MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autoras: Margarita Ospina Pulido
Jeanneth Galeano Peñaloza
Edición: Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

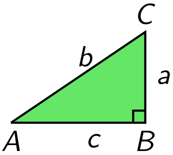
Parte I

Trigonometría

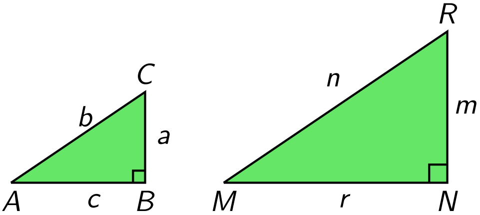
Razones trigonométricas

Considere los triángulos rectángulos

Considere los triángulos rectángulos $\triangle ABC$

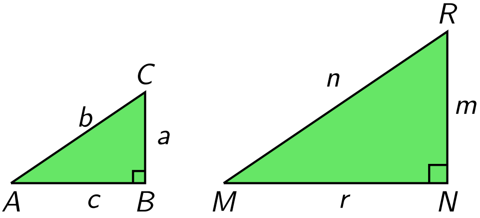


Considere los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNR$,

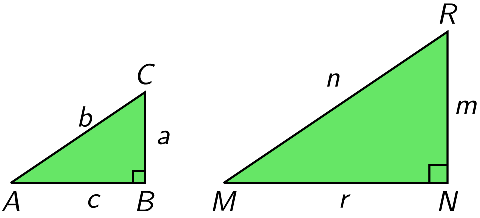


Razones trigonométricas

Considere los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNR$, con todos sus ángulos congruentes.



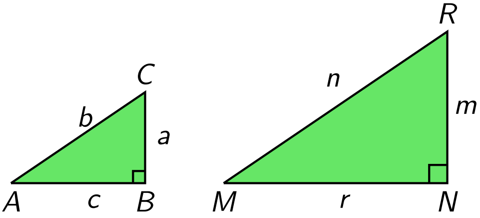
Considere los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNR$, con todos sus ángulos congruentes.



Entonces $\triangle ABC \sim \triangle MNR$,

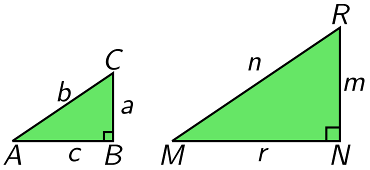
Razones trigonométricas

Considere los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNR$, con todos sus ángulos congruentes.

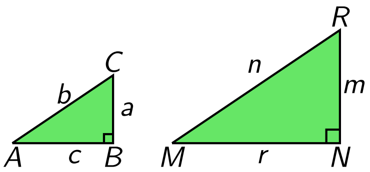


Entonces $\triangle ABC \sim \triangle MNR$, por lo tanto

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r}.$$

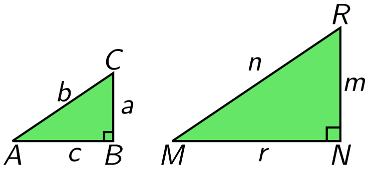


De lo cual se deduce que



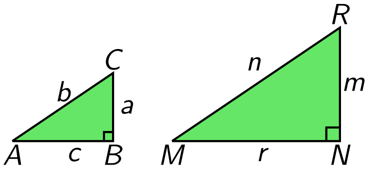
De lo cual se deduce que

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n},$$



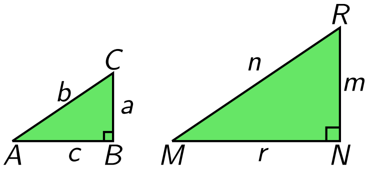
De lo cual se deduce que

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{r}{n},$$



De lo cual se deduce que

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{r}{n}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{m}{r}.$$



De lo cual se deduce que

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{r}{n}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{m}{r}.$$

Por lo tanto las razones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$ **NO** dependen del tamaño del triángulo.

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

Razones trigonométricas

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Razones trigonométricas

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Razones trigonométricas

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Razones trigonométricas

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

Razones trigonométricas

Considerando el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se definen las razones trigonométricas del ángulo A como

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

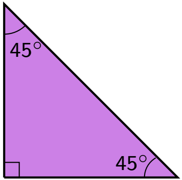
$$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Ejercicio

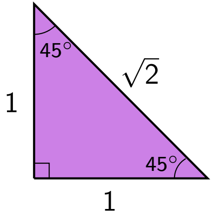
Demuestre que

- $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$
- $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$
- $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$

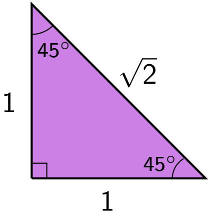
En un triángulo rectángulo isóceles los ángulos agudos deben ser congruentes, luego cada uno mide 45°.



En un triángulo rectángulo isóceles los ángulos agudos deben ser congruentes, luego cada uno mide 45°. Si tomamos como longitud de los catetos 1, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

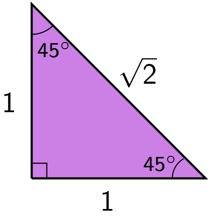


En un triángulo rectángulo isóceles los ángulos agudos deben ser congruentes, luego cada uno mide 45°. Si tomamos como longitud de los catetos 1, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.



Las razones trigonométricas son:

En un triángulo rectángulo isóceles los ángulos agudos deben ser congruentes, luego cada uno mide 45°. Si tomamos como longitud de los catetos 1, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

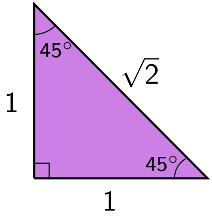


Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Razones trigonométricas

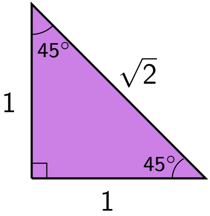
En un triángulo rectángulo isóceles los ángulos agudos deben ser congruentes, luego cada uno mide 45°. Si tomamos como longitud de los catetos 1, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.



Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$

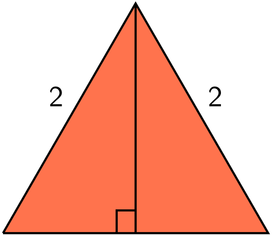
En un triángulo rectángulo isóceles los ángulos agudos deben ser congruentes, luego cada uno mide 45°. Si tomamos como longitud de los catetos 1, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.



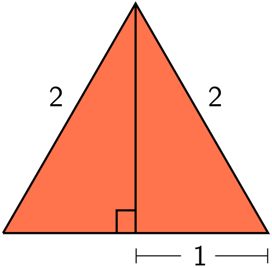
Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$
- $\sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$

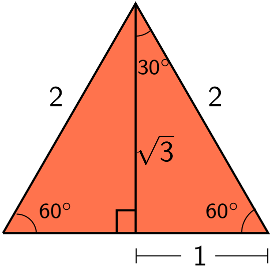
Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos.



Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos.

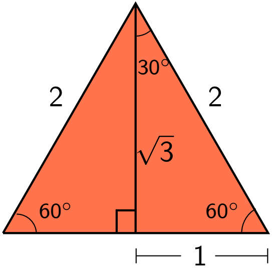


Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos agudos miden 30° y 60° y los catetos 1 y $\sqrt{3}$



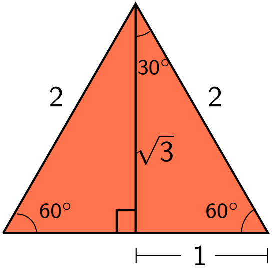
Razones trigonométricas

Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos agudos miden 30° y 60° y los catetos 1 y $\sqrt{3}$



Las razones trigonométricas son:

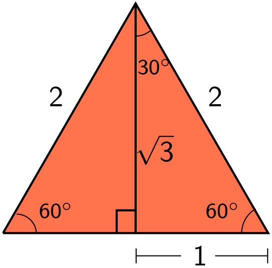
Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos agudos miden 30° y 60° y los catetos 1 y $\sqrt{3}$



Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

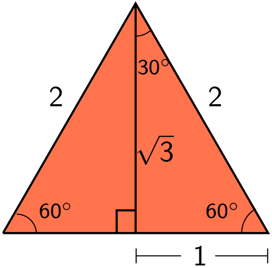
Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos agudos miden 30° y 60° y los catetos 1 y $\sqrt{3}$



Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos agudos miden 30° y 60° y los catetos 1 y $\sqrt{3}$

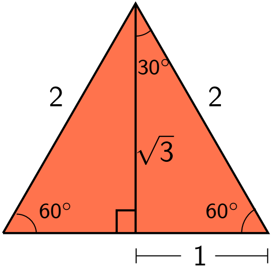


Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Razones trigonométricas

Considere el triángulo equilátero de lados de longitud 2, al trazar su altura se divide en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos agudos miden 30° y 60° y los catetos 1 y $\sqrt{3}$



Las razones trigonométricas son:

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

Ejercicio

Encuentre las demás razones trigonométricas.

En un triángulo rectángulo podemos desconocer las longitudes de algunos de sus lados o la medida de sus ángulos, resolver el triángulo es encontrar la medida de todos sus lados y todos sus ángulos.

Resolución de triángulos rectángulos

En un triángulo rectángulo podemos desconocer las longitudes de algunos de sus lados o la medida de sus ángulos, resolver el triángulo es encontrar la medida de todos sus lados y todos sus ángulos.

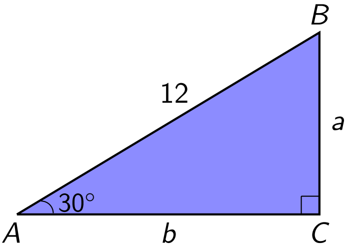
Se utiliza el teorema de Pitágoras y los valores de las "funciones" trigonométricas de ángulos de 0° a 90° que conocemos, o que pueden ser halladas usando una calculadora.

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente triángulo

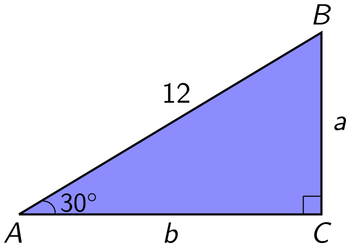
Ejemplo 1

Consideremos el siguiente triángulo



Ejemplo 1

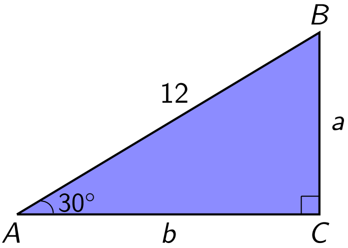
Consideremos el siguiente triángulo



Claramente $\measuredangle B$ mide 60°. Por lo tanto

Ejemplo 1

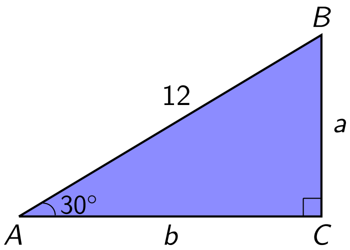
Consideremos el siguiente triángulo



Claramente $\measuredangle B$ mide 60°. Por lo tanto

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{a}{12}$,

Consideremos el siguiente triángulo

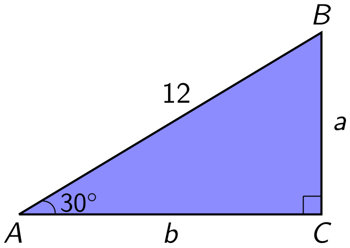


Claramente $\measuredangle B$ mide 60°. Por lo tanto

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{a}{12}$, luego

  $$a = 12 \ \operatorname{sen} 30^\circ = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

Consideremos el siguiente triángulo



Claramente $\measuredangle B$ mide $60°$. Por lo tanto

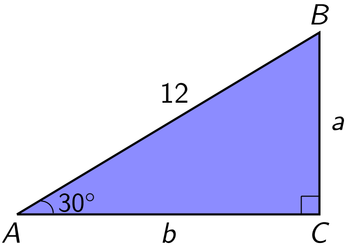
- $\operatorname{sen} 30° = \frac{a}{12}$, luego

  $$a = 12 \ \operatorname{sen} 30° = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

- $\cos 30° = \frac{b}{12}$,

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente triángulo



Claramente $\measuredangle B$ mide 60°. Por lo tanto

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{a}{12}$, luego

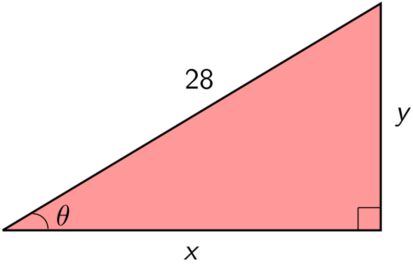
  $$a = 12\ \operatorname{sen} 30^\circ = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

- $\cos 30^\circ = \frac{b}{12}$, luego

  $$b = 12\ \cos 30^\circ = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

Ejercicio 1

Expresar x y y en términos de las razones trigonométricas de θ.



Ejercicio 2

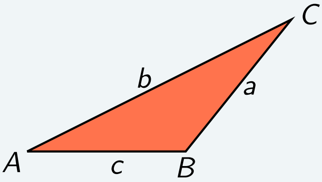
Un árbol proyecta una sombra de 6 metros cuando el sol tiene una inclinación de 60°, ¿cuál es la altura del árbol?

Una escalera de 8 metros se apoya en un edificio formando con el suelo un ángulo de 70°, ¿qué altura alcanza? ¿A qué distancia del edificio está su base?

Para resolver cualquier triángulo, no necesariamente rectángulo, contamos con los siguientes dos teoremas:

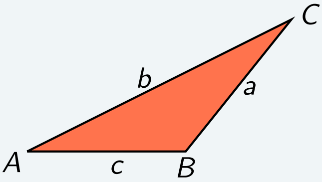
Ley del seno

En cualquier triángulo ABC con lados a, b, c



Ley del seno

En cualquier triángulo ABC con lados a, b, c

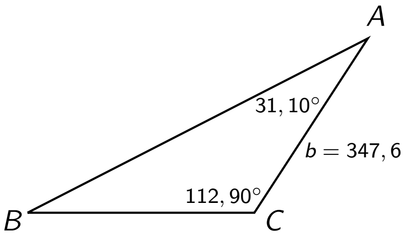


se cumple que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

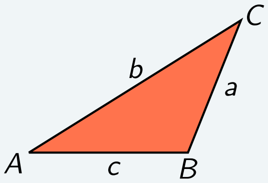
Ejercicio

En la figura se desea conocer la longitud del segmento BA. Dado que $C = 112,90^\circ$, $A = 31,10^\circ$ y $b = 347,6$ pies.



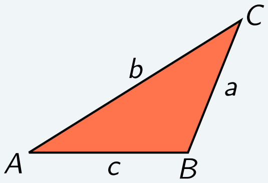
Ley de coseno

En cualquier triángulo ABC con lados a, b y c



Ley de coseno

En cualquier triángulo ABC con lados a, b y c

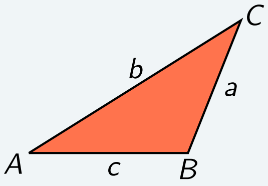


se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Ley de coseno

En cualquier triángulo ABC con lados a, b y c

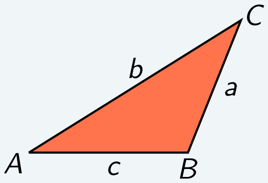


se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Ley de coseno

En cualquier triángulo ABC con lados a, b y c

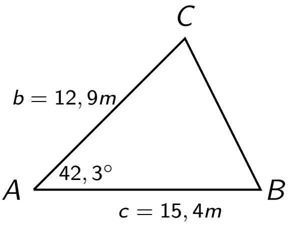


se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

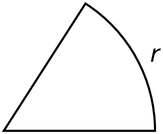
Ejercicio

Resuelva el triángulo ABC si $A = 42,3^\circ$, $b = 12,9$ metros y $c = 15,4$ metros.



Radián

Un radián es la medida de un ángulo central que subtiende un arco de longitud r en una circunferencia de radio r.



Radián

Observación

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ se tiene que

Observación

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ se tiene que

$$2\pi radianes = 360^\circ$$

Radián

Observación

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ se tiene que

$$2\pi \, radianes = 360^\circ$$

A menudo se acostumbra a omitir la palabra radianes y se escribe simplemente

Observación

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ se tiene que

$$2\pi radianes = 360^\circ$$

A menudo se acostumbra a omitir la palabra radianes y se escribe simplemente

$$2\pi = 360^\circ$$

Radián

Ejercicio

- Expresar en radianes cada uno de los siguientes ángulos 0°, 45°, 30°, 90°, 135°, 210°
- Expresar en grados cada uno de los siguientes ángulos: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$

Las funciones trigonométricas se definen usando la circunferencia unitaria

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Las funciones trigonométricas se definen usando la circunferencia unitaria

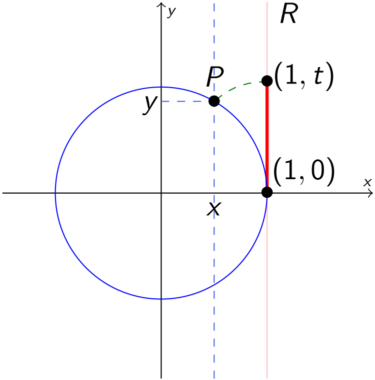
$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

y la recta

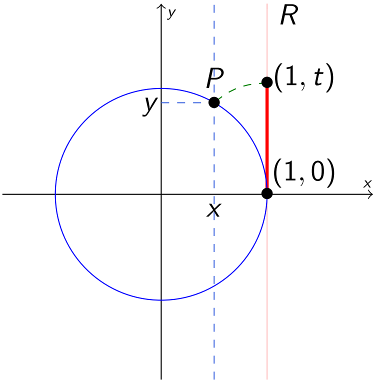
$$R = \left\{(1, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

como sigue:

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto, en la circunferencia unitaria C_1, sobre el cual cae el punto $(1, t)$ después de enrollar el segmento de recta $\overline{(1,0)(1,t)}$ sobre C_1, manteniendo fijo el punto $(1, 0)$.



Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto, en la circunferencia unitaria C_1, sobre el cual cae el punto $(1, t)$ después de enrollar el segmento de recta $\overline{(1,0)(1,t)}$ sobre C_1, manteniendo fijo el punto $(1, 0)$.



Entonces:

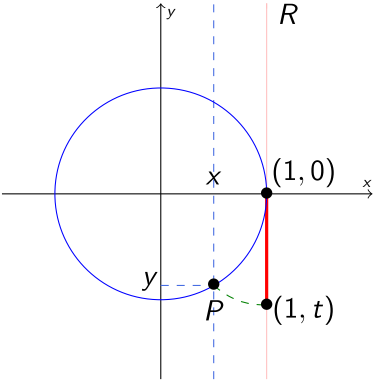
$$\cos(t) = x$$

$$\operatorname{sen}(t) = y$$

En el caso en que t sea negativo el punto $P(x, y)$ se obtiene como se ilustra en la siguiente gráfica.

Funciones Trigonométricas

En el caso en que t sea negativo el punto $P(x, y)$ se obtiene como se ilustra en la siguiente gráfica.



Podemos observar que

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1$$
$$-1 \leq \text{sen}(t) \leq 1$$

Además, tenemos la identidad fundamental

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1.$$

Además, tenemos la identidad fundamental

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1.$$

De la cual se deducen:

Además, tenemos la identidad fundamental

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1.$$

De la cual se deducen:

$$1 + \tan^2(t) = \sec^2(t).$$

Además, tenemos la identidad fundamental

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1.$$

De la cual se deducen:

$$1 + \tan^2(t) = \sec^2(t).$$

$$\cot^2(t) + 1 = \csc^2(t).$$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$
- $\operatorname{sen}(r-t) = \operatorname{sen} r \cos t - \cos r \operatorname{sen} t$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$
- $\operatorname{sen}(r-t) = \operatorname{sen} r \cos t - \cos r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r+t) = \cos r \cos t - \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$
- $\operatorname{sen}(r-t) = \operatorname{sen} r \cos t - \cos r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r+t) = \cos r \cos t - \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r-t) = \cos r \cos t + \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$
- $\operatorname{sen}(r-t) = \operatorname{sen} r \cos t - \cos r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r+t) = \cos r \cos t - \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r-t) = \cos r \cos t + \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$

De manera resumida

$$\operatorname{sen}(r \pm t) = \operatorname{sen} r \cos t \pm \cos r \operatorname{sen} t$$

$$\cos(r \pm t) = \cos r \cos t \mp \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$
- $\operatorname{sen}(r-t) = \operatorname{sen} r \cos t - \cos r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r+t) = \cos r \cos t - \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r-t) = \cos r \cos t + \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$

De manera resumida

$$\operatorname{sen}(r \pm t) = \operatorname{sen} r \cos t \pm \cos r \operatorname{sen} t$$
$$\cos(r \pm t) = \cos r \cos t \mp \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$$

Se obtienen las identidades para ángulos dobles

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$

Identidades Trigonométricas

También tenemos las fórmulas de adición y sustracción

- $\operatorname{sen}(r+t) = \operatorname{sen} r \cos t + \cos r \operatorname{sen} t$
- $\operatorname{sen}(r-t) = \operatorname{sen} r \cos t - \cos r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r+t) = \cos r \cos t - \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$
- $\cos(r-t) = \cos r \cos t + \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$

De manera resumida

$$\operatorname{sen}(r \pm t) = \operatorname{sen} r \cos t \pm \cos r \operatorname{sen} t$$
$$\cos(r \pm t) = \cos r \cos t \mp \operatorname{sen} r \operatorname{sen} t$$

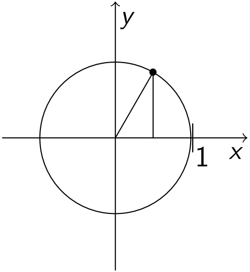
Se obtienen las identidades para ángulos dobles

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$
$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

Aún más:

Aún más:

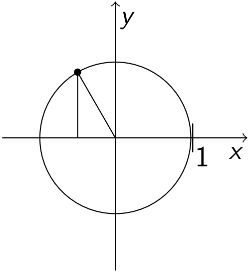
Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ entonces $\cos t > 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$.



Aún más:

Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ entonces $\cos t > 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$.

Si $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ entonces $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$

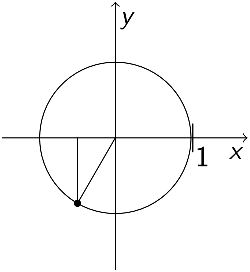


Aún más:

Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ entonces $\cos t > 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$.

Si $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ entonces $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$

Si $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ entonces $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t < 0$.



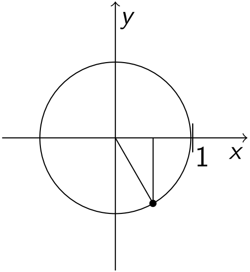
Aún más:

Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ entonces $\cos t > 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$.

Si $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ entonces $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$

Si $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ entonces $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t < 0$.

Si $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ entonces $\cos t > 0$ y $\operatorname{sen} t < 0$.



Ejercicio

Escriba el valor de sen(t) y cos(t) para $t = 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$.

Encuentre el valor de sen t y cos t para
$t = \frac{5\pi}{6};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};.\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}$.

Como además, cada vez que se da una vuelta a la circunferencia se vuelve sobre los mismos puntos, los valores de las funciones trigonométricas se repiten y tenemos:

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2\pi) \text{ y } \cos t = \cos(t + 2\pi)$$

Como además, cada vez que se da una vuelta a la circunferencia se vuelve sobre los mismos puntos, los valores de las funciones trigonométricas se repiten y tenemos:

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2\pi) \text{ y } \cos t = \cos(t + 2\pi)$$

en general:

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2k\pi) \text{ y } \cos t = \cos(t + 2k\pi) \text{ para todo } k \text{ entero.}$$

Función Periódica

Definición

Una función se dice **periódica, de período** a, si a es el menor real positivo para el que se cumple:

Función Periódica

Definición

Una función se dice **periódica, de período** a, si a es el menor real positivo para el que se cumple:

Si x está en el dominio de f entonces $x + a$ también está en el dominio de f y además $f(x) = f(x + a)$.

Función Periódica

Definición

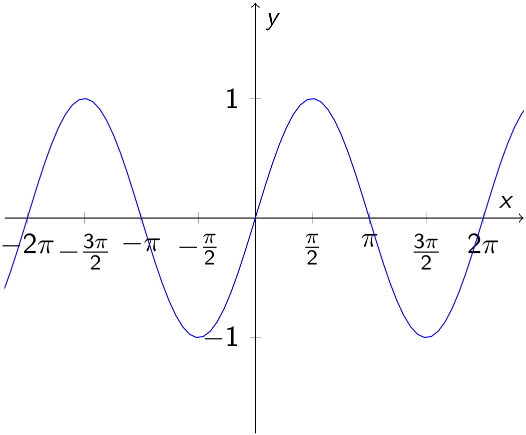
Una función se dice **periódica, de período** a, si a es el menor real positivo para el que se cumple:

Si x está en el dominio de f entonces $x + a$ también está en el dominio de f y además $f(x) = f(x + a)$.

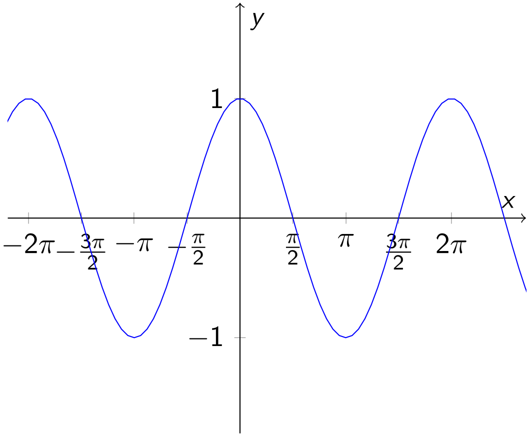
Ejemplo

Las funciones seno y coseno son funciones periódicas de período 2π.

$y = \text{sen}\, x$



$y = \text{sen}(x)$



$y = \cos(x)$

Amplitud y desplazamiento de fase

Si $y = a\,\text{sen}(bx + c)$, o $y = a\cos(bx + c)$ para números reales a, b y c diferentes de cero, entonces

Amplitud y desplazamiento de fase

Si $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c)$, o $y = a\cos(bx + c)$ para números reales a, b y c diferentes de cero, entonces

- La **amplitud** es $|a|$, el período es $\frac{2\pi}{|b|}$ y el **desplazamiento de fase** es $-\frac{c}{b}$.

Amplitud y desplazamiento de fase

Si $y = a\,\text{sen}(bx + c)$, o $y = a\cos(bx + c)$ para números reales a, b y c diferentes de cero, entonces

- La **amplitud** es $|a|$, el período es $\frac{2\pi}{|b|}$ y el **desplazamiento de fase** es $-\frac{c}{b}$.
- Se puede encontrar un intervalo que contenga exactamente un ciclo resolviendo la desigualdad

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi.$$

Ejercicio

Trace la gráfica de las siguientes funciones, encuentre dominio, rango, amplitud y desplazamiento de fase.

1. $y = \operatorname{sen} x + 2$
2. $y = 4 - \cos x$
3. $y = |\cos 4x|$
4. $y = 2\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$
5. $y = |1 - 3\operatorname{sen}(2x - \pi)|$

A partir de las funciones seno y coseno definimos las otras:

A partir de las funciones seno y coseno definimos las otras:

$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$$

A partir de las funciones seno y coseno definimos las otras:

$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$$

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$$

A partir de las funciones seno y coseno definimos las otras:

$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \qquad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$$

A partir de las funciones seno y coseno definimos las otras:

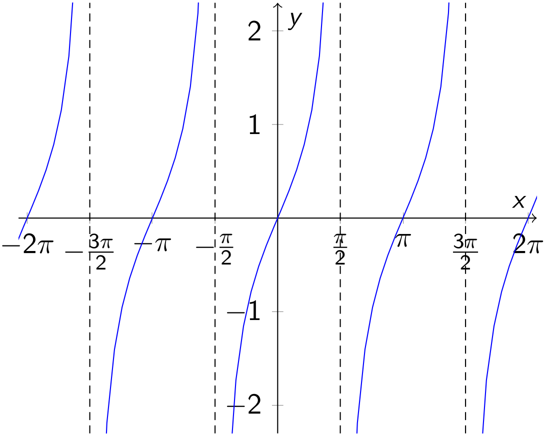
$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \qquad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} \qquad \csc(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$$

Ejercicios

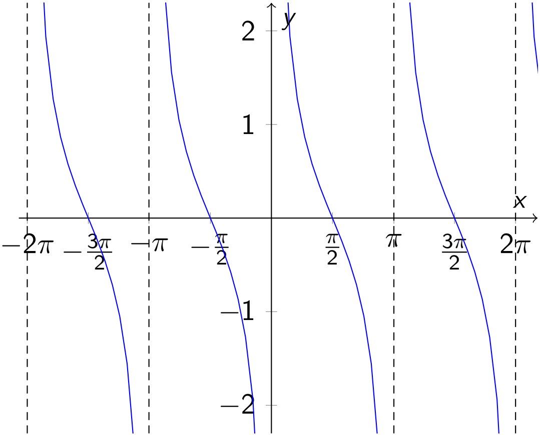
Encontrar dominio y rango de estas funciones trigonométricas.

$y = \tan x$



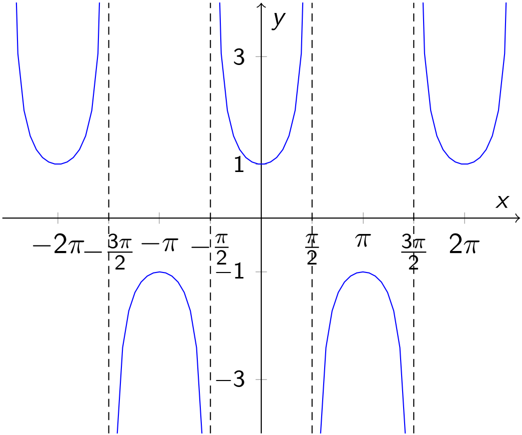
$y = \tan(x)$

$y = \cot x$



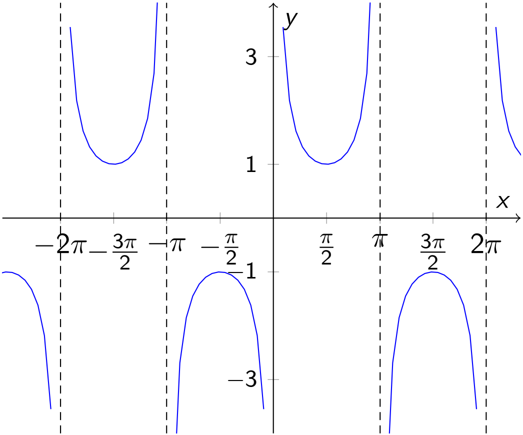
$y = \cot(x)$

$y = \sec x$



$y = \sec(x)$

$y = \csc x$



$y = \csc(x)$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$4\cos t - 2 = 0.$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$4\cos t - 2 = 0.$$

Solución

$$4\cos t = 2$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$4\cos t - 2 = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} 4\cos t &= 2 \\ \cos t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$4\cos t - 2 = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} 4\cos t &= 2 \\ \cos t &= \frac{1}{2} \\ t &= \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$4\cos t - 2 = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} 4\cos t &= 2 \\ \cos t &= \frac{1}{2} \\ t &= \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots \\ t &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{3} + 2\,\operatorname{sen}\beta = 0.$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{3} + 2\,\text{sen}\,\beta = 0.$$

Solución

$$2\,\text{sen}\,\beta = -\sqrt{3}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{3} + 2\,\mathrm{sen}\,\beta = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}\,\beta &= -\sqrt{3} \\ \mathrm{sen}\,\beta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{3} + 2\operatorname{sen}\beta = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\beta &= -\sqrt{3} \\ \operatorname{sen}\beta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \beta &= \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \dots \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{3} + 2\,\mathrm{sen}\,\beta = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}\,\beta &= -\sqrt{3} \\ \mathrm{sen}\,\beta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \beta &= \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \dots \\ \beta &= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$2 - 8\cos^2 t = 0$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$2 - 8\cos^2 t = 0$$
$$\cos^2 t = \frac{1}{4}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} 2 - 8\cos^2 t &= 0 \\ \cos^2 t &= \frac{1}{4} \\ \cos t &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ecuaciones

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} 2 - 8\cos^2 t &= 0 \\ \cos^2 t &= \frac{1}{4} \\ \cos t &= \pm\frac{1}{2} \\ t &= \frac{\pi}{3},\ t = \frac{2\pi}{3},\ t = \frac{4\pi}{3},\ t = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - \cos x &= 0 \\ \operatorname{sen} x &= \cos x \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - \cos x &= 0 \\ \operatorname{sen} x &= \cos x \\ x = \frac{\pi}{4},\ x &= \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Ecuaciones

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$$

entonces

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$$

entonces

$$\operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \vee \qquad \csc 2x - 2 = 0$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$$

entonces

$$\operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \vee \qquad \csc 2x - 2 = 0$$

i) Para $\operatorname{sen} 2x = 0$, tenemos:

Ecuaciones

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$$

entonces

$$\operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \vee \qquad \csc 2x - 2 = 0$$

i) Para $\operatorname{sen} 2x = 0$, tenemos:

$$2x = 0,\ 2x = \pi,\ 2x = 2\pi,\ 2x = 3\pi,\ 2x = 4\pi$$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0$$

entonces

$$\operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \vee \qquad \csc 2x - 2 = 0$$

i) Para $\operatorname{sen} 2x = 0$, tenemos:

$$2x = 0,\ 2x = \pi,\ 2x = 2\pi,\ 2x = 3\pi,\ 2x = 4\pi$$

Luego

$$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2},\ x = 2\pi$$

Ejemplo (Continuación)

ii) Para $\csc 2x - 2 = 0$, despejando se tendrá

Ejemplo (Continuación)

ii) Para $\csc 2x - 2 = 0$, despejando se tendrá

$$\csc 2x = 2$$

Ejemplo (Continuación)

ii) Para $\csc 2x - 2 = 0$, despejando se tendrá

$$\csc 2x = 2$$
$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

Ejemplo (Continuación)

ii) Para $\csc 2x - 2 = 0$, despejando se tendrá

$$\csc 2x = 2$$
$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$2x = \frac{\pi}{6},\ 2x = \frac{5\pi}{6},\ 2x = \frac{13\pi}{6},\ 2x = \frac{17\pi}{6}$$

Ejemplo (Continuación)

ii) Para $\csc 2x - 2 = 0$, despejando se tendrá

$$\csc 2x = 2$$
$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$2x = \frac{\pi}{6},\ 2x = \frac{5\pi}{6},\ 2x = \frac{13\pi}{6},\ 2x = \frac{17\pi}{6}$$

y así

$$x = \frac{\pi}{12},\ x = \frac{5\pi}{12},\ x = \frac{13\pi}{12},\ x = \frac{17\pi}{12}$$

Ejemplo (Continuación)

Tenemos

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0 \ , \text{ es decir}$$

Ejemplo (Continuación)

Tenemos

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0 \text{ , es decir}$$

$$\operatorname{sen} 2x \left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - 2 \right) = 0$$

Ejemplo (Continuación)

Tenemos

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0 \text{ , es decir}$$

$$\operatorname{sen} 2x\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - 2\right) = 0$$

Hemos obtenido

i) $\operatorname{sen} 2x = 0$

$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2},$
$x = 2\pi$

Ejemplo (Continuación)

Tenemos

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0 \text{ , es decir}$$

$$\operatorname{sen} 2x \left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - 2 \right) = 0$$

Hemos obtenido

i) $\operatorname{sen} 2x = 0$

$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2},$
$x = 2\pi$

Pero estas soluciones no satisfacen la ecuación original.

Ejemplo (Continuación)

Tenemos

$$\operatorname{sen} 2x(\csc 2x - 2) = 0 \text{ , es decir}$$

$$\operatorname{sen} 2x \left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - 2 \right) = 0$$

Hemos obtenido

i) $\operatorname{sen} 2x = 0$

$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2},$
$x = 2\pi$

Pero estas soluciones no satisfacen la ecuación original.

ii) $(\csc 2x - 2) = 0$

$x = \frac{\pi}{12},\ x = \frac{5\pi}{12},\ x = \frac{13\pi}{12},$

$x = \frac{17\pi}{12}$

Ejemplo (Continuación)

Luego las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{\pi}{12}, \; x = \frac{5\pi}{12}, \; x = \frac{13\pi}{12}, \; x = \frac{17\pi}{12}$$