MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autoras: Margarita Ospina Pulido
Jeanneth Galeano Peñaloza
Edición: Rafael Ballestas Rojano

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Funciones

Funciones

Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Por ejemplo:

1. La función del conjunto de las palabras en el conjunto de las letras, que a cada palabra le asigna su letra inicial.

Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Por ejemplo:

1. La función del conjunto de las palabras en el conjunto de las letras, que a cada palabra le asigna su letra inicial.
2. La función del conjunto de ciudadanos de un país en el de las huellas digitales, que a cada ciudadano le asigna la huella digital de su índice derecho.

Funciones

Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Por ejemplo:

1. La función del conjunto de las palabras en el conjunto de las letras, que a cada palabra le asigna su letra inicial.
2. La función del conjunto de ciudadanos de un país en el de las huellas digitales, que a cada ciudadano le asigna la huella digital de su índice derecho.
3. La función del conjunto de los reales en sí mismo, que a cada real le asigna su cuadrado.

De una manera más formal tenemos:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función f de A en B, notada:

$$f : A \longrightarrow B$$

es un subconjunto de $A \times B$ (una relación de A en B) que cumple:

De una manera más formal tenemos:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función f de A en B, notada:

$$f : A \longrightarrow B$$

es un subconjunto de $A \times B$ (una relación de A en B) que cumple:

Para todo elemento $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que la pareja $(a, b) \in f$.

De una manera más formal tenemos:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función f de A en B, notada:

$$f : A \longrightarrow B$$

es un subconjunto de $A \times B$ (una relación de A en B) que cumple:

Para todo elemento $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que la pareja $(a, b) \in f$.

Como es único el elemento b relacionado con a, escribimos

$$f(a) = b.$$

Funciones

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función,

- A se llama el Dominio de f.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función,

- A se llama el Dominio de f.
- B se llama el Codominio de f.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función,

- A se llama el Dominio de f.
- B se llama el Codominio de f.
- $\{b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$ se llama el Rango de f o el Recorrido de f o la Imagen de f.

Ejemplos

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$
  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, Imagen de $f = \mathbb{R}$.

Ejemplos

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$
  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, Imagen de $f = \mathbb{R}$.

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$
  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, Imagen de $g = [0, \infty)$.

Igualdad de funciones

- Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento x del dominio $f(x) = g(x)$.

Igualdad de funciones

- Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento x del dominio $f(x) = g(x)$.
- En este curso trabajaremos únicamente **funciones reales**, es decir, funciones de dominio y codominio $\mathbb{R}$ o subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Igualdad de funciones

- Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento x del dominio $f(x) = g(x)$.
- En este curso trabajaremos únicamente **funciones reales**, es decir, funciones de dominio y codominio $\mathbb{R}$ o subconjuntos de $\mathbb{R}$.
- En este caso se acostumbra simplemente a identificar la función con la expresión que define su efecto sobre la variable, suponiendo que el dominio es, el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ en el que se puede definir la función y el codominio es $\mathbb{R}$.

Ejemplos

- Si $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Ejemplos

- Si $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

- Si $g(x) = \sqrt{2-5x}$, entonces $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, \frac{2}{5}]$.

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 8x + 7}$.

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 8x + 7}$.

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 8x + 7}$.

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$(x-1)(x-7) = 0$$

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 8x + 7}$.

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$(x-1)(x-7) = 0$$

Dominio de f: $\mathbb{R} - \{1, 7\}$.

Dominio

Ejemplo

Para hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$, resolvemos la desigualdad

Dominio

Ejemplo

Para hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$, resolvemos la desigualdad

$$2x + 6 \geq 0$$

Ejemplo

Para hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$, resolvemos la desigualdad

$$\begin{aligned} 2x + 6 &\geq 0 \\ 2x &\geq -6 \end{aligned}$$

Dominio

Ejemplo

Para hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$, resolvemos la desigualdad

$$\begin{aligned} 2x + 6 &\geq 0 \\ 2x &\geq -6 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Dominio

Ejemplo

Para hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$, resolvemos la desigualdad

$$\begin{aligned} 2x+6 &\geq 0 \\ 2x &\geq -6 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Dominio de f: $[-3, \infty)$.

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$3 - 2x > 0$$

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$\begin{aligned} 3-2x &> 0 \\ -2x &> -3 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$\begin{aligned} 3 - 2x &> 0 \\ -2x &> -3 \\ x &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$
\begin{aligned}
3 - 2x &> 0 \\
-2x &> -3 \\
x &< \frac{3}{2} \\
S &= \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \; {\color{red}*}
\end{aligned}
$$

Dominio

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$\begin{aligned} 3 - 2x &> 0 \\ -2x &> -3 \\ x &< \frac{3}{2} \\ S &= \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) * \end{aligned}$$

$*$ ¿Por qué el intervalo es abierto en $\frac{3}{2}$?

Ejemplo (Cont.)

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Además, el denominador se hace cero cuando $x = -5$

Ejemplo (Cont.)

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1-7x}{(x+5)\sqrt{3-2x}}$.

Además, el denominador se hace cero cuando $x = -5$, así que el dominio de f es

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) - \{-5\} = (-\infty, -5) \cup \left(-5, \frac{3}{2}\right).$$

Gráficas de funciones

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}\,.$$

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}\,.$$

- Si $f(x) = 2x - 1$, su gráfica es la recta $y = 2x - 1$.

Gráficas de funciones

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

- Si $f(x) = 2x - 1$, su gráfica es la recta $y = 2x - 1$.
- Si $g(x) = x^2 - 2x + 1$, su gráfica es la parábola $y = x^2 - 2x + 1$.

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

- Si $f(x) = 2x - 1$, su gráfica es la recta $y = 2x - 1$.
- Si $g(x) = x^2 - 2x + 1$, su gráfica es la parábola $y = x^2 - 2x + 1$.

Nótese que una gráfica en el plano cartesiano representa una función real, si toda recta vertical corta la gráfica en a lo sumo un punto.

Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío A definimos

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

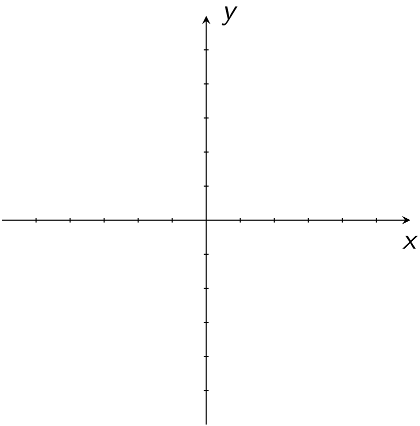
Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío A definimos

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

En particular, la función idéntica de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$



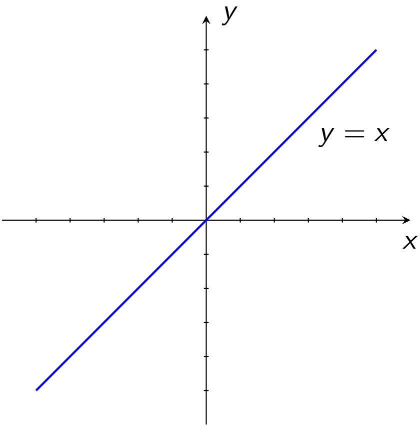
Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío A definimos

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

En particular, la función idéntica de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$



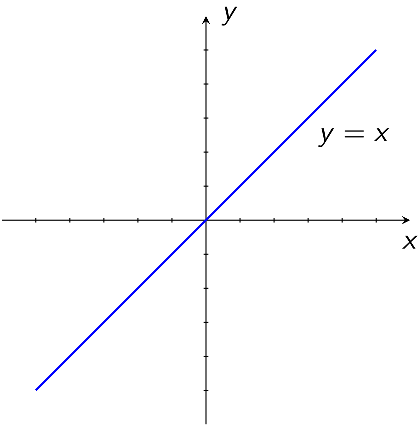
Dado cualquier conjunto no vacío A definimos

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

En particular, la función idéntica de $\mathbb{R}$

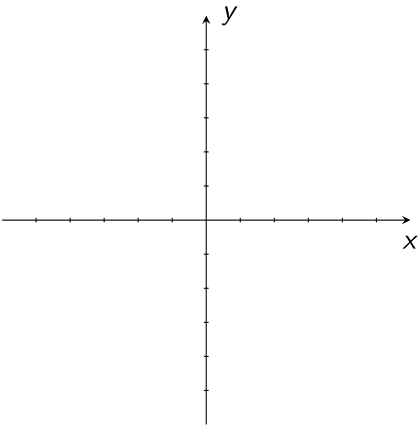
$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(I_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(I_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

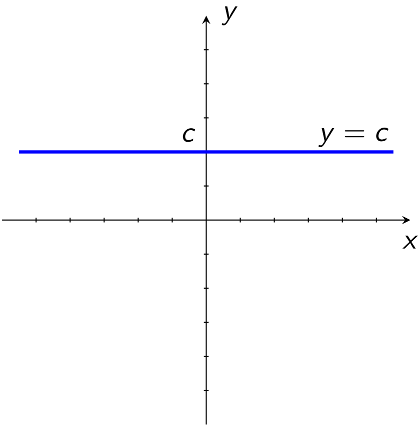
donde c es una constante.



Función constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto c$$

donde c es una constante.

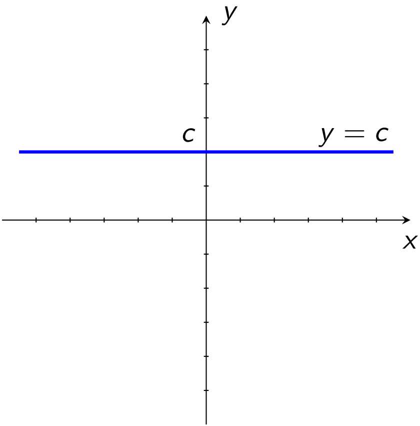


Función constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto c$$

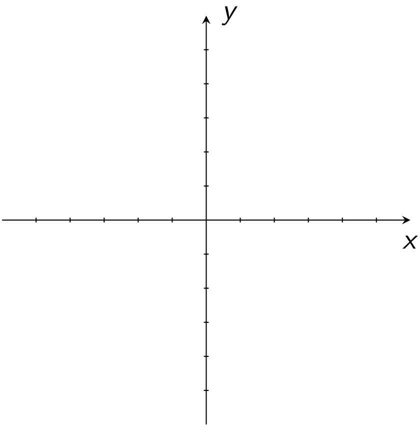
donde c es una constante.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = \{c\}$



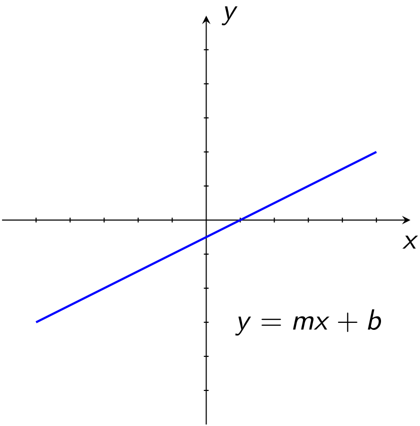
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto mx + b \end{aligned}$$

donde m y b son constantes.



$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto mx + b
\end{aligned}
$$

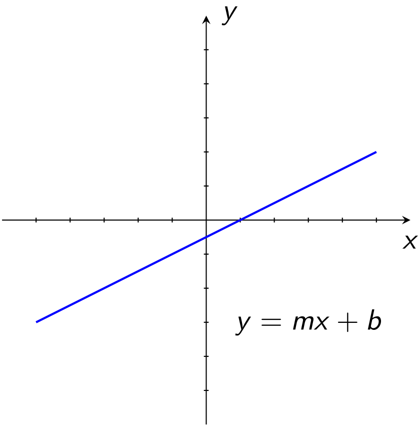
donde m y b son constantes.



$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto mx + b
\end{aligned}
$$

donde m y b son constantes.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, si $m \neq 0$



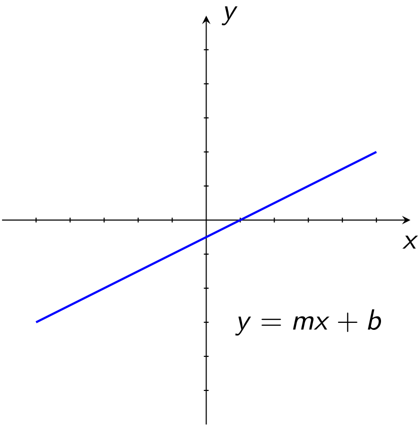
Función lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto mx + b \end{aligned}$$

donde m y b son constantes.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, si $m \neq 0$

¿Qué pasa si $m = 0$?
¿Cómo es la gráfica de f en este caso?



Función cuadrática

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

donde a, b y c son constantes
y $a \neq 0$.

Función cuadrática

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

donde a, b y c son constantes
y $a \neq 0$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = ?$

Función cuadrática

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

donde a, b y c son constantes
y $a \neq 0$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = ?$

¿Cómo es la gráfica de f?

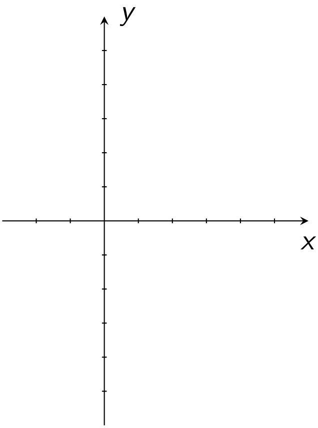
Función cuadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = ?$

¿Cómo es la gráfica de f?



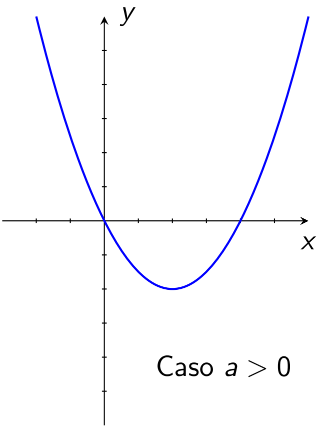
Función cuadrática

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) =?$

¿Cómo es la gráfica de f?



Función valor absoluto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

Función valor absoluto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) =$

Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\text{Im}(f) =$

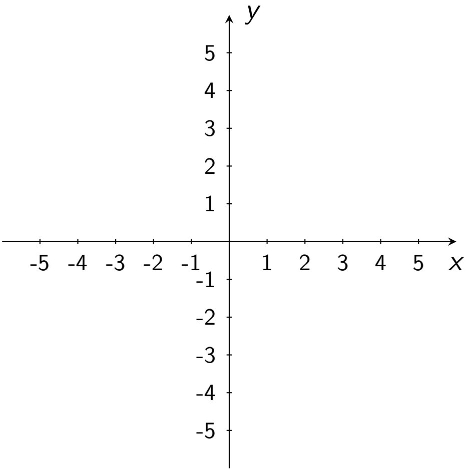
¿Cómo es la gráfica de f?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\text{Im}(f) =$

¿Cómo es la gráfica de f?



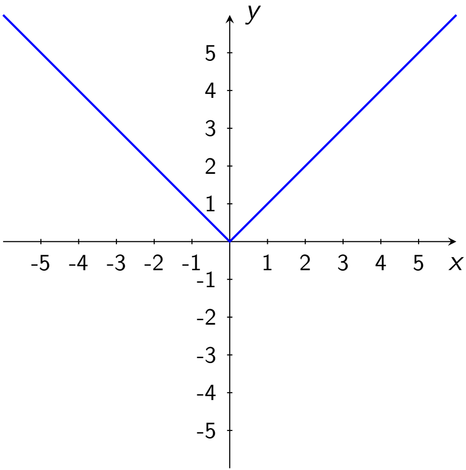
Función valor absoluto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) =$

¿Cómo es la gráfica de f?



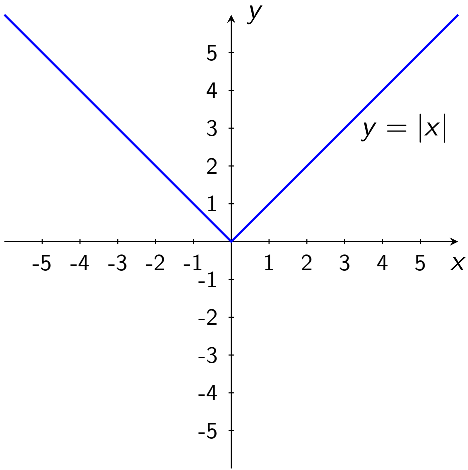
Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) =$

¿Cómo es la gráfica de f?

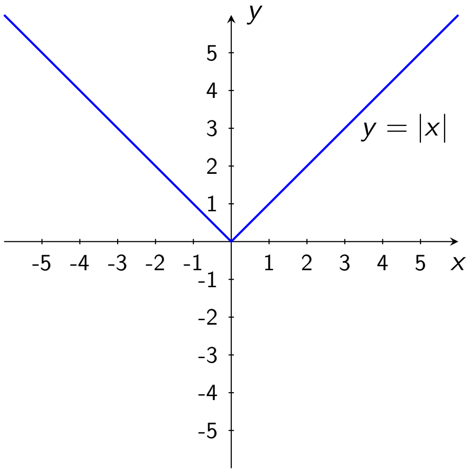


$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$

¿Cómo es la gráfica de f?



Función parte entera

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Función parte entera

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto [x]
\end{aligned}
$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto [x]
\end{aligned}
$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Por ejemplo

$$[\pi] = 3 \qquad\qquad [8.\overline{27}] = 8$$

Función parte entera

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Por ejemplo

$$[\pi] = 3 \qquad [8.\overline{27}] = 8 \qquad [12] = 12$$

Función parte entera

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Por ejemplo

$$[\pi] = 3 \qquad [8.\overline{27}] = 8 \qquad [12] = 12$$

$$[-2] = -2$$

Función parte entera

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto [x]$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Por ejemplo

$$[\pi] = 3 \qquad [8.\overline{27}] = 8 \qquad [12] = 12$$
$$[-2] = -2 \qquad [-1{,}5] = -2$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.

Por ejemplo

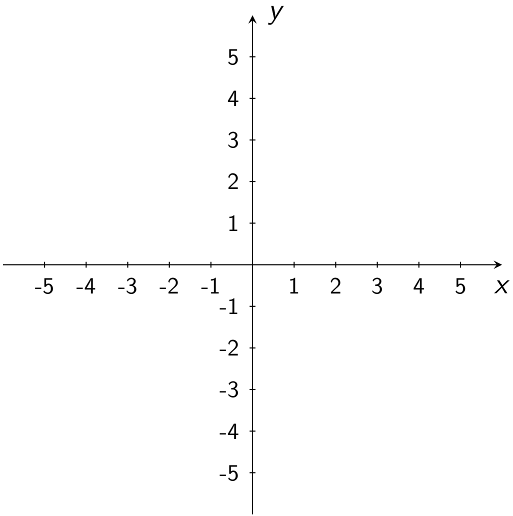
$$[\pi] = 3 \qquad [8.\overline{27}] = 8 \qquad [12] = 12$$

$$[-2] = -2 \qquad [-1{,}5] = -2 \qquad [-\pi] = -4$$

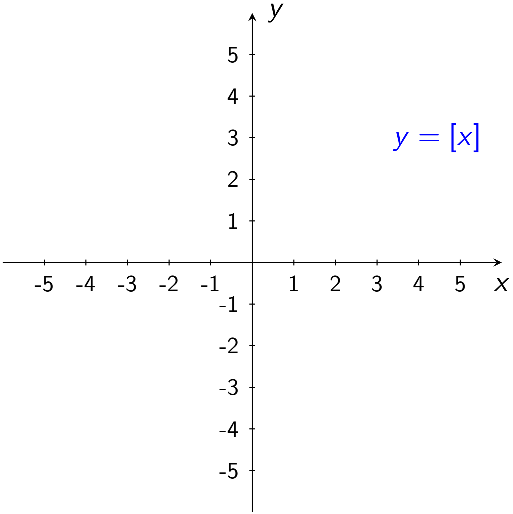
Ejercicio

Haga la gráfica de $y = [x]$ y encuentre su imagen.

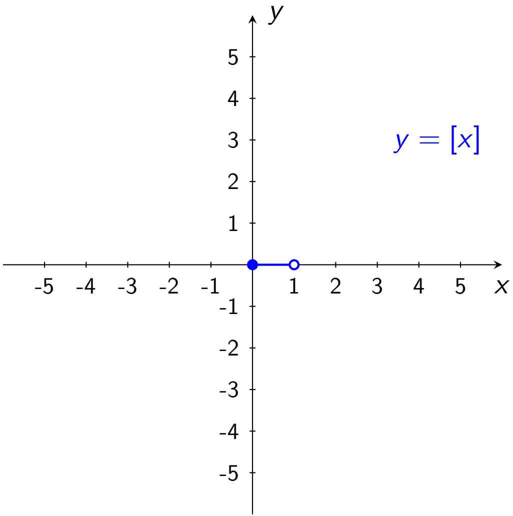
Función parte entera $f(x) = [x]$



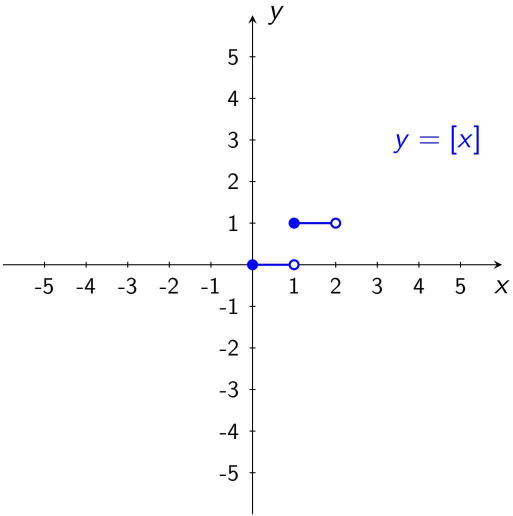
Función parte entera $f(x) = [x]$



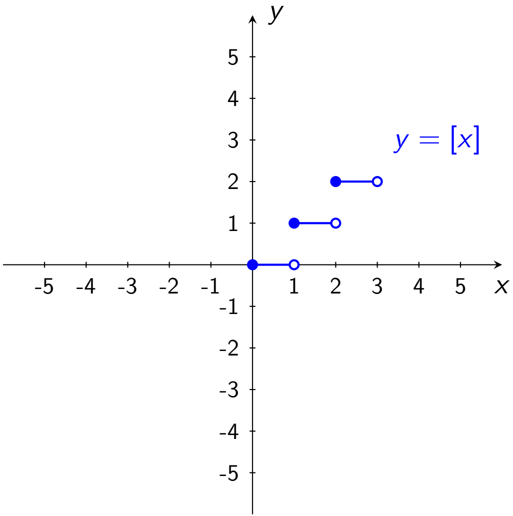
Función parte entera $f(x) = [x]$



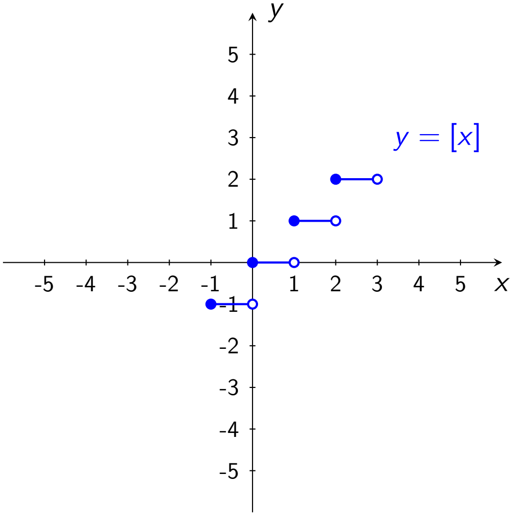
Función parte entera $f(x) = [x]$



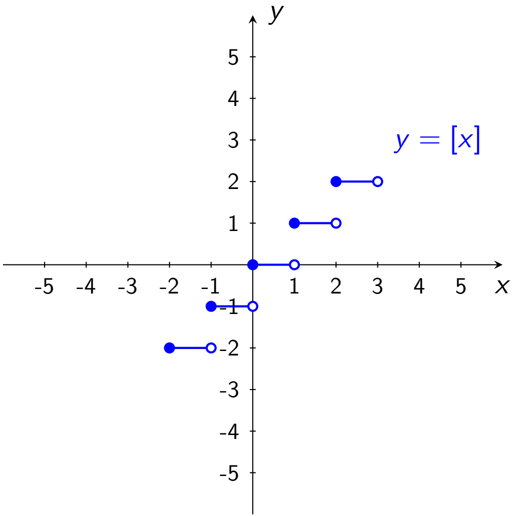
Función parte entera $f(x) = [x]$



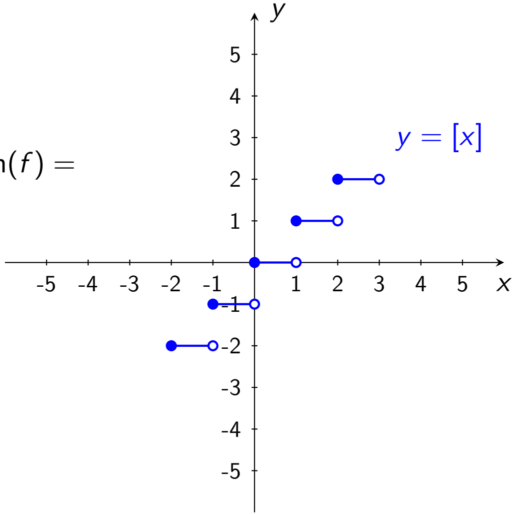
Función parte entera $f(x) = [x]$



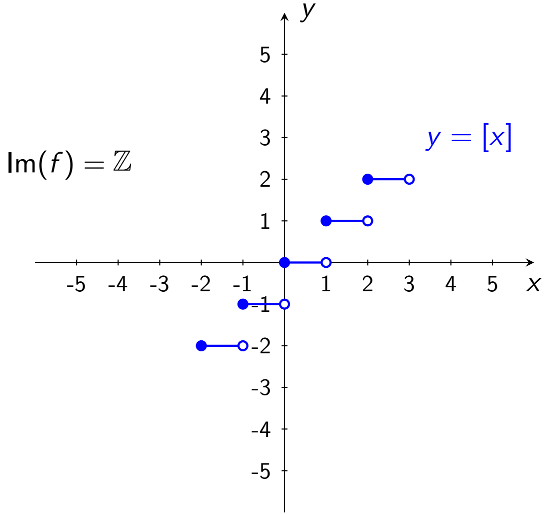
Función parte entera $f(x) = [x]$



$\mathrm{Im}(f) =$



Función parte entera $f(x) = [x]$



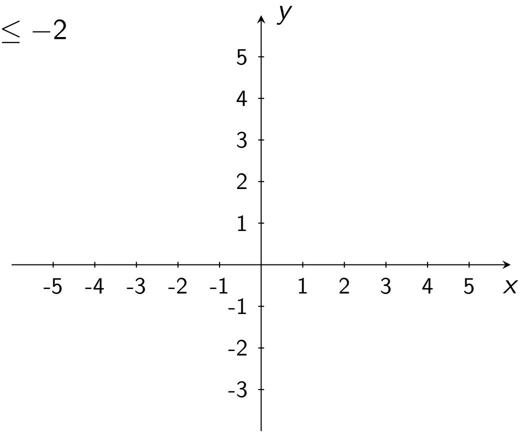
Consideremos la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x+1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

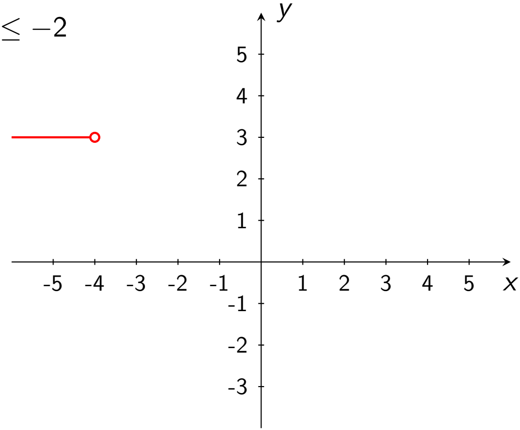
Veamos su gráfica.

Funciones definidas a trozos

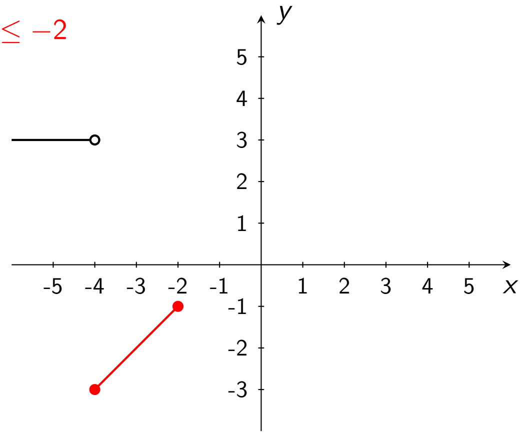
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x+1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x+1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

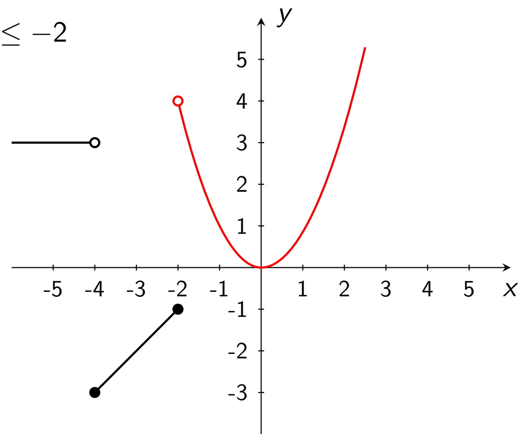


$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x+1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$



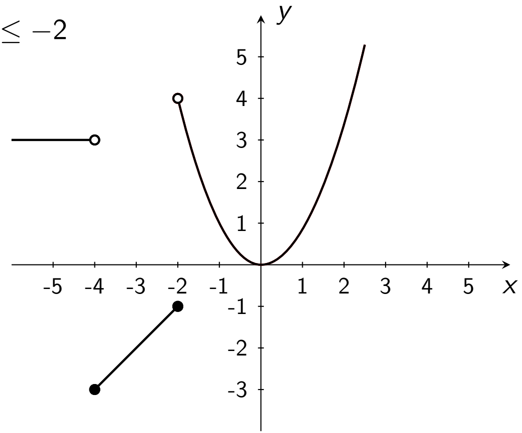
Funciones definidas a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x+1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ {\color{red}x^2} & {\color{red}\text{si } x > -2.} \end{cases}$$



Funciones definidas a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x+1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

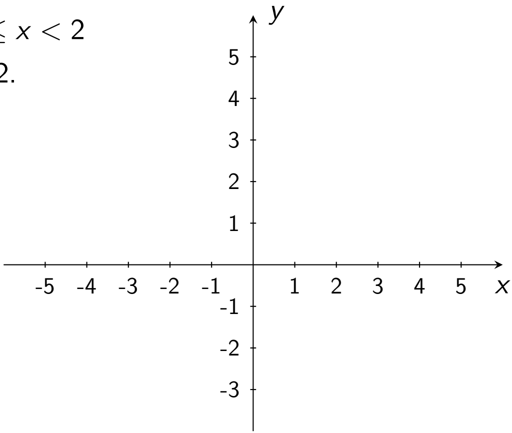


Consideremos la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

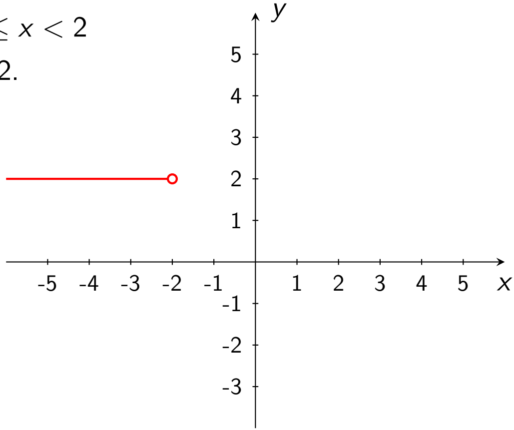
Veamos su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

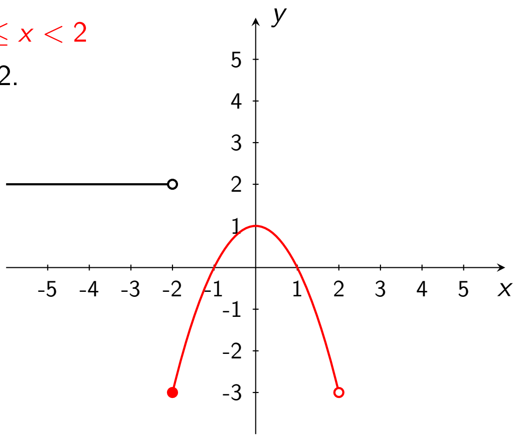


Funciones definidas a trozos

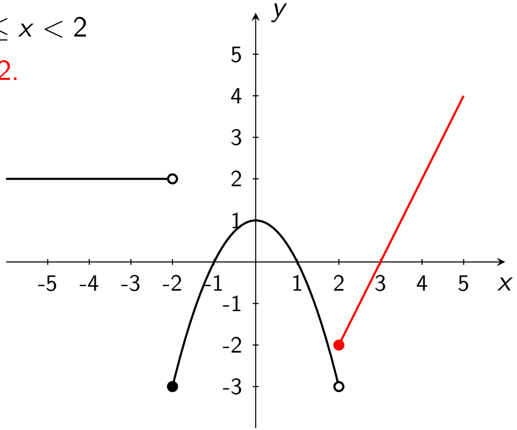
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$



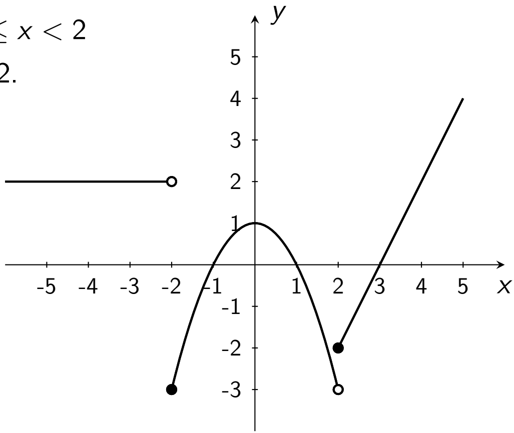
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$



Ejercicio

Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones:

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -1 \\ |x| + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Parte II

Propiedades de funciones

Funciones pares

Definición

Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

Funciones pares

Definición

Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

1. Si f es par, la expresión $y = f(x)$ no cambia si se sustituye x por $-x$.

Funciones pares

Definición

Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

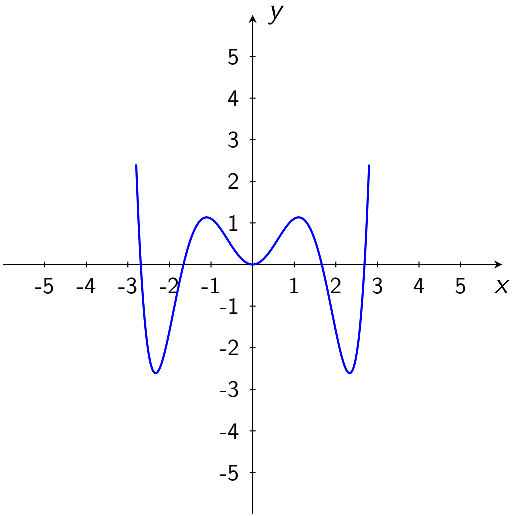
1. Si f es par, la expresión $y = f(x)$ no cambia si se sustituye x por $-x$.
2. $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^2$ son ejemplos de funciones pares.

Definición

Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

1. Si f es par, la expresión $y = f(x)$ no cambia si se sustituye x por $-x$.
2. $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^2$ son ejemplos de funciones pares.
3. La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

Funciones pares



Funciones impares

Definición

Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.

Funciones impares

Definición

Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.

1. $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$ son ejemplos de funciones impares.

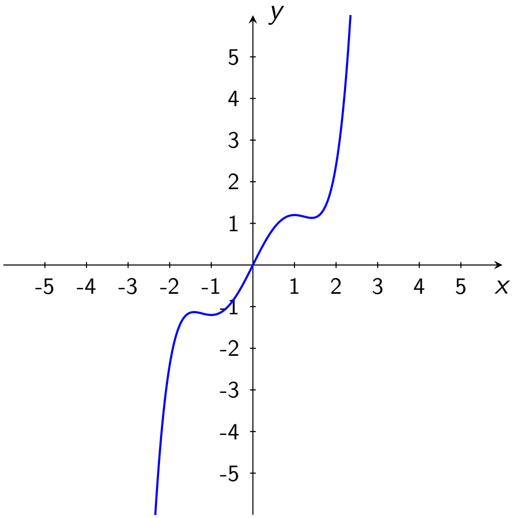
Funciones impares

Definición

Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.

1. $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$ son ejemplos de funciones impares.
2. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Funciones impares



Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$f(-x)$$

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$f(-x) = 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8$$

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \end{aligned}$$

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$ es impar, pues

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$ es impar, pues

$$f(-x)$$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$ es impar, pues

$$f(-x) = 12(-x)^5 - 6(-x)^3 - 3(-x)$$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$ es impar, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 12(-x)^5 - 6(-x)^3 - 3(-x) \\ &= -12x^5 + 6x^3 + 3x \end{aligned}$$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$ es par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$ es impar, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 12(-x)^5 - 6(-x)^3 - 3(-x) \\ &= -12x^5 + 6x^3 + 3x \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$ no es par ni impar, pues

Funciones pares e impares

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$ no es par ni impar, pues

$$f(-x)$$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$ no es par ni impar, pues

$$f(-x) = 3(-x)^7 + 9(-x)^5 - 3(-x)^8$$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$ no es par ni impar, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^7 + 9(-x)^5 - 3(-x)^8 \\ &= -3x^7 - 9x^5 - 3x^8 \end{aligned}$$

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$ no es par ni impar, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^7 + 9(-x)^5 - 3(-x)^8 \\ &= -3x^7 - 9x^5 - 3x^8 \\ &= -(3x^7 + 9x^5 + 3x^8) \end{aligned}$$

Ejercicio

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

Ejercicio

Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 2x^7 + 3x^5 - 6x^6 + 1$
- $f(x) = 8x^6 + 3x^4 - x + 4$
- $f(x) = 2\sqrt{x} + 4$
- $f(x) = (x-1)^2 + x^4$
- $f(x) = 3 - (x+2)^3$

Funciones inyectivas y sobreyectivas

Definición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función,

Definición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función,

- f se dice inyectiva o uno a uno si se cumple que

$$f(a) = f(b) \text{ implica que } a = b.$$

Definición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función,

- f se dice inyectiva o uno a uno si se cumple que

$$f(a) = f(b) \text{ implica que } a = b.$$

- f se dice sobreyectiva o sobre si su rango es todo el conjunto B.

Definición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función,

- f se dice inyectiva o uno a uno si se cumple que

$$f(a) = f(b) \text{ implica que } a = b.$$

- f se dice sobreyectiva o sobre si su rango es todo el conjunto B.
- f se dice biyectiva si es uno a uno y sobre.

Funciones inyectivas y sobreyectivas

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

Funciones inyectivas y sobreyectivas

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$ no es uno a uno y no es sobre.

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$ no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$ no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$ es uno a uno y sobre.

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$ no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$ es uno a uno y sobre.
- $f_5(x) = |x|$

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$ no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$ es uno a uno y sobre.
- $f_5(x) = |x|$ no es uno a uno ni sobre.

Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$ no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$ es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$ no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$ es uno a uno y sobre.
- $f_5(x) = |x|$ no es uno a uno ni sobre.

¿Cómo determinar por medio de la gráfica si una función es uno a uno?

Prueba de la recta horizontal

- Una función f es uno a uno si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de f máximo en un punto.

Prueba de la recta horizontal

- Una función f es uno a uno si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de f máximo en un punto.
- Una función de codominio $\mathbb{R}$ es sobreyectiva si toda recta horizontal corta su gráfica.

Parte III

Operaciones entre funciones

Operaciones entre funciones

Definición

Sean f y g dos funciones. Definimos

Definición

Sean f y g dos funciones. Definimos

Suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Operaciones entre funciones

Definición

Sean f y g dos funciones. Definimos

$$\begin{aligned} \text{Suma} \quad & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \text{Diferencia} \quad & (f-g)(x) = f(x) - g(x) \end{aligned}$$

Definición

Sean f y g dos funciones. Definimos

$$
\begin{aligned}
\text{Suma} \quad & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
\text{Diferencia} \quad & (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\
\text{Producto} \quad & (fg)(x) = f(x)g(x)
\end{aligned}
$$

Operaciones entre funciones

Definición

Sean f y g dos funciones. Definimos

Suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Cociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Entonces

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Entonces

- $(f+g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f-g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$
- $(fg)(x) = (2x+1)(3x^2-4) = 6x^3 + 3x^2 - 8x - 4$

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$
- $(fg)(x) = (2x + 1)(3x^2 - 4) = 6x^3 + 3x^2 - 8x - 4$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x + 1}{3x^2 - 4}$

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$
- $(fg)(x) = (2x + 1)(3x^2 - 4) = 6x^3 + 3x^2 - 8x - 4$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x + 1}{3x^2 - 4}$

¿Cuál es el dominio de estas funciones?

Operaciones entre funciones

El dominio de $f+g$, $f-g$, fg es la intersección I de los dominios de f y de g, mientras que el dominio de $\frac{f}{g}$ está formado por los puntos x de I tales que $g(x) \neq 0$.

El dominio de $f+g$, $f-g$, fg es la intersección I de los dominios de f y de g, mientras que el dominio de $\frac{f}{g}$ está formado por los puntos x de I tales que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$.
Hallar una expresión para las siguientes funciones y sus dominios,

$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad \frac{g}{f}, \quad \frac{g}{f+g}.$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x} \qquad \text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x} \qquad \text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f-g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4-x}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f-g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(f-g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x} \qquad \text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f-g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4-x} \qquad \text{Dom}(f-g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(fg)(x) = (5x+3)\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f-g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(f-g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (5x+3)\left(\frac{x}{4-x}\right)\\ &= \frac{5x^2+3x}{4-x}\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$(f+g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f-g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(f-g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(fg)(x) = (5x+3)\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

$$= \frac{5x^2+3x}{4-x} \qquad \mathrm{Dom}(fg) = \mathbb{R} - \{4\}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{(5x+3)(4-x)}{x}\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\
&= \frac{(5x+3)(4-x)}{x} \\
&= \frac{20x - 5x^2 + 12 - 3x}{x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\
&= \frac{(5x+3)(4-x)}{x} \\
&= \frac{20x - 5x^2 + 12 - 3x}{x} \\
&= \frac{-5x^2 + 17x + 12}{x}
\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\
&= \frac{(5x+3)(4-x)}{x} \\
&= \frac{20x - 5x^2 + 12 - 3x}{x} \\
&= \frac{-5x^2 + 17x + 12}{x} \\
\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) &= \mathbb{R} - \{0, 4\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3}\\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)}\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x}{20x - 5x^2 + 12 - 3x}\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\
&= \frac{x}{(5x+3)(4-x)} \\
&= \frac{x}{20x - 5x^2 + 12 - 3x} \\
&= \frac{x}{-5x^2 + 17x + 12}
\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x}{20x - 5x^2 + 12 - 3x} \\ &= \frac{x}{-5x^2 + 17x + 12}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = \mathbb{R} - \{4, -\frac{3}{5}\}.$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$.

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4 - x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) = \frac{\frac{x}{4-x}}{5x + 3 + \frac{x}{4-x}}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x + 3 + \frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}}\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) = \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} = \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}} = \frac{x}{-5x^2+17x+12+x}$$

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} \\
&= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}} \\
&= \frac{x}{-5x^2+17x+12+x} \\
&= \frac{x}{-5x^2+18x+12}
\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Sean $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$. Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Dom$(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} \\
&= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}} \\
&= \frac{x}{-5x^2+17x+12+x} \\
&= \frac{x}{-5x^2+18x+12}
\end{aligned}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f+g}\right) = \mathbb{R} - \{4, \frac{9 \pm \sqrt{141}}{5}\}.$$

Composición de funciones

Si f y g son funciones se define

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Composición de funciones

Si f y g son funciones se define

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

De esta manera $g \circ f$ es una función cuyo dominio es

$$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}.$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$(g \circ f)(x)$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 3)$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1\\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1\\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x)$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1)$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1\\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1\\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1)\\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3\\ &= 2x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\
&= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\
&= 4x^2 + 8x + 4
\end{aligned}
$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\
&= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\
&= 2x^2 - 4x + 5
\end{aligned}
$$

De nuevo $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 \\
&= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\
&= 4x^2 + 8x + 4
\end{aligned}$$

En este caso $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\
&= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\
&= 2x^2 - 4x + 5
\end{aligned}$$

De nuevo $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$.
Nótese que en general $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$(g \circ f)(x)$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 3)$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) \\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) \\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\}$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) \\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty)$.

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3)\\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty)$.

$$(f \circ g)(x)$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(2x+3) \\ &= \sqrt{2x+3} \end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3)\\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$$

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3)\\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty)$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(\sqrt{x})\\ &= 2\sqrt{x} + 3\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3)\\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty).$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x})\\ &= 2\sqrt{x} + 3\end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x+3) \\ &= \sqrt{2x+3}\end{aligned}$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty).$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} + 3\end{aligned}$$

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty).$

Ejercicio

Si

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{1-x},$$

defina $(f \circ g)$ y encuentre su dominio. ¡CUIDADO!