

# MATEMÁTICAS BÁSICAS



Autoras: Margarita Ospina Pulido  
Jeanneth Galeano Peñaloza  
Edición: Rafael Ballestas Rojano

Universidad Nacional de Colombia  
Departamento de Matemáticas  
Sede Bogotá

Enero de 2015

# Parte I

## Funciones



Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*



Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Por ejemplo:

- 1 La función del conjunto de las palabras en el conjunto de las letras, que a cada palabra le asigna su letra inicial.



Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Por ejemplo:

- 1 La función del conjunto de las palabras en el conjunto de las letras, que a cada palabra le asigna su letra inicial.
- 2 La función del conjunto de ciudadanos de un país en el de las huellas digitales, que a cada ciudadano le asigna la huella digital de su índice derecho.



# Funciones

Una función es *una especie de máquina que toma elementos de un conjunto y después de un proceso obtiene elementos de otro.*

Por ejemplo:

- 1 La función del conjunto de las palabras en el conjunto de las letras, que a cada palabra le asigna su letra inicial.
- 2 La función del conjunto de ciudadanos de un país en el de las huellas digitales, que a cada ciudadano le asigna la huella digital de su índice derecho.
- 3 La función del conjunto de los reales en sí mismo, que a cada real le asigna su cuadrado.



# Funciones

De una manera más formal tenemos:

Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , notada:

$$f : A \longrightarrow B$$

es un subconjunto de  $A \times B$  (una relación de  $A$  en  $B$ ) que cumple:



# Funciones

De una manera más formal tenemos:

Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , notada:

$$f : A \longrightarrow B$$

es un subconjunto de  $A \times B$  (una relación de  $A$  en  $B$ ) que cumple:

Para todo elemento  $a \in A$  existe un único  $b \in B$  tal que la pareja  $(a, b) \in f$ .





# Funciones

De una manera más formal tenemos:

Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , notada:

$$f : A \longrightarrow B$$

es un subconjunto de  $A \times B$  (una relación de  $A$  en  $B$ ) que cumple:

Para todo elemento  $a \in A$  existe un único  $b \in B$  tal que la pareja  $(a, b) \in f$ .

Como es único el elemento  $b$  relacionado con  $a$ , escribimos

$$f(a) = b.$$



Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función,

- $A$  se llama el **Dominio** de  $f$ .



# Funciones

Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función,

- $A$  se llama el **Dominio** de  $f$ .
- $B$  se llama el **Codominio** de  $f$ .



# Funciones

Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función,

- $A$  se llama el **Dominio** de  $f$ .
- $B$  se llama el **Codominio** de  $f$ .
- $\{b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$  se llama el **Rango** de  $f$  o el **Recorrido** de  $f$  o la **Imagen** de  $f$ .



# Ejemplos

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x - 1$   
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , Imagen de  $f = \mathbb{R}$ .



# Ejemplos

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x - 1$   
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , Imagen de  $f = \mathbb{R}$ .
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x^2$   
 $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ , Imagen de  $g = [0, \infty)$ .



# Igualdad de funciones

- Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento  $x$  del dominio  $f(x) = g(x)$ .



# Igualdad de funciones

- Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento  $x$  del dominio  $f(x) = g(x)$ .
- En este curso trabajaremos únicamente **funciones reales**, es decir, funciones de dominio y codominio  $\mathbb{R}$  o subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .





# Igualdad de funciones

- Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento  $x$  del dominio  $f(x) = g(x)$ .
- En este curso trabajaremos únicamente **funciones reales**, es decir, funciones de dominio y codominio  $\mathbb{R}$  o subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .
- En este caso se acostumbra simplemente a identificar la función con la expresión que define su efecto sobre la variable, suponiendo que el dominio es, **el subconjunto más grande de  $\mathbb{R}$  en el que se puede definir la función** y el codominio es  $\mathbb{R}$ .



# Ejemplos

- Si  $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$ , entonces  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ .



# Ejemplos

- Si  $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$ , entonces  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ .
- Si  $g(x) = \sqrt{2 - 5x}$ , entonces  $\text{Dom}(g) = (-\infty, \frac{2}{5}]$ .



## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 8x + 7}$ .



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 8x + 7}$ .

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 8x + 7}$ .

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 1)(x - 7) = 0$$



## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 8x + 7}$ .

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 1)(x - 7) = 0$$

Dominio de  $f$ :  $\mathbb{R} - \{1, 7\}$ .



## Ejemplo

Para hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ , resolvemos la desigualdad





## Ejemplo

Para hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ , resolvemos la desigualdad

$$2x + 6 \geq 0$$



## Ejemplo

Para hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ , resolvemos la desigualdad

$$2x + 6 \geq 0$$

$$2x \geq -6$$



## Ejemplo

Para hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ , resolvemos la desigualdad

$$2x + 6 \geq 0$$

$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$



## Ejemplo

Para hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ , resolvemos la desigualdad

$$2x + 6 \geq 0$$

$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$

Dominio de  $f$ :  $[-3, \infty)$ .



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$3 - 2x > 0$$



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$3 - 2x > 0$$

$$-2x > -3$$



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$3 - 2x > 0$$

$$-2x > -3$$

$$x < \frac{3}{2}$$





# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$3 - 2x > 0$$

$$-2x > -3$$

$$x < \frac{3}{2}$$

$$S = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) *$$



# Dominio

## Ejemplo

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Aquí hay una combinación de los dos casos, así que empezamos por la expresión dentro del radical.

$$3 - 2x > 0$$

$$-2x > -3$$

$$x < \frac{3}{2}$$

$$S = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) *$$

\* ¿Por qué el intervalo es abierto en  $\frac{3}{2}$ ?



## Ejemplo (Cont.)

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Además, el denominador se hace cero cuando  $x = -5$



## Ejemplo (Cont.)

Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{1 - 7x}{(x + 5)\sqrt{3 - 2x}}$ .

Además, el denominador se hace cero cuando  $x = -5$ , así que el dominio de  $f$  es

$$\text{Dom}(f) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) - \{-5\} = (-\infty, -5) \cup \left(-5, \frac{3}{2}\right).$$



# Gráficas de funciones

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$



# Gráficas de funciones

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$

- Si  $f(x) = 2x - 1$ , su gráfica es la recta  $y = 2x - 1$ .



# Gráficas de funciones

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$

- Si  $f(x) = 2x - 1$ , su gráfica es la recta  $y = 2x - 1$ .
- Si  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ , su gráfica es la parábola  $y = x^2 - 2x + 1$ .



# Gráficas de funciones

La gráfica de una función real es la representación en el plano cartesiano de

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$

- Si  $f(x) = 2x - 1$ , su gráfica es la recta  $y = 2x - 1$ .
- Si  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ , su gráfica es la parábola  $y = x^2 - 2x + 1$ .

Nótese que una gráfica en el plano cartesiano representa una función real, si toda recta vertical corta la gráfica en a lo sumo un punto.





# Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío  $A$  definimos

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto a$$



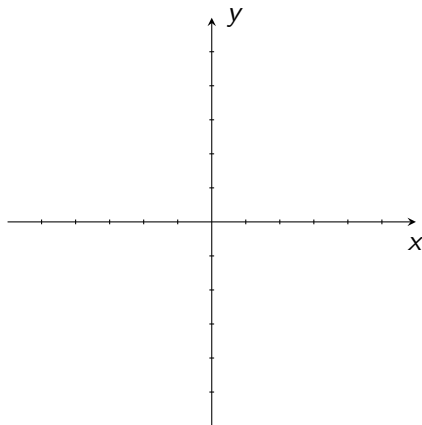
# Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío  $A$  definimos

$$I_A : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto a$$

En particular, la función idéntica de  $\mathbb{R}$

$$I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$





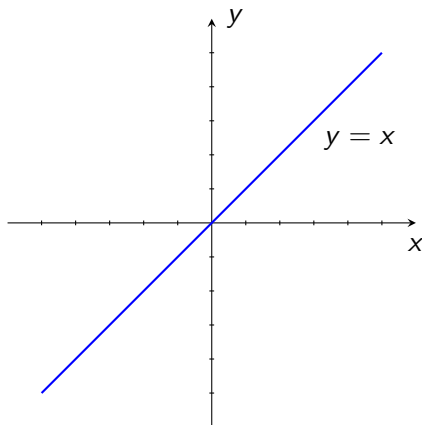
# Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío  $A$  definimos

$$I_A : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto a$$

En particular, la función idéntica de  $\mathbb{R}$

$$I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$





# Función idéntica o función identidad

Dado cualquier conjunto no vacío  $A$  definimos

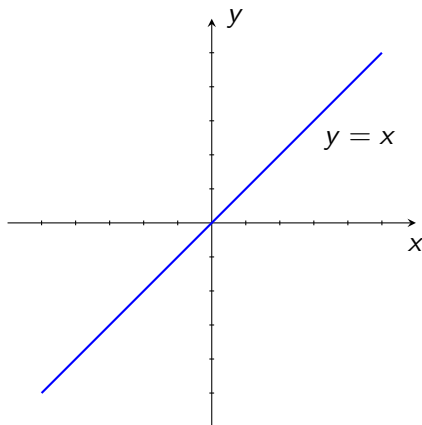
$$I_A : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto a$$

En particular, la función idéntica de  $\mathbb{R}$

$$I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$

$$\text{Dom}(I_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(I_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$$

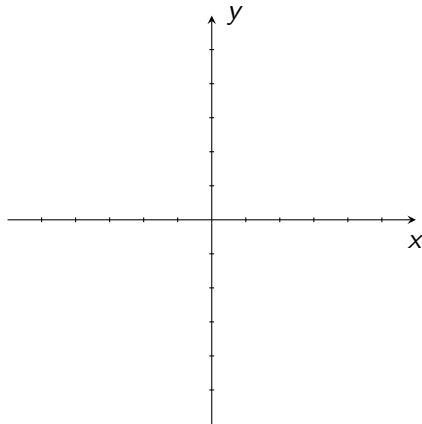




# Función constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto c$$

donde  $c$  es una constante.

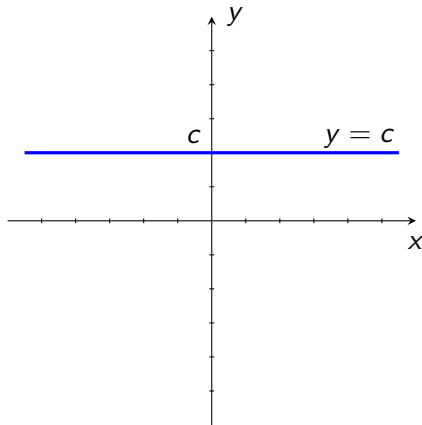




# Función constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto c$$

donde  $c$  es una constante.





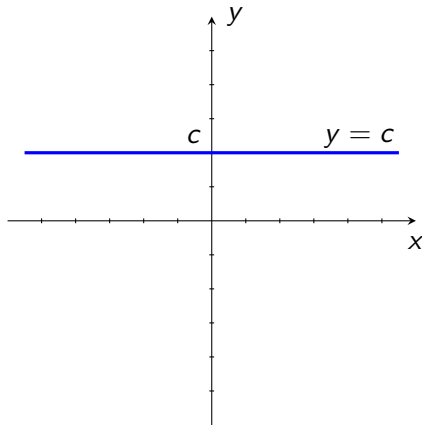
# Función constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto c$$

donde  $c$  es una constante.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{c\}$$

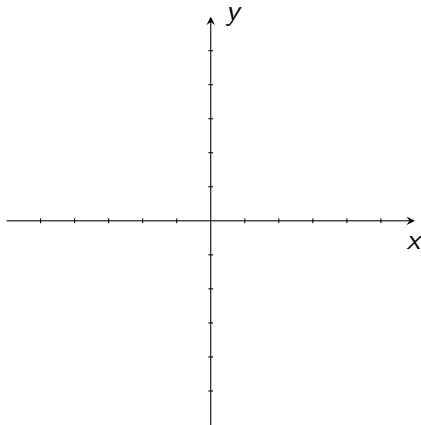




# Función lineal

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto mx + b$$

donde  $m$  y  $b$  son constantes.



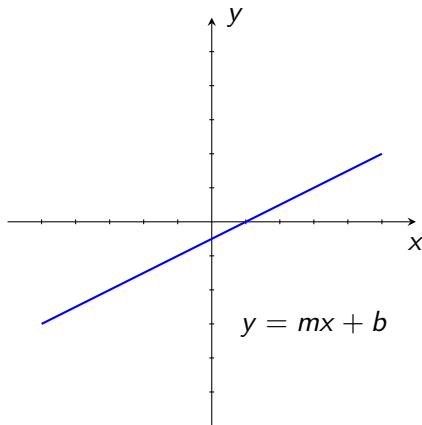




# Función lineal

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto mx + b$$

donde  $m$  y  $b$  son constantes.





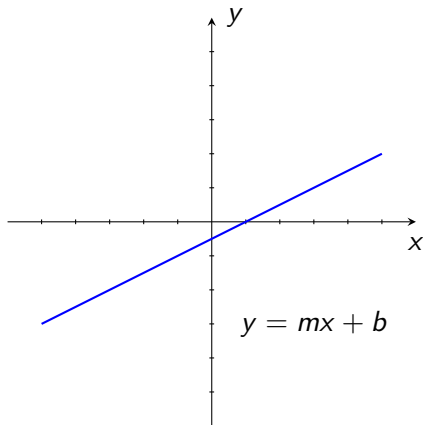
# Función lineal

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto mx + b$$

donde  $m$  y  $b$  son constantes.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}, \text{ si } m \neq 0$$





# Función lineal

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto mx + b$$

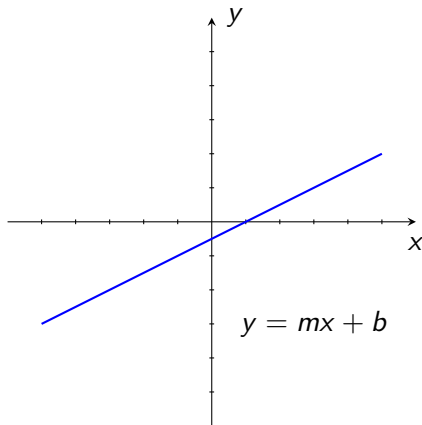
donde  $m$  y  $b$  son constantes.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}, \text{ si } m \neq 0$$

¿Qué pasa si  $m = 0$ ?

¿Cómo es la gráfica de  $f$  en este caso?





# Función cuadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes  
y  $a \neq 0$ .



# Función cuadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes  
y  $a \neq 0$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$
$$\text{Im}(f) = ?$$



# Función cuadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes  
y  $a \neq 0$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$
$$\text{Im}(f) = ?$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?



# Función cuadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

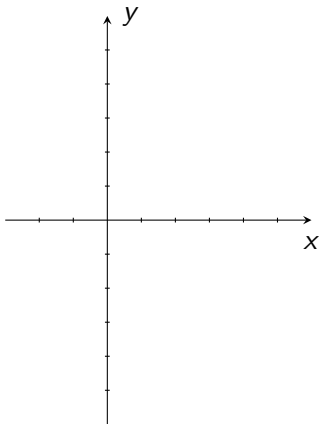
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes  
y  $a \neq 0$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = ?$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?





# Función cuadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

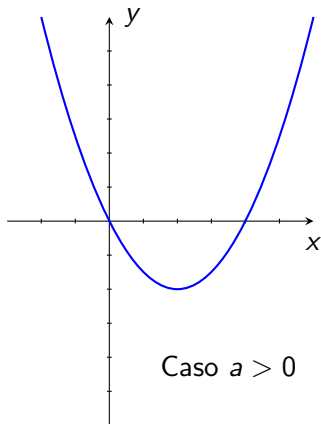
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes  
y  $a \neq 0$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = ?$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?







# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$



# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |x|$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) =$$



# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) =$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?



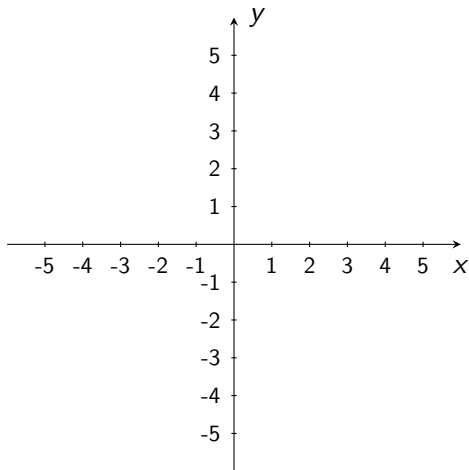
# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) =$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?





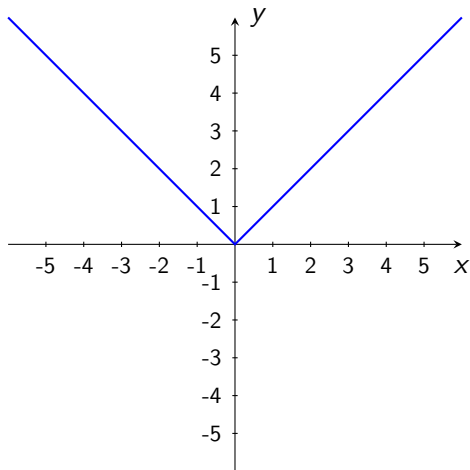
# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) =$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?





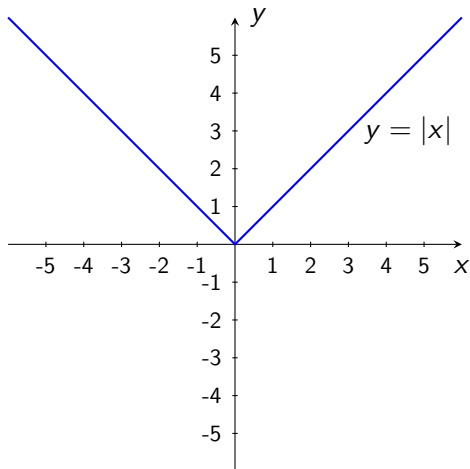
# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) =$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?





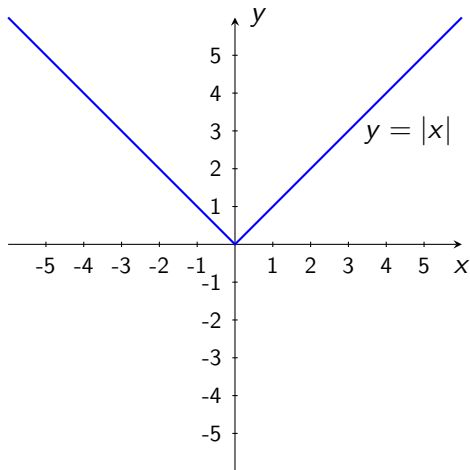
# Función valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = [0, \infty)$$

¿Cómo es la gráfica de  $f$ ?





# Función parte entera

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .





# Función parte entera

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$



# Función parte entera

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto [x]$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$

$$[8.\overline{27}] = 8$$



# Función parte entera

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto [x]$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$

$$[8.\overline{27}] = 8$$

$$[12] = 12$$



# Función parte entera

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto [x]$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$
$$[-2] = -2$$

$$[8.\overline{27}] = 8$$

$$[12] = 12$$



# Función parte entera

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto [x]$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$

$$[-2] = -2$$

$$[8.\overline{27}] = 8$$

$$[-1,5] = -2$$

$$[12] = 12$$



# Función parte entera

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto [x]$$

donde  $[x]$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

Por ejemplo

$$[\pi] = 3$$

$$[-2] = -2$$

$$[8.\overline{27}] = 8$$

$$[-1,5] = -2$$

$$[12] = 12$$

$$[-\pi] = -4$$



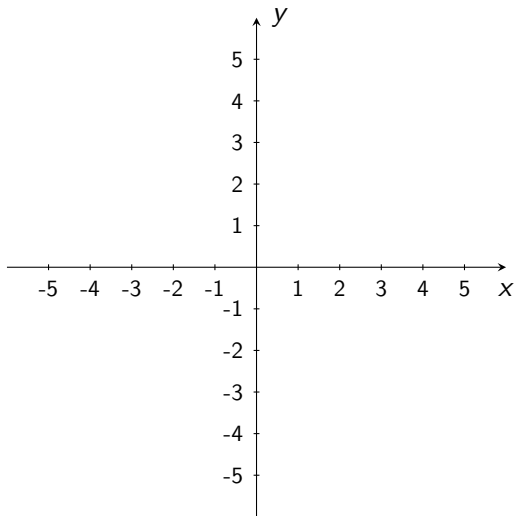
# Función parte entera

## Ejercicio

Haga la gráfica de  $y = [x]$  y encuentre su imagen.



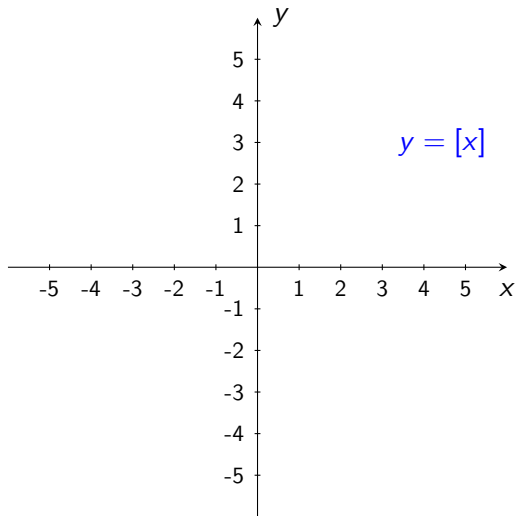
# Función parte entera $f(x) = [x]$





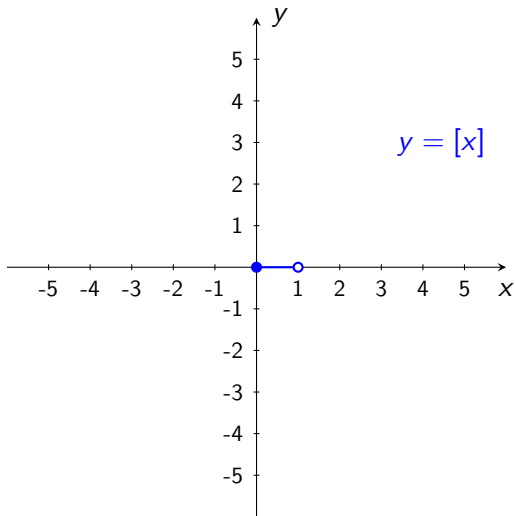


# Función parte entera $f(x) = [x]$



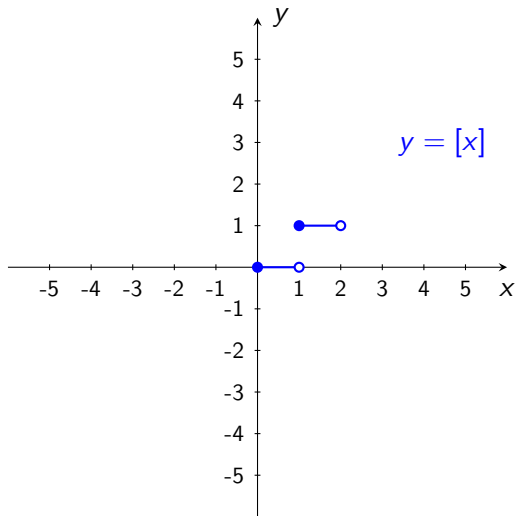


# Función parte entera $f(x) = [x]$



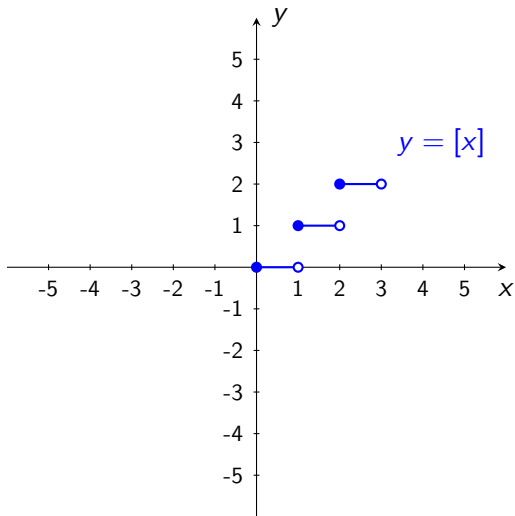


# Función parte entera $f(x) = [x]$



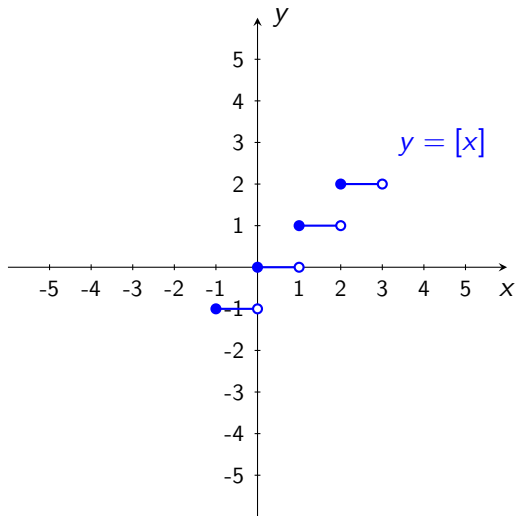


# Función parte entera $f(x) = [x]$



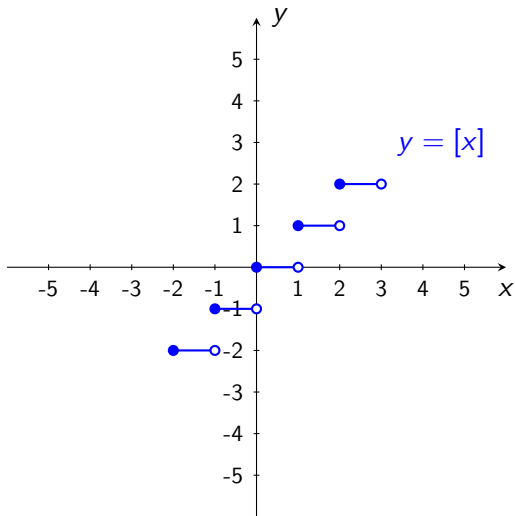


# Función parte entera $f(x) = [x]$



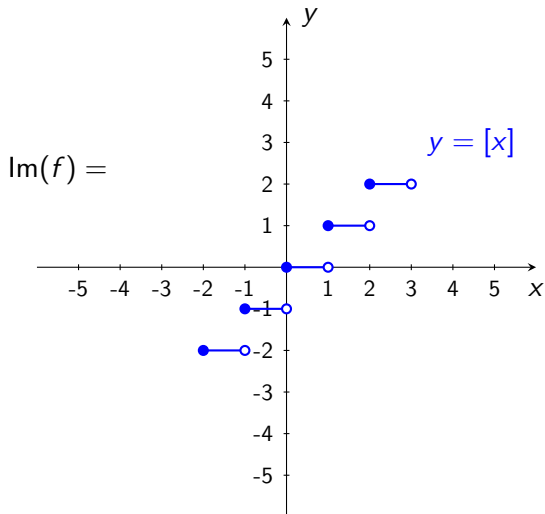


# Función parte entera $f(x) = [x]$



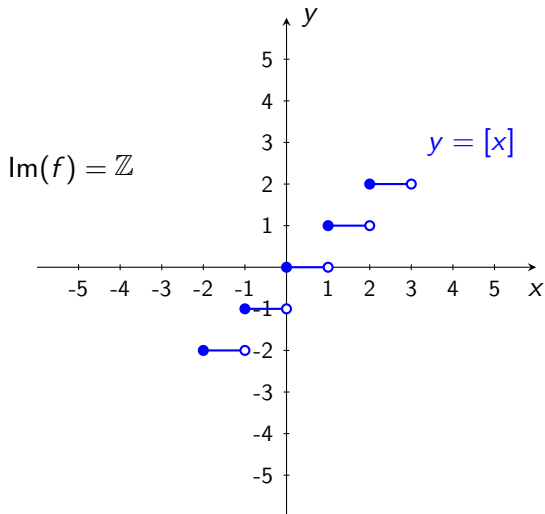


# Función parte entera $f(x) = [x]$





# Función parte entera $f(x) = [x]$







# Funciones definidas a trozos

Consideremos la función definida como sigue

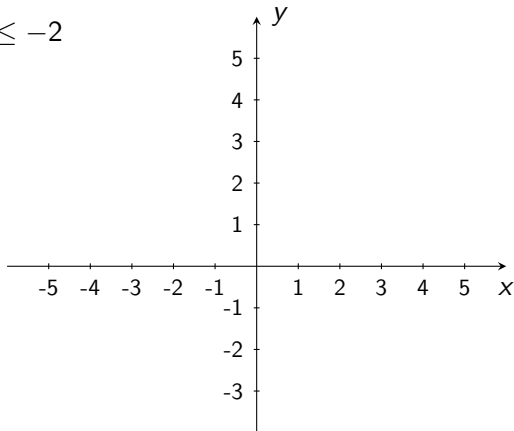
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

Veamos su gráfica.



# Funciones definidas a trozos

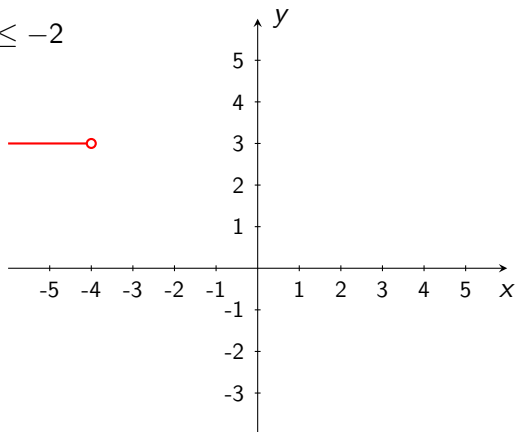
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

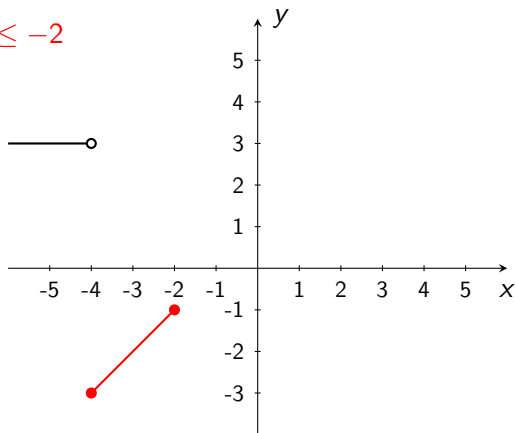
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

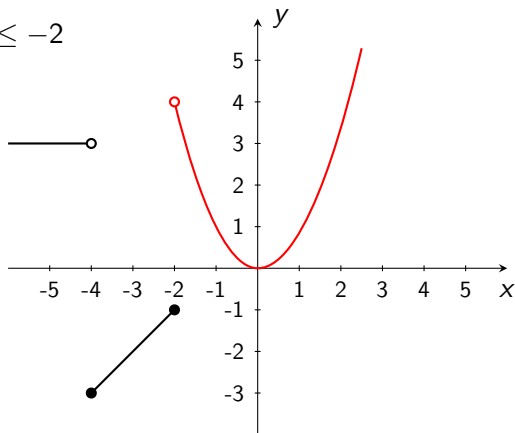
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

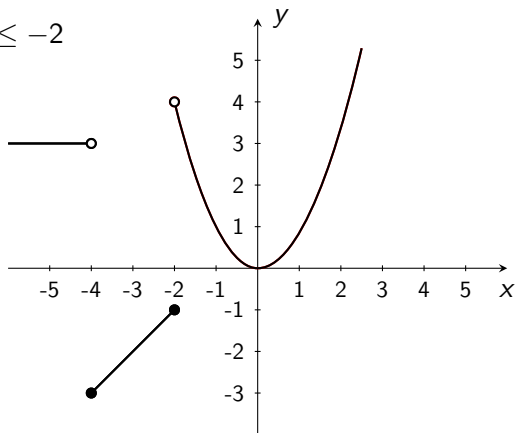
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -4 \\ x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

Consideremos la función definida como sigue

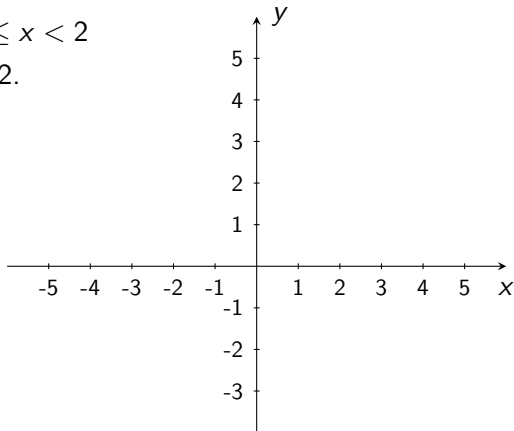
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Veamos su gráfica.



# Funciones definidas a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

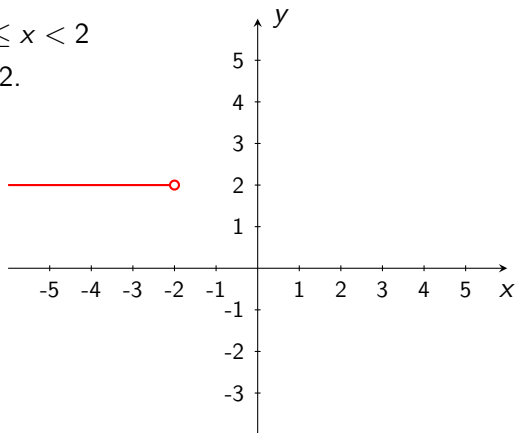






# Funciones definidas a trozos

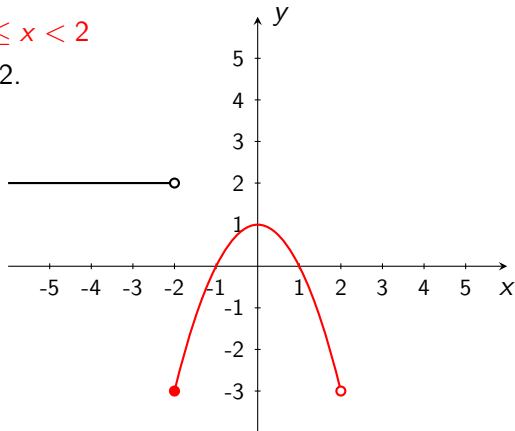
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

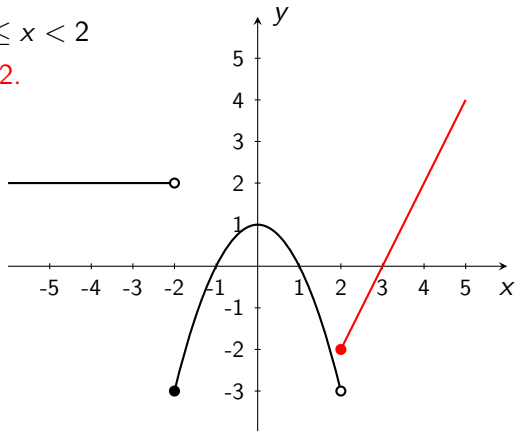
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

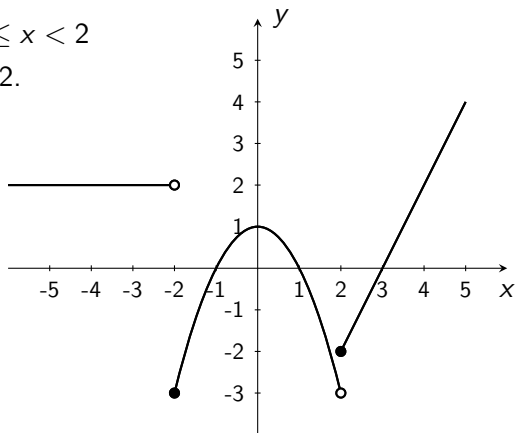
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$





# Funciones definidas a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$





## Ejercicio

Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones:

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -1 \\ |x| + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

## Parte II

# Propiedades de funciones



# Funciones pares

## Definición

Una función  $f$  es **par** si  $f(-x) = f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .



# Funciones pares

## Definición

Una función  $f$  es **par** si  $f(-x) = f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

- 1 Si  $f$  es par, la expresión  $y = f(x)$  no cambia si se sustituye  $x$  por  $-x$ .





# Funciones pares

## Definición

Una función  $f$  es **par** si  $f(-x) = f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

- 1 Si  $f$  es par, la expresión  $y = f(x)$  no cambia si se sustituye  $x$  por  $-x$ .
- 2  $f(x) = |x|$  y  $f(x) = x^2$  son ejemplos de funciones pares.



# Funciones pares

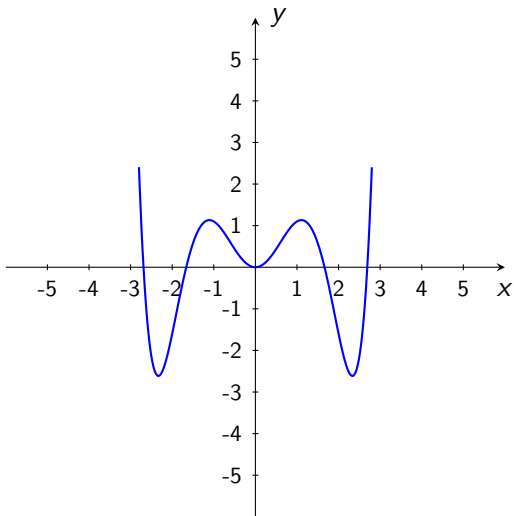
## Definición

Una función  $f$  es **par** si  $f(-x) = f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

- 1 Si  $f$  es par, la expresión  $y = f(x)$  no cambia si se sustituye  $x$  por  $-x$ .
- 2  $f(x) = |x|$  y  $f(x) = x^2$  son ejemplos de funciones pares.
- 3 La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje  $y$ .



# Funciones pares





# Funciones impares

## Definición

Una función  $f$  es **impar** si  $f(-x) = -f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .



# Funciones impares

## Definición

Una función  $f$  es **impar** si  $f(-x) = -f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

- 1  $f(x) = x$  y  $f(x) = x^3$  son ejemplos de funciones impares.



# Funciones impares

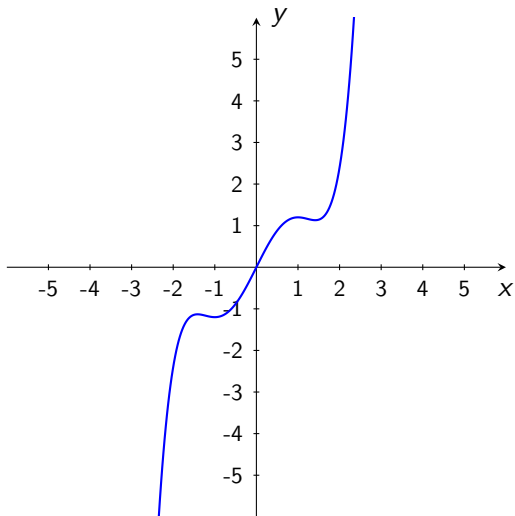
## Definición

Una función  $f$  es **impar** si  $f(-x) = -f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

- 1  $f(x) = x$  y  $f(x) = x^3$  son ejemplos de funciones impares.
- 2 La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.



# Funciones impares





# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.





# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$f(-x)$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$f(-x) = 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8\end{aligned}$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$  es impar, pues





# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$  es impar, pues

$$f(-x)$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$  es impar, pues

$$f(-x) = 12(-x)^5 - 6(-x)^3 - 3(-x)$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$  es impar, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 12(-x)^5 - 6(-x)^3 - 3(-x) \\ &= -12x^5 + 6x^3 + 3x\end{aligned}$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 4x^2 + 5x^6 - 3x^8$  es par, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 4(-x)^2 + 5(-x)^6 - 3(-x)^8 \\ &= 4x^2 + 5x^6 - 3x^8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

- $f(x) = 12x^5 - 6x^3 - 3x$  es impar, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 12(-x)^5 - 6(-x)^3 - 3(-x) \\ &= -12x^5 + 6x^3 + 3x \\ &= -f(x)\end{aligned}$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$  no es par ni impar, pues



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$  no es par ni impar, pues

$$f(-x)$$





# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$  no es par ni impar, pues

$$f(-x) = 3(-x)^7 + 9(-x)^5 - 3(-x)^8$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$  no es par ni impar, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 3(-x)^7 + 9(-x)^5 - 3(-x)^8 \\ &= -3x^7 - 9x^5 - 3x^8\end{aligned}$$



# Funciones pares e impares

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 3x^7 + 9x^5 - 3x^8$  no es par ni impar, pues

$$\begin{aligned}f(-x) &= 3(-x)^7 + 9(-x)^5 - 3(-x)^8 \\&= -3x^7 - 9x^5 - 3x^8 \\&= -(3x^7 + 9x^5 + 3x^8)\end{aligned}$$



# Funciones pares e impares

## Ejercicio

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.



# Funciones pares e impares

## Ejercicio

Determinar si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos.

- $f(x) = 2x^7 + 3x^5 - 6x^6 + 1$
- $f(x) = 8x^6 + 3x^4 - x + 4$
- $f(x) = 2\sqrt{x} + 4$
- $f(x) = (x - 1)^2 + x^4$
- $f(x) = 3 - (x + 2)^3$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Definición

Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función,



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Definición

Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función,

- $f$  se dice **inyectiva** o **uno a uno** si se cumple que

$$f(a) = f(b) \text{ implica que } a = b.$$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Definición

Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función,

- $f$  se dice **inyectiva** o **uno a uno** si se cumple que

$$f(a) = f(b) \text{ implica que } a = b.$$

- $f$  se dice **sobreyectiva** o **sobre** si su rango es todo el conjunto  $B$ .





# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Definición

Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función,

- $f$  se dice **inyectiva** o **uno a uno** si se cumple que

$$f(a) = f(b) \text{ implica que } a = b.$$

- $f$  se dice **sobreyectiva** o **sobre** si su rango es todo el conjunto  $B$ .
- $f$  se dice **biyectiva** si es uno a uno y sobre.



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$  no es uno a uno y no es sobre.





# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$  no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$  no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$  es uno a uno y sobre.



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$  no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$  es uno a uno y sobre.
- $f_5(x) = |x|$



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$  no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$  es uno a uno y sobre.
- $f_5(x) = |x|$  no es uno a uno ni sobre.



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Ejemplo

Considere las siguientes funciones

- $f_1(x) = 4$  no es uno a uno ni sobre.
- $f_2(x) = 2x + 3$  es uno a uno y es sobre.
- $f_3(x) = x^2$  no es uno a uno y no es sobre.
- $f_4(x) = x^3$  es uno a uno y sobre.
- $f_5(x) = |x|$  no es uno a uno ni sobre.

¿Cómo determinar por medio de la gráfica si una función es uno a uno?



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Prueba de la recta horizontal

- Una función  $f$  es uno a uno si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de  $f$  máximo en un punto.



# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Prueba de la recta horizontal

- Una función  $f$  es uno a uno si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de  $f$  máximo en un punto.
- Una función de codominio  $\mathbb{R}$  es sobreyectiva si toda recta horizontal corta su gráfica.

## Parte III

# Operaciones entre funciones





# Operaciones entre funciones

## Definición

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. Definimos



# Operaciones entre funciones

## Definición

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. Definimos

$$\text{Suma } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$



# Operaciones entre funciones

## Definición

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. Definimos

**Suma**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

**Diferencia**  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$



# Operaciones entre funciones

## Definición

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. Definimos

**Suma**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

**Diferencia**  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

**Producto**  $(fg)(x) = f(x)g(x)$



# Operaciones entre funciones

## Definición

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. Definimos

**Suma**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

**Diferencia**  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

**Producto**  $(fg)(x) = f(x)g(x)$

**Cociente**  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , siempre que  $g(x) \neq 0$ .



# Operaciones entre funciones

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 2x + 1$  y  $g(x) = 3x^2 - 4$ . Entonces



# Operaciones entre funciones

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 2x + 1$  y  $g(x) = 3x^2 - 4$ . Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$



# Operaciones entre funciones

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 2x + 1$  y  $g(x) = 3x^2 - 4$ . Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$





# Operaciones entre funciones

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 2x + 1$  y  $g(x) = 3x^2 - 4$ . Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$
- $(fg)(x) = (2x + 1)(3x^2 - 4) = 6x^3 + 3x^2 - 8x - 4$



# Operaciones entre funciones

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 2x + 1$  y  $g(x) = 3x^2 - 4$ . Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$
- $(fg)(x) = (2x + 1)(3x^2 - 4) = 6x^3 + 3x^2 - 8x - 4$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 1}{3x^2 - 4}$



# Operaciones entre funciones

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 2x + 1$  y  $g(x) = 3x^2 - 4$ . Entonces

- $(f + g)(x) = 2x + 1 + 3x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 3$
- $(f - g)(x) = 2x + 1 - (3x^2 - 4) = -3x^2 + 2x + 5$
- $(fg)(x) = (2x + 1)(3x^2 - 4) = 6x^3 + 3x^2 - 8x - 4$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 1}{3x^2 - 4}$

¿Cuál es el dominio de estas funciones?



# Operaciones entre funciones

El dominio de  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  es la intersección  $I$  de los dominios de  $f$  y de  $g$ , mientras que el dominio de  $\frac{f}{g}$  está formado por los puntos  $x$  de  $I$  tales que  $g(x) \neq 0$ .



# Operaciones entre funciones

El dominio de  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  es la intersección  $I$  de los dominios de  $f$  y de  $g$ , mientras que el dominio de  $\frac{f}{g}$  está formado por los puntos  $x$  de  $I$  tales que  $g(x) \neq 0$ .

## Ejemplo

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .

Hallar una expresión para las siguientes funciones y sus dominios,

$$f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad \frac{g}{f}, \quad \frac{g}{f + g}.$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x}$$





## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x} \quad \text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{4\}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f - g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4 - x}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f - g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{4\}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f - g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(fg)(x) = (5x + 3) \left( \frac{x}{4 - x} \right)$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f - g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (5x + 3) \left( \frac{x}{4 - x} \right) \\ &= \frac{5x^2 + 3x}{4 - x}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$(f + g)(x) = 5x + 3 + \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f - g)(x) = 5x + 3 - \frac{x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(fg)(x) = (5x + 3) \left( \frac{x}{4 - x} \right)$$

$$= \frac{5x^2 + 3x}{4 - x}$$

$$\text{Dom}(fg) = \mathbb{R} - \{4\}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .





## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{(5x+3)(4-x)}{x}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{(5x+3)(4-x)}{x} \\ &= \frac{20x - 5x^2 + 12 - 3x}{x}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x + 3}{\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{(5x + 3)(4 - x)}{x} \\ &= \frac{20x - 5x^2 + 12 - 3x}{x} \\ &= \frac{-5x^2 + 17x + 12}{x}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{5x+3}{\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{(5x+3)(4-x)}{x} \\ &= \frac{20x - 5x^2 + 12 - 3x}{x} \\ &= \frac{-5x^2 + 17x + 12}{x}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{0, 4\}.$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3}$$





## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x}{20x - 5x^2 + 12 - 3x}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x}{20x - 5x^2 + 12 - 3x} \\ &= \frac{x}{-5x^2 + 17x + 12}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3} \\ &= \frac{x}{(5x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x}{20x - 5x^2 + 12 - 3x} \\ &= \frac{x}{-5x^2 + 17x + 12} \\ \text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) &= \mathbb{R} - \left\{4, -\frac{3}{5}\right\}.\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4 - x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\left( \frac{g}{f+g} \right) (x) = \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}}\end{aligned}$$





## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}} \\ &= \frac{x}{-5x^2+17x+12+x}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}} \\ &= \frac{x}{-5x^2+17x+12+x} \\ &= \frac{x}{-5x^2+18x+12}\end{aligned}$$



## Ejemplo (cont.)

Sean  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4-x}$ .  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f+g}\right)(x) &= \frac{\frac{x}{4-x}}{5x+3+\frac{x}{4-x}} \\ &= \frac{\frac{x}{4-x}}{\frac{(4-x)(5x+3)+x}{4-x}} \\ &= \frac{x}{-5x^2+17x+12+x} \\ &= \frac{x}{-5x^2+18x+12}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f+g}\right) = \mathbb{R} - \left\{4, \frac{9 \pm \sqrt{141}}{5}\right\}.$$



# Composición de funciones

Si  $f$  y  $g$  son funciones se define

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



# Composición de funciones

Si  $f$  y  $g$  son funciones se define

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

De esta manera  $g \circ f$  es una función cuyo dominio es

$$\{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\}.$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$(g \circ f)(x)$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 3)$$





# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1\end{aligned}$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$(f \circ g)(x)$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1)$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3\end{aligned}$$





# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

De nuevo  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ .



# Ejemplo 1

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 4x - 6 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

En este caso  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

De nuevo  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ .

Nótese que en general  $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ .



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$(g \circ f)(x)$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 3)$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\}$$





## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

$$(f \circ g)(x)$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = [-\frac{3}{2}, \infty)$ .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} + 3\end{aligned}$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} + 3\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$$



## Ejemplo 2

Si  $f(x) = 2x + 3$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x + 3) \\ &= \sqrt{2x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} + 3\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty).$$



# Composición de funciones

## Ejercicio

Si

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{1-x},$$

defina  $(f \circ g)$  y encuentre su dominio. ¡CUIDADO!