre polinomios

Si un polinomio no se puede expresar como producto notable, ¿cómo encontrar su factorización?

División

Recordemos que en los números reales

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

División

Recordemos que en los números reales

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

Luego,

$$32 = (5)(6) + 2$$

División

En forma análoga para polinomios

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - x + 2 & \lfloor\, x + 1 \\
\underline{-x^2 - x \quad\quad} & \quad x - 2 \\
-2x + 2 & \\
\underline{2x + 2} & \\
4 &
\end{array}
$$

División

En forma análoga para polinomios

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - x + 2 & \underline{\big|\ x + 1 \quad} \\
\underline{-x^2 - x\quad} & \quad x - 2 \\
-2x + 2 & \\
\underline{2x + 2} & \\
4 &
\end{array}
$$

$$x^2 - x + 2 = (x+1)(x-2) + 4$$

Algoritmo de la división para polinomios

Si $p(x)$ y $s(x)$ son polinomios, donde el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el grado de $s(x)$ y si $s(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

División de Polinomios

Algoritmo de la división para polinomios

Si $p(x)$ y $s(x)$ son polinomios, donde el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el grado de $s(x)$ y si $s(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x),$$

Algoritmo de la división para polinomios

Si $p(x)$ y $s(x)$ son polinomios, donde el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el grado de $s(x)$ y si $s(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $s(x)$.

División de Polinomios

Algoritmo de la división para polinomios

Si $p(x)$ y $s(x)$ son polinomios, donde el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el grado de $s(x)$ y si $s(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $s(x)$.
El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo**.

División de Polinomios

Algoritmo de la división para polinomios

En el ejemplo anterior

$$\underbrace{x^2 - x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(x+1)}_{s(x)}\underbrace{(x-2)}_{q(x)} + \underbrace{4}_{r(x)}$$

División de Polinomios

Un caso especial se presenta cuando $s(x)$ es de la forma $(x - c)$, donde c es un número real. Entonces,

División de Polinomios

Un caso especial se presenta cuando $s(x)$ es de la forma $(x - c)$, donde c es un número real. Entonces,

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ debe ser menor que el grado de $x - c$, es decir menor que 1.

Un caso especial se presenta cuando $s(x)$ es de la forma $(x - c)$, donde c es un número real. Entonces,

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ debe ser menor que el grado de $x - c$, es decir menor que 1. Luego, $r(x)$ debe ser un polinomio constante, así que

Un caso especial se presenta cuando $s(x)$ es de la forma $(x - c)$, donde c es un número real. Entonces,

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ debe ser menor que el grado de $x - c$, es decir menor que 1. Luego, $r(x)$ debe ser un polinomio constante, así que

$$p(x) = (x - c)q(x) + d.$$

Teorema del residuo

Si evaluamos el polinomio $p(x)$ en el valor real c tenemos que

Teorema del residuo

Si evaluamos el polinomio $p(x)$ en el valor real c tenemos que

$$p(c) = (c - c)q(c) + d = d,$$

Teorema del residuo

Si evaluamos el polinomio $p(x)$ en el valor real c tenemos que

$$p(c) = (c - c)q(c) + d = d,$$

es decir, el residuo en esta división es $p(c) = d$.

Teorema del residuo

Si evaluamos el polinomio $p(x)$ en el valor real c tenemos que

$$p(c) = (c - c)q(c) + d = d,$$

es decir, el residuo en esta división es $p(c) = d$.

Teorema del residuo

Si un polinomio $p(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo de esta división es $p(c)$.

Teorema del residuo

En ejemplo anterior,

$$p(x) = x^2 - x + 2 \text{ y } p(2) = 4$$

Teorema del residuo

Ejemplo

Encuentre el residuo si $p(x) = 3x^3 - 2x - 4$ se divide entre $x + 2$, sin hacer la división.

Ejemplo

Encuentre el residuo si $p(x) = 3x^3 - 2x - 4$ se divide entre $x + 2$, sin hacer la división.

$$p(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2) - 4 = -24$$

Ejemplo

Encuentre el residuo si $p(x) = 3x^3 - 2x - 4$ se divide entre $x + 2$, sin hacer la división.

$$p(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2) - 4 = -24$$

¿Qué sucede si el residuo es cero?

Teorema del residuo

Ejemplo

Encuentre el residuo si $p(x) = 3x^3 - 2x - 4$ se divide entre $x + 2$, sin hacer la división.

$$p(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2) - 4 = -24$$

¿Qué sucede si el residuo es cero?

Si el residuo es cero, la división es exacta y el polinomio queda factorizado.

Ejemplo

Encuentre el residuo si $p(x) = 3x^3 - 2x - 4$ se divide entre $x + 2$, sin hacer la división.

$$p(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2) - 4 = -24$$

¿Qué sucede si el residuo es cero?

Si el residuo es cero, la división es exacta y el polinomio queda factorizado.

Teorema del Factor

Un polinomio $p(x)$ tiene un factor $(x - c)$ si y sólo si $p(c) = 0$.

Ejemplo

Pruebe que $x + 3$ es factor $x^3 + x^2 - 2x + 12$.

Ejemplo

Pruebe que $x + 3$ es factor $x^3 + x^2 - 2x + 12$.
El residuo es

$$p(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 2(-3) + 12 = 0$$

Ejemplo

Pruebe que $x+3$ es factor $x^3+x^2-2x+12$.
El residuo es

$$p(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 2(-3) + 12 = 0$$

y el polinomio se puede factorizar como

$$p(x) = (x+3)(x^2-2x+4).$$

Ceros de un polinomio

Definición

Los ceros de un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Ceros de un polinomio

Definición

Los ceros de un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

o las raíces de la ecuación polinómica $p(x) = 0$,

Ceros de un polinomio

Definición

Los ceros de un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

o las raíces de la ecuación polinómica $p(x) = 0$, son los valores $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$p(a) = 0$$

Ejemplo

Los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3, pues $p(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$ y $p(3) = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0$.

Ceros de un polinomio

Ejemplo

Los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3, pues
$p(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$ y $p(3) = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0$.
Usando el teorema del factor tenemos:

$$p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ceros de un polinomio

Definición

Si el polinomio $p(x)$ puede factorizarse como

$$p(x) = (x - a)^m q(x),$$

donde a no es un cero de $q(x)$ y m es un entero mayor o igual que 1,

Ceros de un polinomio

Definición

Si el polinomio $p(x)$ puede factorizarse como

$$p(x) = (x - a)^m q(x),$$

donde a no es un cero de $q(x)$ y m es un entero mayor o igual que 1, decimos que a es un cero de $p(x)$ de **multiplicidad** m.

Ceros de un polinomio

Ejemplo

Si $p(x) = (x-3)^2(x+2)(x-1)^5$,

Ejemplo

Si $p(x) = (x-3)^2(x+2)(x-1)^5$, decimos que
3 es un cero de multiplicidad 2,
-2 es un cero de multiplicidad 1 y
1 es un cero de multiplicidad 5.

Ejemplo

¿Cómo encontrar un polinomio de grado 3 que tenga como ceros a 2, -3, 5?

Ejemplo

¿Cómo encontrar un polinomio de grado 3 que tenga como ceros a 2, -3, 5?

$$p(x) = (x-2)(x+3)(x-5)$$

Ejemplo

¿Cómo encontrar un polinomio de grado 3 que tenga como ceros a 2, -3, 5?

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x+3)(x-5) \\ &= (x^2+x-6)(x-5) \end{aligned}$$

Ejemplo

¿Cómo encontrar un polinomio de grado 3 que tenga como ceros a 2, -3, 5?

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x+3)(x-5) \\ &= (x^2+x-6)(x-5) \\ &= x^3-4x^2-11x+30 \end{aligned}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$4 \quad 1 \quad -3 \quad -4 \quad 5$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & & & & \\ \hline & 4 & & & & \end{array}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\
-2 & & -8 & & & \\
\hline
 & 4 & & & &
\end{array}
$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\
-2 & & -8 & & & \\
\hline
 & 4 & -7 & & &
\end{array}
$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\
-2 & & -8 & 14 & & \\
\hline
 & 4 & -7 & & &
\end{array}
$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & -8 & 14 & & \\ \hline & 4 & -7 & 11 & & \end{array}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & -8 & 14 & -22 & \\ \hline & 4 & -7 & 11 & & \end{array}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\
-2 & & -8 & 14 & -22 & \\
\hline
 & 4 & -7 & 11 & -26 &
\end{array}
$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & -8 & 14 & -22 & 52 \\ \hline & 4 & -7 & 11 & -26 & \end{array}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & -8 & 14 & -22 & 52 \\ \hline & 4 & -7 & 11 & -26 & \underbrace{57}_{\text{residuo}} \end{array}$$

División Sintética

Existe un método más rápido para dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - c$ con c un número real, la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = 4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 1 & -3 & -4 & 5 \\ -2 & & -8 & 14 & -22 & 52 \\ \hline & 4 & -7 & 11 & -26 & \underbrace{57}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Entonces,

$$4x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = (x+2)(4x^3 - 7x^2 + 11x - 26) + 57.$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

División Sintética

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ 3 & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & \end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & &
\end{array}
$$

División Sintética

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & & & & \\ \hline & 1 & -3 & & & & \end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -9 & & & \\ \hline & 1 & -3 & & & & \end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -9 & & & \\ \hline & 1 & -3 & -9 & & & \end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & -9 & -27 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & & &
\end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & -9 & -27 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & -2 & &
\end{array}
$$

División Sintética

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -9 & -27 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & -9 & -2 & & \end{array}$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & -9 & -27 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & -2 & -15 &
\end{array}
$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & -9 & -27 & -6 & -45 \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & -2 & -15 &
\end{array}
$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & -9 & -27 & -6 & -45 \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & -2 & -15 & \underbrace{0}_{\text{residuo}}
\end{array}
$$

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -9 & -27 & -6 & -45 \\ \hline & 1 & -3 & -9 & -2 & -15 & \underbrace{0}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Entonces, $x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45 = (x-3)(x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 2x - 15)$.

División Sintética

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -6 & 0 & 25 & -9 & 45 \\
3 & & 3 & -9 & -27 & -6 & -45 \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & -2 & -15 & \underbrace{0}_{\text{residuo}}
\end{array}
$$

Entonces, $x^5 - 6x^4 + 25x^2 - 9x + 45 = (x - 3)(x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 2x - 15)$.

Note que si una potencia de x falta en el polinomio, se asigna cero al coeficiente correspondiente.

¿Qué significa que el residuo sea cero?

¿Qué significa que el residuo sea cero?

Que la división es exacta y por lo tanto, el polinomio quedó factorizado. El primer factor es lineal y el segundo factor de grado 4.

División Sintética

¿Qué significa que el residuo sea cero?

Que la división es exacta y por lo tanto, el polinomio quedó factorizado. El primer factor es lineal y el segundo factor de grado 4.

Podemos tratar de factorizar el polinomio de grado 4, usando el mismo método, pero ¿con qué valores se hace la división sintética?

Ceros racionales de un polinomio

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros.

Ceros racionales de un polinomio

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros.

- Sea p un entero, divisor de a_0.

Ceros racionales de un polinomio

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros.

- Sea p un entero, divisor de a_0.
- Sea q un entero, divisor de a_n.

Ceros racionales de un polinomio

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros.

- Sea p un entero, divisor de a_0.
- Sea q un entero, divisor de a_n.
- Los posibles ceros racionales del polinomio son de la forma $\frac{p}{q}$.

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$,

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$, aquí $a_0 = -2$ y $a_3 = 12$,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$, aquí $a_0 = -2$ y $a_3 = 12$,

- Valores de p: ± 1, ± 2

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$, aquí $a_0 = -2$ y $a_3 = 12$,

- Valores de p: ± 1, ± 2
- Valores de q: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$, aquí $a_0 = -2$ y $a_3 = 12$,

- Valores de p: ± 1, ± 2
- Valores de q: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.
- Posibles raíces racionales
  $\frac{p}{q}: \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{12},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3}$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{cccc} 12 & 8 & -3 & -2 \\ \hline \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	-3	-2
1				

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 12 & 8 & -3 & -2 \\
\color{red}{1} & & & & \\
\hline
 & 12 & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & 8 & -3 & -2 \\ 1 & & 12 & & \\ \hline & 12 & & & \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & 8 & -3 & -2 \\ \color{red}{1} & & 12 & & \\ \hline & 12 & 20 & & \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & 8 & -3 & -2 \\ 1 & & 12 & 20 & \\ \hline & 12 & 20 & & \end{array}$$

	12	8	-3	-2
1		12	20	
	12	20	17	

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	-3	-2
1		12	20	17
	12	20	17	

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15}
\end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}
$$

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & & & & \\
\hline
 & & & & &
\end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2
$\frac{1}{2}$				
	12			

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
1 & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & 15 & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\frac{1}{2} & & 6 & & & \\
\hline
 & 12 & & & &
\end{array}
$$

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	
$\frac{1}{2}$		6			
	12	14			

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2
$\frac{1}{2}$		6	7	
	12	14		

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc l}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc l}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2
$\frac{1}{2}$		6	7	2
	12	14	4	0

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
{\color{red}1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & {\color{red}15} & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
{\color{red}\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & {\color{red}0} & \checkmark
\end{array}
$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	
$\frac{1}{2}$		6	7	2	
	12	14	4	0	$\checkmark$
$\frac{1}{2}$					

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\ \hline & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\ \hline & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & & & & \\ \hline & 12 & & & & \end{array}$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ 1 & & 12 & 20 & 17 & \\ \hline & 12 & 20 & 17 & 15 & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \frac{1}{2} & & 6 & 7 & 2 & \\ \hline & 12 & 14 & 4 & 0 & \checkmark \\ \frac{1}{2} & & 6 & & & \\ \hline & 12 & & & & \end{array}$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\ \hline & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\ \hline & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & & & \\ \hline & 12 & 20 & & & \end{array}$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	
$\frac{1}{2}$		6	7	2	
	12	14	4	0	$\checkmark$
$\frac{1}{2}$		6	10		
	12	20			

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 10 & & \\
\hline
 & 12 & 20 & \color{red}{14} & &
\end{array}
$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
1 & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & 15 & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\frac{1}{2} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & 0 & \checkmark \\
\frac{1}{2} & & 6 & 10 & & \\
\hline
 & 12 & 20 & 14 & & \text{NO}
\end{array}
$$

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
1 & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & 15 & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\frac{1}{2} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & 0 & \checkmark \\
\frac{1}{2} & & 6 & 10 & & \\
\hline
 & 12 & 20 & 14 & & \text{NO}
\end{array}
$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 10 & & \\
\hline
 & 12 & 20 & \color{red}{14} & & \text{NO}
\end{array}
$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 12 & 14 & 4 \\
 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	
$\frac{1}{2}$		6	7	2	
	12	14	4	0	$\checkmark$
$\frac{1}{2}$		6	10		
	12	20	14		NO

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

	12	14	4
$-\frac{1}{2}$			

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
1 & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & 15 & \text{NO}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\frac{1}{2} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & 0 & \checkmark \\
\frac{1}{2} & & 6 & 10 & & \\
\hline
 & 12 & 20 & 14 & & \text{NO}
\end{array}
\qquad
p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 12 & 14 & 4 \\
-\frac{1}{2} & & & \\
\hline
 & 12 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

	12	8	−3	−2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	−3	−2	
$\frac{1}{2}$		6	7	2	
	12	14	4	0	✓
$\frac{1}{2}$		6	10		
	12	20	14		NO

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

	12	14	4
$-\frac{1}{2}$		−6	
	12		

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\ \hline & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\ \hline & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 10 & & \\ \hline & 12 & 20 & \color{red}{14} & & \text{NO} \end{array}$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 12 & 14 & 4 \\ \color{red}{-\frac{1}{2}} & & -6 & \\ \hline & 12 & 8 & \end{array}$$

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	
$\frac{1}{2}$		6	7	2	
	12	14	4	0	$\checkmark$
$\frac{1}{2}$		6	10		
	12	20	14		NO

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

	12	14	4
$-\frac{1}{2}$		-6	-4
	12	8	

	12	8	-3	-2	
1		12	20	17	
	12	20	17	15	NO

	12	8	-3	-2	
$\frac{1}{2}$		6	7	2	
	12	14	4	0	✓
$\frac{1}{2}$		6	10		
	12	20	14		NO

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

	12	14	4
$-\frac{1}{2}$		-6	-4
	12	8	0

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ 1 & & 12 & 20 & 17 & \\ \hline & 12 & 20 & 17 & 15 & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \frac{1}{2} & & 6 & 7 & 2 & \\ \hline & 12 & 14 & 4 & 0 & \checkmark \\ \frac{1}{2} & & 6 & 10 & & \\ \hline & 12 & 20 & 14 & & \text{NO} \end{array}$$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & 14 & 4 & \\ -\frac{1}{2} & & -6 & -4 & \\ \hline & 12 & 8 & 0 & \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\
\hline
 & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 12 & 8 & -3 & -2 & \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\
\hline
 & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\
\color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 10 & & \\
\hline
 & 12 & 20 & \color{red}{14} & & \text{NO}
\end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right) \\ &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2}\right)(12x + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 12 & 14 & 4 & \\
\color{red}{-\frac{1}{2}} & & -6 & -4 & \\
\hline
 & 12 & 8 & \color{red}{0} & \checkmark
\end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{1} & & 12 & 20 & 17 & \\ \hline & 12 & 20 & 17 & \color{red}{15} & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & 8 & -3 & -2 & \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 7 & 2 & \\ \hline & 12 & 14 & 4 & \color{red}{0} & \checkmark \\ \color{red}{\frac{1}{2}} & & 6 & 10 & & \\ \hline & 12 & 20 & \color{red}{14} & & \text{NO} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & 14 & 4 & \\ \color{red}{-\frac{1}{2}} & & -6 & -4 & \\ \hline & 12 & 8 & \color{red}{0} & \checkmark \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 14x + 4\right) \\ &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2}\right)\left(12x + 8\right) \\ &= 12\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2}\right)\left(x + \tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6,$

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6$, aquí $a_0 = -6$ y $a_5 = 3$,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6$, aquí $a_0 = -6$ y $a_5 = 3$,

- Valores de p: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6$, aquí $a_0 = -6$ y $a_5 = 3$,

- Valores de p: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6
- Valores de q: ± 1, ± 3,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6$, aquí $a_0 = -6$ y $a_5 = 3$,

- Valores de p: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- Valores de q: $\pm 1, \pm 3$,
- Posibles raíces $\frac{p}{q}$: $\pm 1,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm 3,\ \pm 6$.

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\hline
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
{\color{red}2} & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
{\color{red}2} & & 6 & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\ \color{red}{2} & & 6 & & & & \\ \hline & 3 & -4 & & & & \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & & & \\
\hline
 & 3 & -4 & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & & & \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & & \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
{\color{red}2} & & 6 & -8 & -28 & & \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\ \color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\ \hline & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \\
\frac{1}{3} & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \\
\frac{1}{3} & & & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & & & & \\
\hline
 & 3 & -3 & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & & & \\
\hline
 & 3 & -3 & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
{\color{red}2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & {\color{red}0} \\
{\color{red}\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & & & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & &
\end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

	3	-10	-6	24	11	-6
2		6	-8	-28	-8	6
	3	-4	-14	-4	3	0
$\frac{1}{3}$		1	-1	-5	-3	
	3	-3	-15	-9	0	
-1						

Ceros racionales de un polinomio

	3	-10	-6	24	11	-6
2		6	-8	-28	-8	6
	3	-4	-14	-4	3	0
$\frac{1}{3}$		1	-1	-5	-3	
	3	-3	-15	-9	0	
-1						
	3					

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} & \\
\color{red}{-1} & & -3 & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \\
\frac{1}{3} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & 0 & \\
-1 & & -3 & & & & \\
\hline
 & 3 & -6 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\ \hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\ \hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} & \\
\color{red}{-1} & & -3 & 6 & & & \\ \hline
 & 3 & -6 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \\
\frac{1}{3} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & 0 & \\
-1 & & -3 & 6 & & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} & \\
\color{red}{-1} & & -3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} & \\
\color{red}{-1} & & -3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & \color{red}{0} & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

	3	-10	-6	24	11	-6
2		6	-8	-28	-8	6
	3	-4	-14	-4	3	0
$\frac{1}{3}$		1	-1	-5	-3	
	3	-3	-15	-9	0	
-1		-3	6	9		
	3	-6	-9	0		
-1						

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \\
\frac{1}{3} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & 0 & \\
-1 & & -3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & 0 & & \\
-1 & & & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} & \\
\color{red}{-1} & & -3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & \color{red}{0} & & \\
\color{red}{-1} & & -3 & & & & \\
\hline
 & 3 & & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \\
\frac{1}{3} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & 0 & \\
-1 & & -3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & 0 & & \\
-1 & & -3 & & & & \\
\hline
 & 3 & -9 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\
\color{red}{2} & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\
\hline
 & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & \color{red}{0} \\
\color{red}{\frac{1}{3}} & & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
\hline
 & 3 & -3 & -15 & -9 & \color{red}{0} & \\
\color{red}{-1} & & -3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & 3 & -6 & -9 & \color{red}{0} & & \\
\color{red}{-1} & & -3 & 9 & & & \\
\hline
 & 3 & -9 & & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

	3	-10	-6	24	11	-6
2		6	-8	-28	-8	6
	3	-4	-14	-4	3	0
$\frac{1}{3}$		1	-1	-5	-3	
	3	-3	-15	-9	0	
-1		-3	6	9		
	3	-6	-9	0		
-1		-3	9			
	3	-9	0			

Este polinomio se puede factorizar como

Este polinomio se puede factorizar como

$$p(x) = (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3)$$

Este polinomio se puede factorizar como

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3) \\
&= (x-2)(x-1/3)(3x^3 - 3x^2 - 15x - 9)
\end{aligned}
$$

Ceros racionales de un polinomio

Este polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3) \\ &= (x-2)(x-1/3)(3x^3 - 3x^2 - 15x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(3x^2 - 6x - 9) \end{aligned}$$

Ceros racionales de un polinomio

Este polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3) \\ &= (x-2)(x-1/3)(3x^3 - 3x^2 - 15x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(3x^2 - 6x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)(3x-9) \end{aligned}$$

Ceros racionales de un polinomio

Este polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3) \\ &= (x-2)(x-1/3)(3x^3 - 3x^2 - 15x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(3x^2 - 6x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)(3x-9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)3(x-3) \end{aligned}$$

Ceros racionales de un polinomio

Este polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3) \\
&= (x-2)(x-1/3)(3x^3 - 3x^2 - 15x - 9) \\
&= (x-2)(x-1/3)(x+1)(3x^2 - 6x - 9) \\
&= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)(3x-9) \\
&= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)3(x-3) \\
&= 3(x-2)(x-1/3)(x+1)^2(x-3)
\end{aligned}$$

Ceros racionales de un polinomio

Este polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x-2)(3x^4-4x^3-14x^2-4x+3) \\
&= (x-2)(x-1/3)(3x^3-3x^2-15x-9) \\
&= (x-2)(x-1/3)(x+1)(3x^2-6x-9) \\
&= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)(3x-9) \\
&= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)3(x-3) \\
&= 3(x-2)(x-1/3)(x+1)^2(x-3)
\end{aligned}$$

y sus raíces son:

Ceros racionales de un polinomio

Este polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3) \\ &= (x-2)(x-1/3)(3x^3 - 3x^2 - 15x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(3x^2 - 6x - 9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)(3x-9) \\ &= (x-2)(x-1/3)(x+1)(x+1)3(x-3) \\ &= 3(x-2)(x-1/3)(x+1)^2(x-3) \end{aligned}$$

y sus raíces son:

2 de multiplicidad 1,
-1 de multiplicidad 2,
$\frac{1}{3}$ de multiplicidad 1,
3 de multiplicidad 1.

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2,$

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$, aquí $a_0 = 2$ y $a_3 = 1$,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$, aquí $a_0 = 2$ y $a_3 = 1$,

- Valores de p: ± 1, ± 2,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$, aquí $a_0 = 2$ y $a_3 = 1$,

- Valores de p: ± 1, ± 2,
- Valores de q: ± 1,

Ejemplo

Consideremos el polinomio
$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$, aquí $a_0 = 2$ y $a_3 = 1$,

- Valores de p: ± 1, ± 2,
- Valores de q: ± 1,
- Posibles raíces $\frac{p}{q}$: $\pm 1, \ \pm 2$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \color{red}{1} & & & & \\ \hline \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \color{red}{1} & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

	1	-1	-2	2
1		1		
	1			

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
\color{red}{1} & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
\color{red}{1} & & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
1 & & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \color{red}{1} & & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
1 & & 1 & 0 & -2 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
{\color{red}1} & & 1 & 0 & -2 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & {\color{red}0}
\end{array}
$$

Así que $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x^2-2)$, y el último factor puede verse como una diferencia de cuadrados perfectos:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, aquí $a_0 = -1$ y $a_3 = 1$,

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, aquí $a_0 = -1$ y $a_3 = 1$,

- Valores de p: ± 1,

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, aquí $a_0 = -1$ y $a_3 = 1$,

- Valores de p: ± 1,
- Valores de q: ± 1,

Ceros racionales de un polinomio

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, aquí $a_0 = -1$ y $a_3 = 1$,

- Valores de p: ± 1,
- Valores de q: ± 1,
- Posibles raíces $\frac{p}{q}$: ± 1

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \color{red}{1} & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\color{red}{1} & & & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\color{red}{1} & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\color{red}{1} & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
{\color{red}1} & & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\color{red}{1} & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \color{red}{1} & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \color{red}{0} \end{array}$$

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ {\color{red}1} & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & {\color{red}0} \end{array}$$

Así que $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$.

Ceros racionales de un polinomio

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \color{red}{1} & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \color{red}{0} \end{array}$$

Así que $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Éste último término no puede factorizarse, pues no existe un número real tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle 1, dé cero.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Así que $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Éste último término no puede factorizarse, pues no existe un número real tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle 1, dé cero.
Por lo tanto, este polinomio no tiene más raíces reales.

En $\mathbb{R}$, este polinomio quedó factorizado como el producto de un polinomio lineal y uno cuadrático.

Ceros racionales de un polinomio

En $\mathbb{R}$, este polinomio quedó factorizado como el producto de un polinomio lineal y uno cuadrático.
En general, todo polinomio con coeficientes reales queda completamente factorizado en $\mathbb{R}$ como producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles.

Ceros racionales de un polinomio

En $\mathbb{R}$, este polinomio quedó factorizado como el producto de un polinomio lineal y uno cuadrático.

En general, todo polinomio con coeficientes reales queda completamente factorizado en $\mathbb{R}$ como producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles.

Si ampliamos el conjunto de variables a $\mathbb{C}$ (los complejos) se podría factorizar $x^2 + 1$ como $(x - i)(x + i)$, donde $i = \sqrt{-1}$ y así

$$p(x) = (x - 1)(x - i)(x + i).$$

Teorema Fundamental del Álgebra

En los complejos tenemos el siguiente teorema:

Teorema Fundamental del Álgebra

En los complejos tenemos el siguiente teorema:

Teorema

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales, entonces $p(x)$ tiene exactamente n raices complejas, contando multiplicidades.