Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

**Matemáticas Básicas** C.H., C. S. y C.E. - Grupos 10 al 21.

Facultades de Medicina, Enfermería, Odontología, Ciencias Humanas, Ciencias Económicas y programa de Veterinaria

Coordinación: Jeanneth Galeano

# Taller 6

I. Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{[x]}$ $\quad h(x) = \sqrt{5 + x}$ $\quad m(x) = \ln x$

$k(x) = \dfrac{1}{(2x + 3)^2}$ $\quad l(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1 - 2x}}$ $\quad j(x) = \dfrac{1}{\ln(x - 3)}$ $\quad n(x) = 2^x$

II. Considere las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = \ln x$ $\quad h(x) = -2x^2 + 5x + 3$

$k(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad l(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ $\quad n(x) = e^x$

a) Encuentre el dominio e imagen de cada función.

b) Haga la gráfica de cada una de ellas.

c) Determine cuáles son inyectivas o uno a uno.

d) Determine cuáles son pares y cuáles son impares.

e) Defina y encuentre el dominio de:

1) $f - k$ 2) $fk$ 3) $h + f$ 4) $\dfrac{h}{g}$ 5) $\dfrac{f}{h}$

III. Utilizando las gráficas de la parte b) del punto II. haga las siguientes gráficas:

1) $y = f(x) - 3$; $\quad y = f(x) + 3$; $\quad y = f(x - 3)$; $\quad y = f(x + 3)$;
$y = f(3x)$; $\quad y = f(\frac{1}{3}x)$

2) $y = g(x) - 1$; $\quad y = g(x) + 1$; $\quad y = g(x - 1)$; $\quad y = g(x + 1)$;
$y = g(2x)$; $\quad y = g(\frac{1}{2}x)$

3) $y = n(x + 2)$; $\quad y = n(2x)$; $\quad y = 2n(x)$; $\quad y = n(x) + 2$;

$y = -n(x)$; $\quad y = n(-x)$.

IV. Considere una función arbitraria $F$ y una constante positiva $c$. Observe las gráficas obtenidas en III y recuerde lo estudiado en relaciones para describir la forma de obtener las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = F(x + c)$ . $\qquad$ b) $y = F(x - c)$.

c) $y = F(x) + c$. $\qquad$ d) $y = F(x) - c$.

e) $y = cF(x)$. $\qquad$ f) $y = -cF(x)$.

g) $y = F(cx)$ con $c > 1$. $\qquad$ h) $y = F(cx)$ con $0 < c < 1$.

V. Considere las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = |x| + x \qquad h(x) = -2x^2 + 5x + 3 \qquad j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$n(x) = \sqrt{x} \qquad k(x) = \dfrac{1}{x} \qquad m(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad l(x) = 2 + \ln(x)$

a) Encuentre el dominio e imagen de cada función.

b) Defina y encuentre el dominio de:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a)* $n \circ k$ | *c)* $g \circ k$ | *e)* $k \circ m$ | *g)* $f \circ n$ | *i)* $l \circ h$ |
| *b)* $k \circ n$ | *d)* $n \circ h$ | *f)* $n \circ f$ | *h)* $n \circ l$ | *j)* $l \circ f$ |

VI. a) Exprese el área $A$ y el perímetro $P$ de un triángulo equilátero como funciones de la longitud $l$ de un lado.

b) Exprese la longitud $l$ del lado de un cuadrado y su área $A$ como funciones de la longitud $d$ de su diagonal

c) Exprese el área de la superficie de un cubo $A$ y su volumen $V$ como funciones de la longitud de su arista $l$.

VII. El costo del parqueadero en un centro comercial depende del tiempo $t$ que el auto permanezca en él. Por las primeras dos horas o fracción su costo es de \$2.500 y por cada cada cuarto de hora o fracción adicional \$500 más. El cobro máximo diario es de \$12.000. Represente en un plano cartesiano la función costo $C(t)$.

VIII. La producción de manzanas de cada árbol en un huerto es de $(500 - 5x)$ kilos, en donde $x$ es la densidad con la que se plantan los árboles, es decir, el número de árboles por hectárea. Determine el valor de $x$ que hace que la producción total por hectárea sea máxima.

IX. El héroe de una popular historia de espías ha escapado del cuartel general de una banda internacional de contrabandistas de diamantes en la pequeña región mediterránea de Azusa. Nuestro héroe huye conduciendo un camión de leche, a una velocidad de 72 km por hora. Cuarenta minutos después los traficantes comienzan a perseguirlo en un Ferrari, a 168 km por hora. La distancia desde el cuartel general de los contrabandistas a la frontera, y a la libertad, es de 83,8 km. Escapará nuestro héroe de la banda? Si lo hace, con qué ventaja cruzará la frontera?

X. CRECIMIENTO EXPONENCIAL. En condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que primero hay 100 bacterias.

a) Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?

b) Cuál es el tamaño de la población después de t horas?

c) Se puede afirmar que después de 20 horas el número de bacterias está entre 6.000 y 13.000?

d) Estime el tiempo para que la población llegue hasta 50.000 bacterias.

XI. VIDA MEDIA. La vida media de un isótopo de sodio es de 15 horas. Esto significa que cualquier cantidad de este isótopo se reduce a la mitad al cabo de 15 horas. Una muestra tiene una masa de 2 gramos.

a) Encuentre la cantidad que queda después de 60 horas.

b) Halle cuánto queda después de t horas.

c) Estime la cantidad que queda después de 4 días.

d) Estime el tiempo requerido para que la masa se reduzca a 0,01 gramos.

XII. CURVAS LOGÍSTICAS. El modelo de propagación de una enfermedad infecciosa en una ciudad de 100.000 habitantes es el siguiente

$i(t) = \dfrac{10{,}000}{5 + 1245e^{-0{,}97t}}$ donde $i(t)$ es la cantidad de habitantes infectados después de $t$ días.

a) ¿Cuántas personas había inicialmente infectadas? (cuando $t = 0$)

b) Use una calculadora para determinar el número de personas infectadas después de uno, dos, tres, cinco, diez y veinte días (Recuerde que debe aproximar sus resultados a números enteros). Observe las diferencias y note que la propagación está representada por una curva logística que tiende a estabilizarse en un valor de 2.000 infectados.

XIII. Cuando se administra un cierto fármaco a un paciente, el número de miligramos que permanece en el torrente sanguíneo después de $t$ horas está dado por $f(t) = 50e^{-0{,}2t}$.

a) ¿Cuánto fármaco se le suministró al paciente?

b) ¿Cuántos miligramos de fármaco permanecen en el torrente después de 3 horas? ¿Después de 6 horas?

XIV. CURVA DE APRENDIZAJE Cuando alguien está aprendiendo una cierta tarea o habilidad, su desempeño en esta actividad se modela mediante la función $D(t) = M - Ce^{-kt}$ donde $t$ es el tiempo de entrenamiento, $k$ y $C$ son constantes positivas y $C < M$. Observe que para valores pequeños de $t$ el desempeño crece rápidamente, pero luego es más lento su crecimiento y tiende al valor M.

Considere un atleta que hace salto con garrocha y su curva de aprendizaje está dada por $D(t) = 20 - 14e^{-0{,}024t}$ donde $D(t)$ mide la altura en pies que alcanza en su salto después de $t$ meses de entrenamiento. ¿Qué altura puede saltar después de 3 meses de entrenamiento? ¿Después de un año de entrenamiento? ¿Cuántos meses debe entrenar para poder saltar 12 pies?

XV. LEY DE OLVIDO DE EBBINGHAUS. Esta ley establece que si se ha aprendido una cierta tarea a un nivel de desempeño $P_0$, entonces después de un tiempo $t$ el nivel de desempeño $P$ satisface la ecuación $\log P = \log P_0 - c\log(t + 1)$, donde $c$ es una constante que depende del tipo de tarea y $t$ se mide en meses.

a) Muestre (usando las propiedad es de los logaritmos) que $P = \dfrac{P_0}{(t+1)^c}$.

b) Suponga que su puntaje en una prueba de esta materia es de 90 puntos. ¿Cúal sería su puntaje en una prueba similar dos meses después? ¿Después de un año? Suponga que en este caso la constante $c = 0{,}2$.

XVI. FECHADO CON CARBONO. La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de Carbono 14 que permanece en él. Si $D_0$ es la cantidad original de carbono 14 y $D$ es la cantidad que resta, entonces la edad $A$ del objeto medida en años está dada por la fórmula $A = -8267 \ln\left(\dfrac{D}{D_0}\right)$.

Si en cierto objeto antiguo permanece el 73 % de la cantidad original de carbono 14, ¿Cuál será la edad del objeto?