MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autora: Margarita Ospina Pulido
Edición: Jeanneth Galeano Peñaloza
Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\ &= xx+xy+yx+yy\end{aligned}$$

Potencias de un binomio

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\ &= xx+xy+yx+yy\\ &= x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

Potencias de un binomio

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

Potencias de un binomio

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

Cada sumando se obtiene al hacer el producto de un elemento de cada factor. En nuestro caso:

$$(x+y)^3 = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

Cada sumando se obtiene al hacer el producto de un elemento de cada factor. En nuestro caso:

$$(x+y)^3 = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

Agrupando términos semejantes tenemos:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Potencias de un binomio

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\\
&= (x+y)(x+y)^3
\end{aligned}
$$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) \\
&= (x+y)(x+y)^3 \\
&= xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx
\end{aligned}
$$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) \\
&= (x+y)(x+y)^3 \\
&= xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx \\
&\quad + xyyy + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy
\end{aligned}
$$

Potencias de un binomio

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) \\
&= (x+y)(x+y)^3 \\
&= xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx \\
&\quad + xyyy + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy \\
&\quad + yyyx + yyyy
\end{aligned}
$$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) \\
&= (x+y)(x+y)^3 \\
&= xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx \\
&\quad + xyyy + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy \\
&\quad + yyyx + yyyy
\end{aligned}
$$

Note que a cada uno de los sumandos de la potencia anterior lo precedemos de una x en el primer renglón y de una y en el segundo.

Potencias de un binomio

Agrupando términos semejantes:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Potencias de un binomio

La forma en que hemos hecho los anteriores productos nos lleva a dos conclusiones:

1. Podemos encontrar una potencia fija del binomio de una manera sencilla si conocemos la anterior como lo hicimos en el caso de 3 a 4.
   Aún más:
   Se conoce una forma de encontrar los coeficientes de $(x+y)^n$

Triángulo de Pascal

Veamos cómo se construye:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Triángulo de Pascal

Veamos cómo se construye:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Triángulo de Pascal

Veamos cómo se construye:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Veamos cómo se construye:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Veamos cómo se construye:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Triángulo de Pascal

Esta forma tiene un defecto: para encontrar los coeficientes de $(x+y)^{25}$ tenemos que construir los 24 renglones anteriores.

Triángulo de Pascal

Esta forma tiene un defecto: para encontrar los coeficientes de $(x+y)^{25}$ tenemos que construir los 24 renglones anteriores.

Busquemos otras alternativas.

Potencias de un binomio

2. Si no conocemos la expresión de la anterior potencia podemos proceder como lo hicimos en la potencia 3 donde ignoramos la potencia 2.

Potencias de un binomio

2. Si no conocemos la expresión de la anterior potencia podemos proceder como lo hicimos en la potencia 3 donde ignoramos la potencia 2. En este último caso la clave está en dos observaciones:
   (a) Cada sumando se obtiene multiplicando un elemento x o y de cada uno de los factores.

Potencias de un binomio

2. Si no conocemos la expresión de la anterior potencia podemos proceder como lo hicimos en la potencia 3 donde ignoramos la potencia 2. En este último caso la clave está en dos observaciones:
   (a) Cada sumando se obtiene multiplicando un elemento x o y de cada uno de los factores. Así, en cada sumando, las suma de las potencias de x mas las de y debe ser siempre n si estamos encontrando $(x+y)^n$.

Potencias de un binomio

2. Si no conocemos la expresión de la anterior potencia podemos proceder como lo hicimos en la potencia 3 donde ignoramos la potencia 2. En este último caso la clave está en dos observaciones:
   (a) Cada sumando se obtiene multiplicando un elemento x o y de cada uno de los factores. Así, en cada sumando, las suma de las potencias de x mas las de y debe ser siempre n si estamos encontrando $(x + y)^n$.
   (b) Cuando agrupamos términos semejantes el coeficiente de cada sumando corresponde a la cantidad de veces que aparece el producto de r factores x por $n - r$ factores y.

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

¿Cómo encontrar este coeficiente?

Potencias de un binomio

¿Cómo encontrar este coeficiente?
Recordando nuestros conocimientos de conteo podremos saberlo.

Potencias de un binomio

¿Cómo encontrar este coeficiente?
Recordando nuestros conocimientos de conteo podremos saberlo.
Tenemos en cada sumando n factores (lugares),

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

¿Cómo encontrar este coeficiente?
Recordando nuestros conocimientos de conteo podremos saberlo.
Tenemos en cada sumando n factores (lugares), debemos escoger que r sean y (desde luego $n - r$ serán x),

Potencias de un binomio

¿Cómo encontrar este coeficiente?
Recordando nuestros conocimientos de conteo podremos saberlo.
Tenemos en cada sumando n factores (lugares), debemos escoger que r sean y (desde luego $n-r$ serán x), luego el número de sumandos con $y^r x^{n-r}$ son tantos como subconjuntos de r elementos en un conjunto de n elementos, es decir:

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

¿Cómo encontrar este coeficiente?
Recordando nuestros conocimientos de conteo podremos saberlo.
Tenemos en cada sumando n factores (lugares), debemos escoger que r sean y (desde luego $n-r$ serán x), luego el número de sumandos con $y^r x^{n-r}$ son tantos como subconjuntos de r elementos en un conjunto de n elementos, es decir:

$C(n,r)$ que también se nota $\binom{n}{r}$ y es igual a $\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Teorema del binomio

Factoriales

Para todo entero positivo n, se define **n factorial** como:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

Factoriales

Para todo entero positivo n, se define **n factorial** como:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

y definimos

$$0! = 1$$

Factoriales

Para todo entero positivo n, se define **n factorial** como:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

y definimos

$$0! = 1$$

Por ejemplo, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x + y)^n$:

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$:

¿Cuál es el coeficiente de $x^n = x^n y^0$?

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$:

¿Cuál es el coeficiente de $x^n = x^n y^0$? $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$:

¿Cuál es el coeficiente de $x^n = x^n y^0$? $\displaystyle\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

¿Cuál es el coeficiente de $x^{n-1}y$?

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$:

¿Cuál es el coeficiente de $x^n = x^n y^0$? $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

¿Cuál es el coeficiente de $x^{n-1}y$? $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$:

¿Cuál es el coeficiente de $x^n = x^n y^0$? $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

¿Cuál es el coeficiente de $x^{n-1}y$? $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$

¿Cuál es el coeficiente de y^n?

Potencias de un binomio

Veamos algunos coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$:

¿Cuál es el coeficiente de $x^n = x^n y^0$? $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

¿Cuál es el coeficiente de $x^{n-1}y$? $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

¿Cuál es el coeficiente de y^n? $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

Desarrollemos el caso de $(x + y)^5$.

Potencias de un binomio

Desarrollemos el caso de $(x+y)^5$.

$$(x+y)^5$$

Potencias de un binomio

Desarrollemos el caso de $(x+y)^5$.

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2$$

Potencias de un binomio

Desarrollemos el caso de $(x+y)^5$.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^5 = {} & \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 \\
& + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5
\end{aligned}
$$

Potencias de un binomio

Desarrollemos el caso de $(x+y)^5$.

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

Potencias de un binomio

Observamos una simetría en los coeficientes ¿a qué se debe?

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

Observamos una simetría en los coeficientes ¿a qué se debe?
Es lo mismo escoger r lugares para y que escoger r lugares para x.

Teorema del binomio

Potencias de un binomio

Observamos una simetría en los coeficientes ¿a qué se debe?
Es lo mismo escoger r lugares para y que escoger r lugares para x.
Es decir, el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ debe ser el mismo de $x^r y^{n-r}$.

Potencias de un binomio

Observamos una simetría en los coeficientes ¿a qué se debe?
Es lo mismo escoger r lugares para y que escoger r lugares para x.
Es decir, el coeficiente de $x^{n-r}y^{r}$ debe ser el mismo de $x^{r}y^{n-r}$.
En términos de combinatorios

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}$$

Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal en términos de combinatorios queda:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \end{array}$$

El triángulo de Pascal en términos de combinatorios queda:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \end{array}$$

Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal en términos de combinatorios queda:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

El triángulo de Pascal en términos de combinatorios queda:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal en términos de combinatorios queda:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Propiedad

La construcción del triángulo de Pascal nos sugiere la siguiente propiedad de los combinatorios:

Para todo $n \geq 1$ y todo r con $0 < r \leq n$

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Teorema del binomio

Teorema del binomio

Sean x y y números y n un entero positivo,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r y^{n-r}$$

Ejercicios

1. Encuentre el coeficiente de x^3y^7 en el desarrollo de $(x+y)^{10}$.
2. Encuentre el coeficiente de y^3 y la potencia de x en el desarrollo de $(4x-3y)^{11}$