MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autoras: Jeanneth Galeano Peñaloza
Margarita Ospina Pulido
Edición: Marcela Rubio Perilla
Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Coordenadas Rectangulares

Plano Cartesiano

- Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, está formado por dos rectas coordenadas perpendiculares llamadas **ejes coordenados**, que se intersectan en un punto llamado **origen**.

Coordenadas Rectangulares

Plano Cartesiano

- Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, está formado por dos rectas coordenadas perpendiculares llamadas **ejes coordenados**, que se intersectan en un punto llamado **origen**.
- La recta horizontal se llama eje x y la recta vertical eje y.

Plano Cartesiano

- Generalmente se escoge la dirección positiva del eje x hacia la derecha, y la dirección positiva del eje y hacia arriba.

Plano Cartesiano

- Generalmente se escoge la dirección positiva del eje x hacia la derecha, y la dirección positiva del eje y hacia arriba.
- A cada punto del plano se le asigna una pareja de reales (a, b) donde a es el punto de corte sobre el eje x de la recta perpendicular a este eje que pasa por el punto (a, b)

Coordenadas Rectangulares

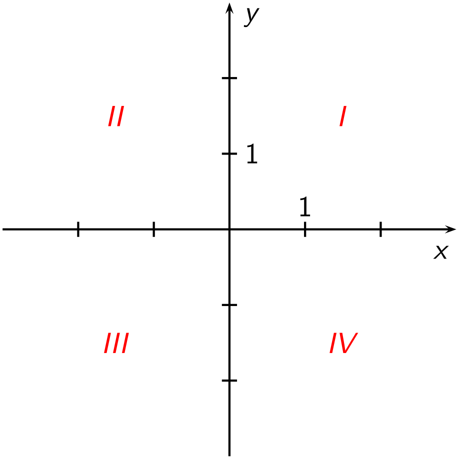
Plano Cartesiano

- Generalmente se escoge la dirección positiva del eje x hacia la derecha, y la dirección positiva del eje y hacia arriba.
- A cada punto del plano se le asigna una pareja de reales (a, b) donde a es el punto de corte sobre el eje x de la recta perpendicular a este eje que pasa por el punto (a, b) y b es el punto sobre el eje y del corte de la perpendicular a este eje que pasa por (a, b).

Plano Cartesiano

Al trazar estas dos rectas, el plano queda dividido en cuatro sectores llamados cuadrantes, en el primer cuadrante tanto x como y son positivos, en el segundo, x es negativo y y es positivo, en el tercero los dos son negativos y en el cuarto x es positivo y y negativo.

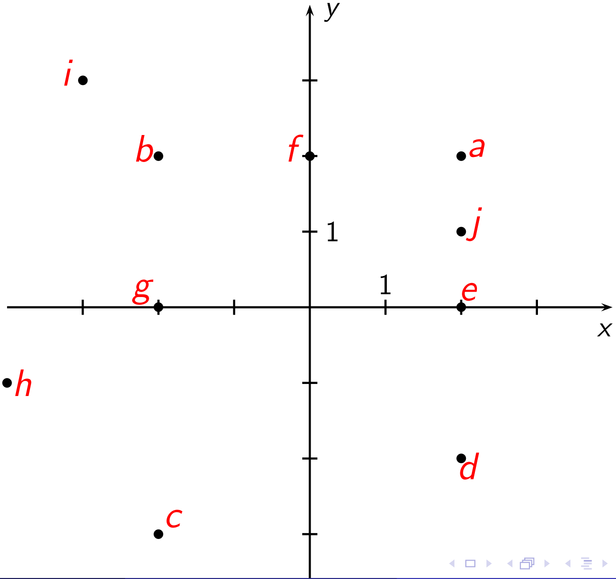
Plano Cartesiano



Ejercicio

Encuentre las coordenadas de los puntos marcados en rojo.

Coordenadas Rectangulares



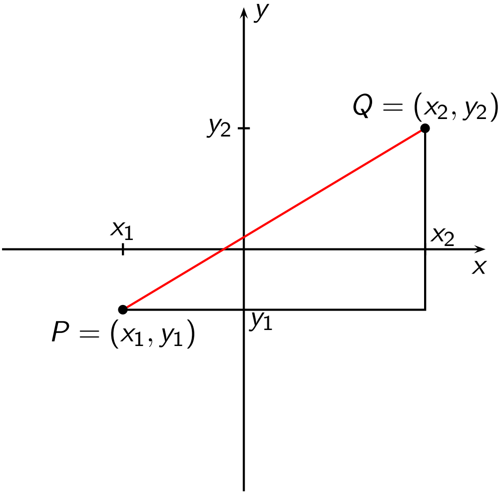
Distancia

Definición

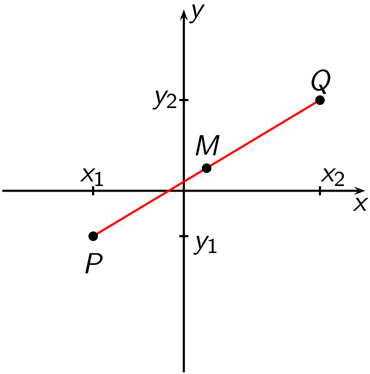
La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano cartesiano está dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

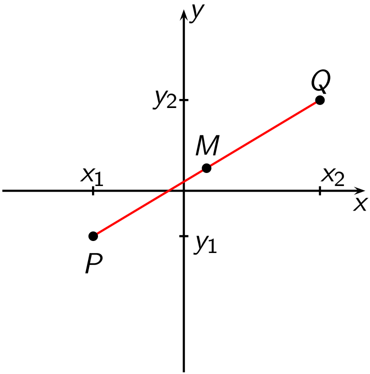
Distancia



Punto medio



Punto medio

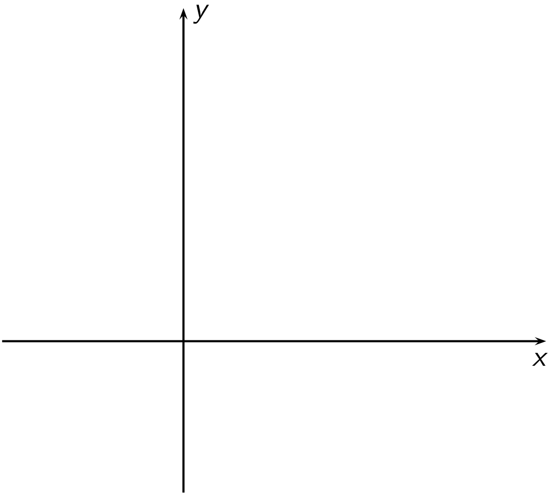


Definición

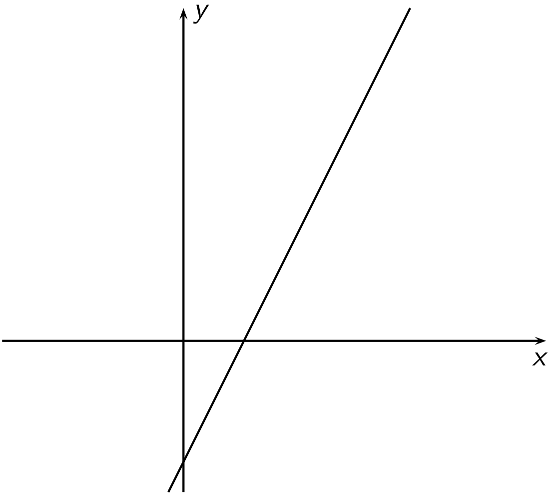
Las coordenadas del punto medio entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ está dada por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

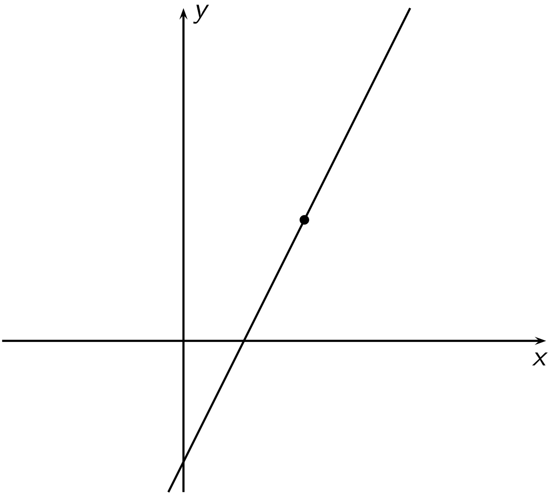
Pendiente de una recta



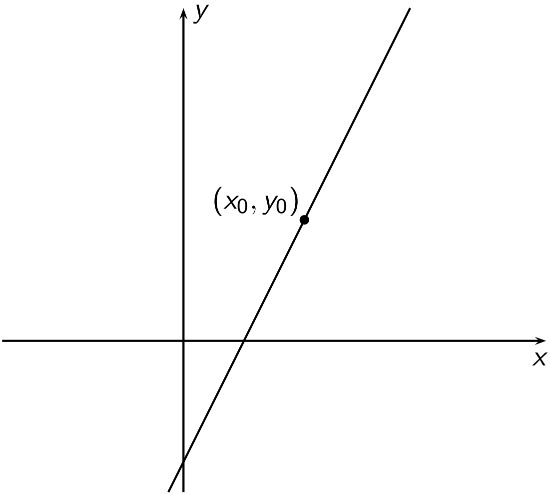
Pendiente de una recta



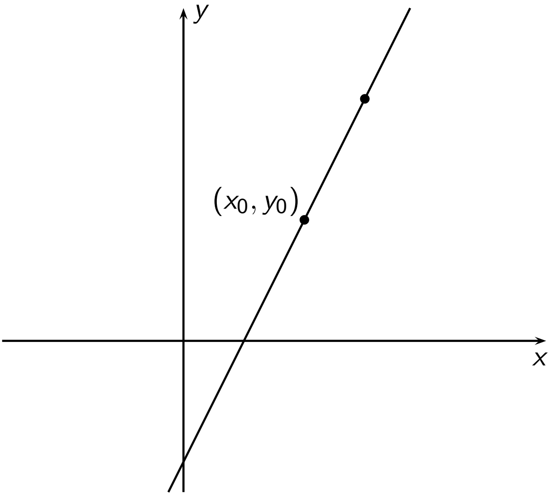
Pendiente de una recta



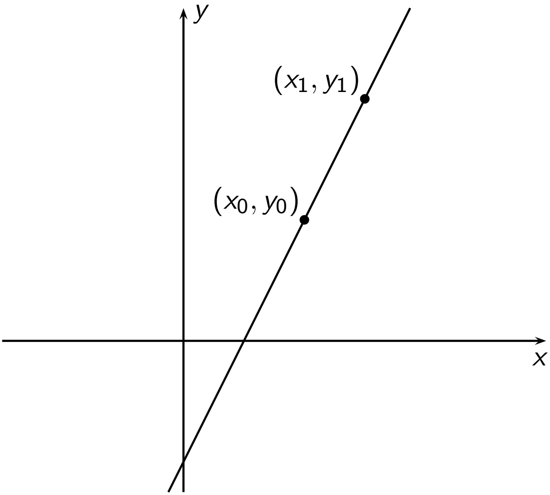
Pendiente de una recta



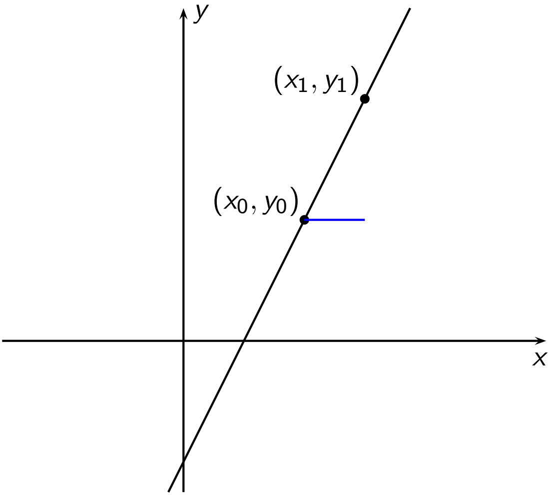
Pendiente de una recta



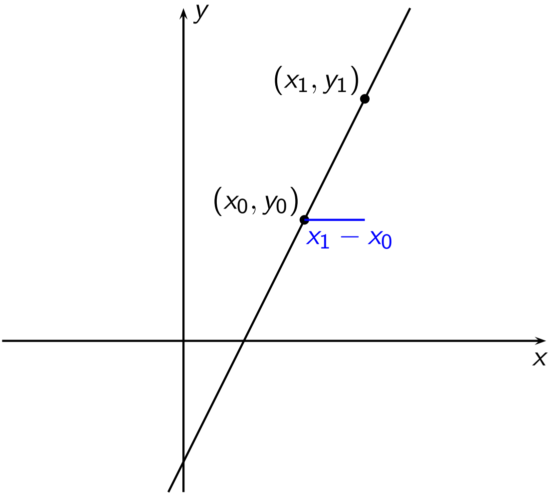
Pendiente de una recta

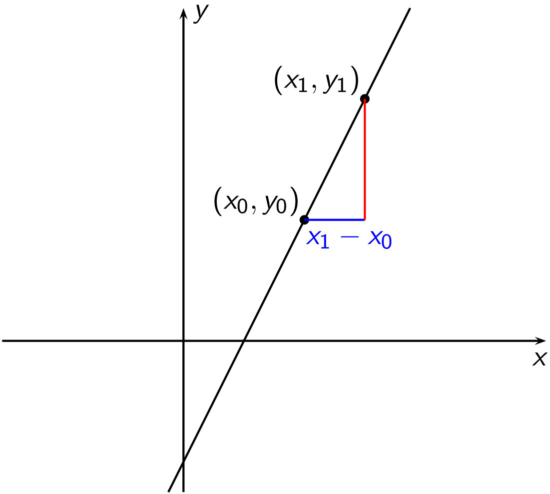


Pendiente de una recta



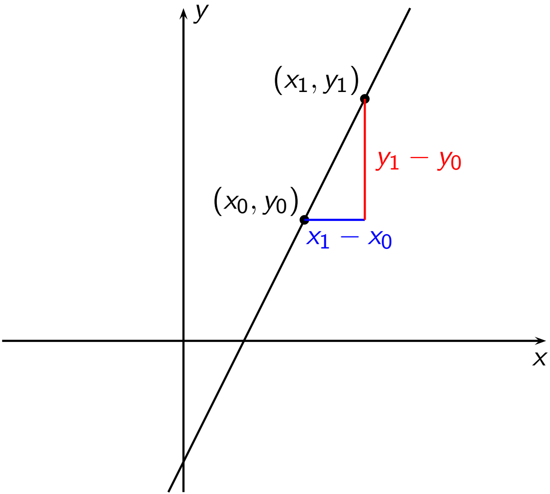
Pendiente de una recta





y
(x_1, y_1)
(x_0, y_0)
$x_1 - x_0$
x

Pendiente de una recta



Ecuación general de la recta

Si una recta pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) definimos la pendiente de la recta como

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

donde $x_0 \neq x_1$, que nos da el grado de inclinación de la recta con respecto al eje x.

Ecuación general de la recta

Si una recta pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) definimos la pendiente de la recta como

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

donde $x_0 \neq x_1$, que nos da el grado de inclinación de la recta con respecto al eje x.

Una recta con pendiente cero no tiene inclinación, es decir, es horizontal.

Ecuación general de la recta

Si una recta pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) definimos la pendiente de la recta como

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

donde $x_0 \neq x_1$, que nos da el grado de inclinación de la recta con respecto al eje x.

Una recta con pendiente cero no tiene inclinación, es decir, es horizontal.

La pendiente de una recta vertical no está definida.

Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta que tiene pendiente m y cuyo corte con el eje y está en $y = b$ es

$$y = mx + b.$$

Ecuación general de la recta

Ejemplo

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,-1)$

Ecuación general de la recta

Ejemplo

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,-1)$ hallamos la pendiente:

$$m = \frac{3-(-1)}{2-4} = \frac{4}{-2} = -2,$$

Ecuación general de la recta

Ejemplo

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,-1)$ hallamos la pendiente:

$$m = \frac{3-(-1)}{2-4} = \frac{4}{-2} = -2,$$

y el corte:

Ecuación general de la recta

Ejemplo

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(4, -1)$ hallamos la pendiente:

$$m = \frac{3 - (-1)}{2 - 4} = \frac{4}{-2} = -2,$$

y el corte:

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{ecuación general} \\ -1 &= (-2)(4) + b && \text{sustituimos los valores de } x,\ y,\ m \end{aligned}$$

Ecuación general de la recta

Ejemplo

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,-1)$ hallamos la pendiente:

$$m = \frac{3-(-1)}{2-4} = \frac{4}{-2} = -2,$$

y el corte:

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{ecuación general} \\ -1 &= (-2)(4) + b && \text{sustituimos los valores de } x,\ y,\ m \\ 7 &= b && \text{despejamos } b \\ y &= -2x + 7 && \text{ecuación reemplazando } m \text{ y } b. \end{aligned}$$

Ejercicio

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -7)$ y $(-6, 3)$.
2. Hallar la ecuación de la recta que corta al eje y en $y = -4$ y pasa por el punto $(1, 5)$.
3. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$ y pasa por el punto $(\frac{5}{3}, -7)$.

Gráfica de una expresión lineal

Para graficar $y = 2x + 3$ es suficiente encontrar dos puntos que pertenezcan a esta recta.

Gráfica de una expresión lineal

Para graficar $y = 2x + 3$ es suficiente encontrar dos puntos que pertenezcan a esta recta. Los obtenemos sustituyendo x por dos valores distintos, por ejemplo

$$x = 0 \text{ implica } y = 3$$

Gráfica de una expresión lineal

Para graficar $y = 2x + 3$ es suficiente encontrar dos puntos que pertenezcan a esta recta. Los obtenemos sustituyendo x por dos valores distintos, por ejemplo

$$\mathrm{x} = 0 \text{ implica } \mathrm{y} = 3$$

$$\mathrm{x} = 1 \text{ implica } \mathrm{y} = 5$$

Gráfica de una expresión lineal

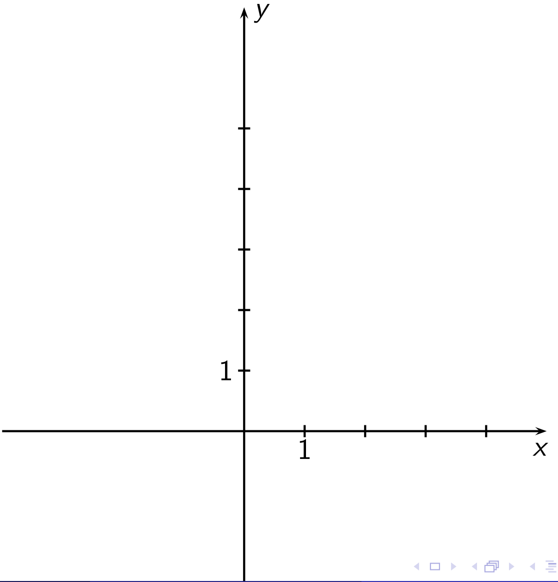
Para graficar $y = 2x + 3$ es suficiente encontrar dos puntos que pertenezcan a esta recta. Los obtenemos sustituyendo x por dos valores distintos, por ejemplo

$$\mathrm{x} = 0 \text{ implica } \mathrm{y} = 3$$

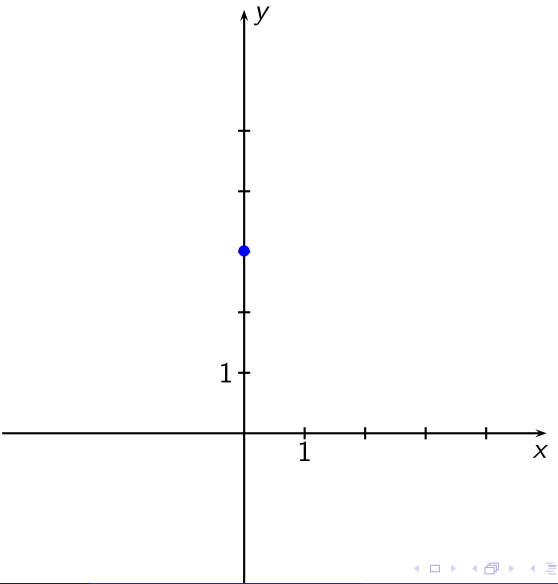
$$\mathrm{x} = 1 \text{ implica } \mathrm{y} = 5$$

Ubicamos en el plano los puntos $(0, 3)$ y $(1, 5)$ y trazamos la recta que contiene estos puntos.

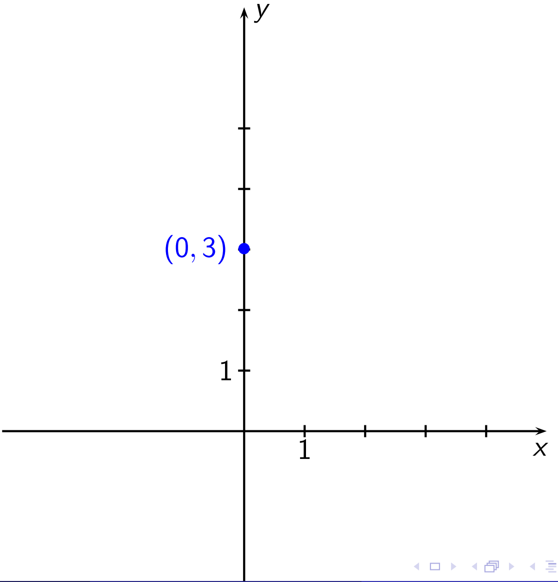
Gráfica de una expresión lineal



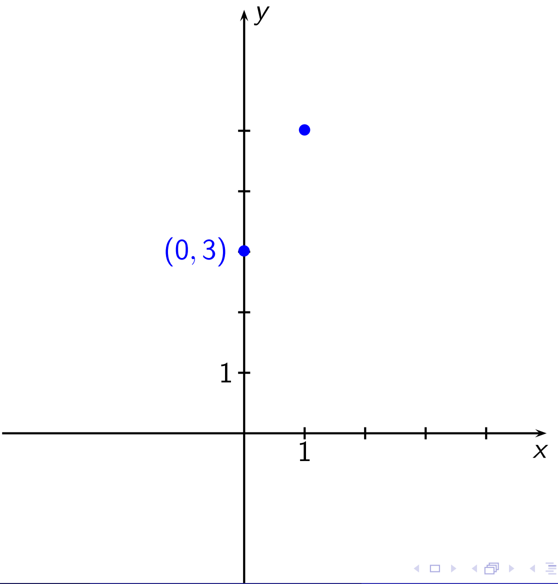
Gráfica de una expresión lineal



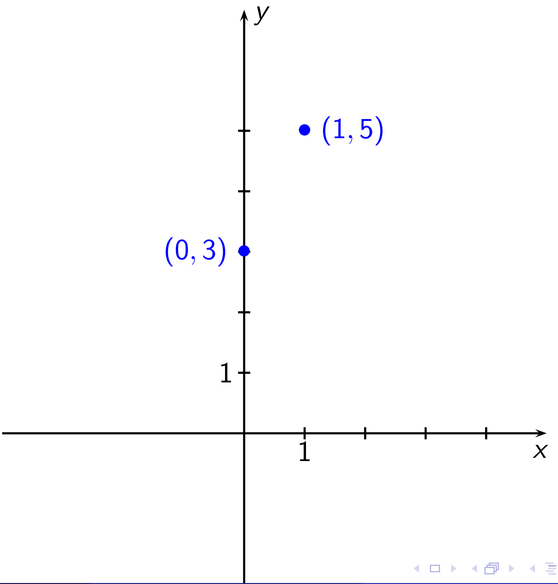
Gráfica de una expresión lineal



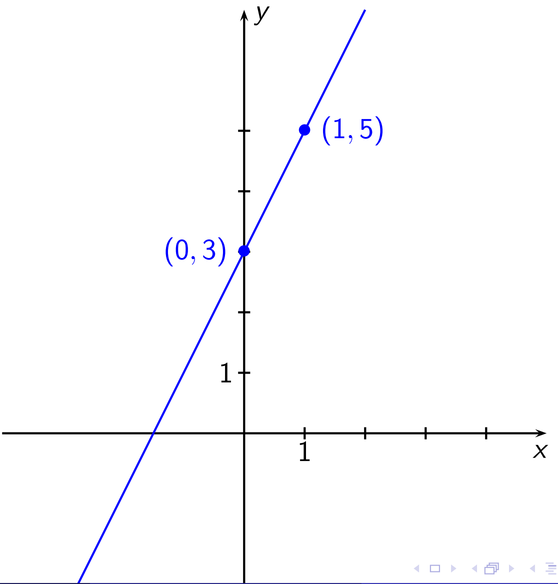
Gráfica de una expresión lineal



Gráfica de una expresión lineal



Gráfica de una expresión lineal



En la recta $y = 2x + 3$, la pendiente es $m = 2$ y el corte con el eje y es $b = 3$

Gráfica de una expresión lineal

En la recta $y = 2x + 3$, la pendiente es $m = 2$ y el corte con el eje y es $b = 3$, así que podemos ubicarnos en el punto $(0, 3)$ y como $m = 2 = \frac{2}{1}$, a partir de este punto avanzamos 1 unidad en la dirección positiva de x

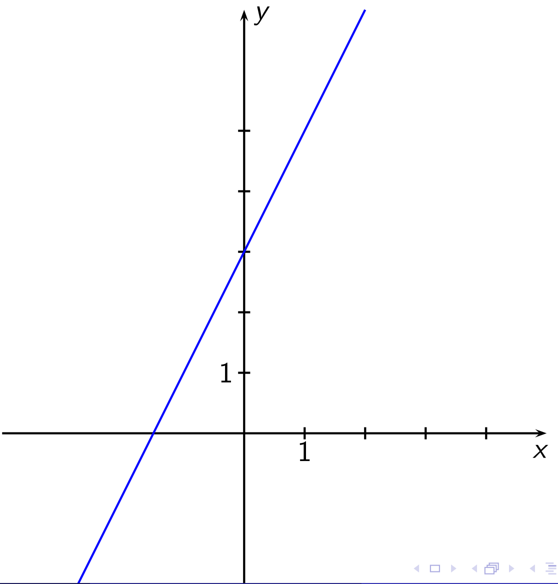
Gráfica de una expresión lineal

En la recta $y = 2x + 3$, la pendiente es $m = 2$ y el corte con el eje y es $b = 3$, así que podemos ubicarnos en el punto $(0, 3)$ y como $m = 2 = \frac{2}{1}$, a partir de este punto avanzamos 1 unidad en la dirección positiva de x y 2 unidades en la dirección positiva de y.

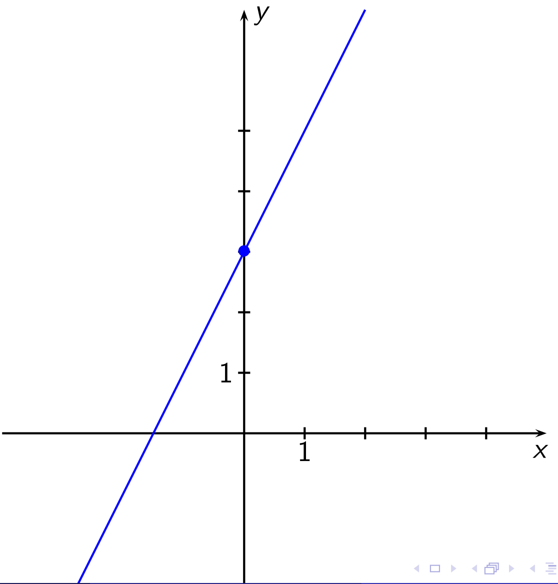
Gráfica de una expresión lineal

En la recta $y = 2x + 3$, la pendiente es $m = 2$ y el corte con el eje y es $b = 3$, así que podemos ubicarnos en el punto $(0, 3)$ y como $m = 2 = \frac{2}{1}$, a partir de este punto avanzamos 1 unidad en la dirección positiva de x y 2 unidades en la dirección positiva de y.
De esta manera determinamos otro punto de la recta: $(1, 5)$ y unimos estos puntos para trazar la gráfica.

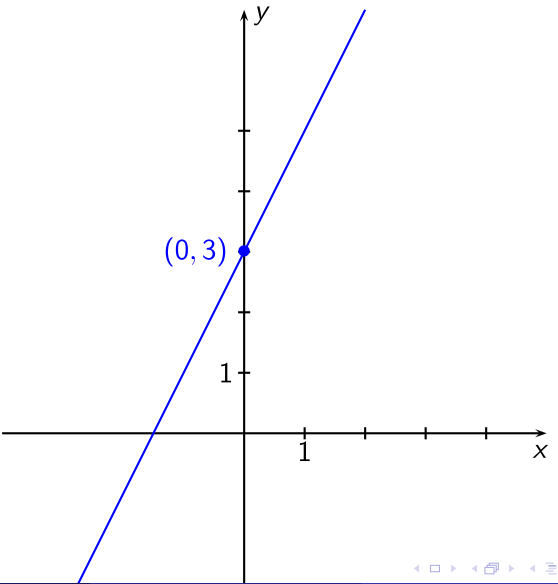
Gráfica de $y = 2x + 3$



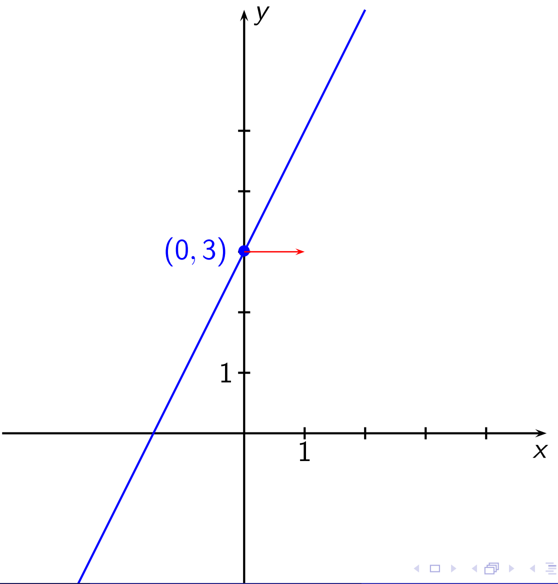
Gráfica de $y = 2x + 3$



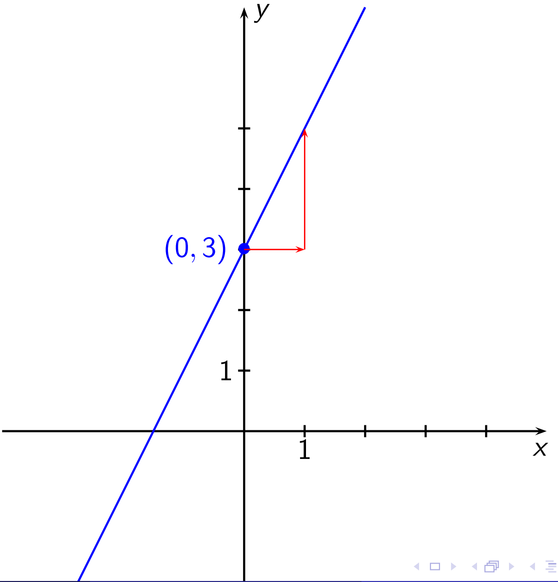
Gráfica de $y = 2x + 3$



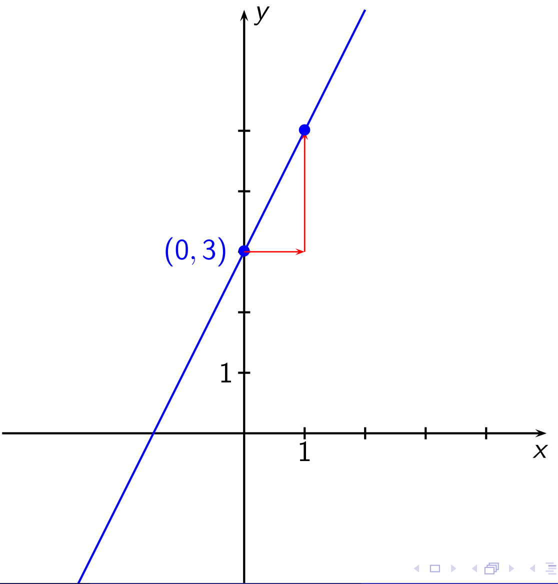
Gráfica de $y = 2x + 3$



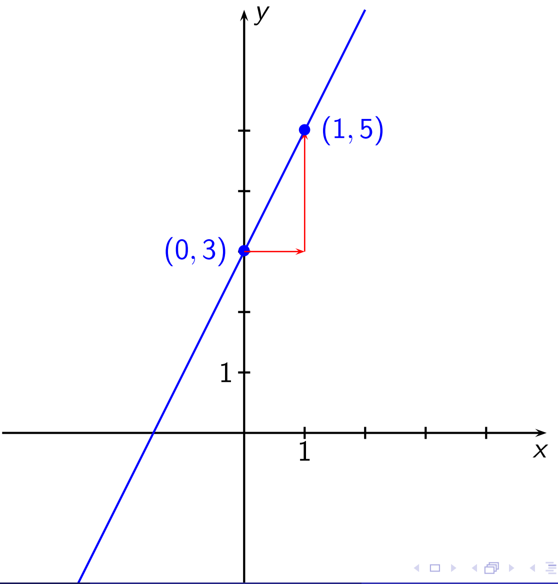
Gráfica de $y = 2x + 3$



Gráfica de $y = 2x + 3$



Gráfica de $y = 2x + 3$



Si la pendiente es negativa,

Ejemplo

En la recta $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

Si la pendiente es negativa,

Ejemplo

En la recta $y = -\frac{4}{3}x - 1$.
A partir del punto $(0, -1)$ (el corte con el eje y)

Si la pendiente es negativa,

Ejemplo

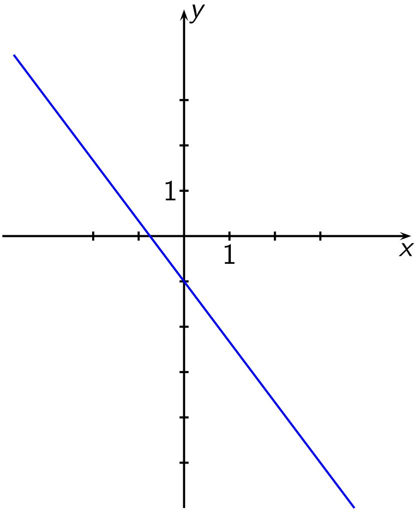
En la recta $y = -\frac{4}{3}x - 1$.
A partir del punto $(0, -1)$ (el corte con el eje y) avanzamos 3 en la dirección positiva de x

Si la pendiente es negativa,

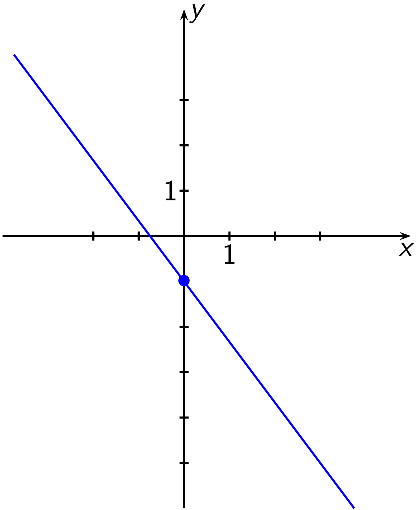
Ejemplo

En la recta $y = -\frac{4}{3}x - 1$.
A partir del punto $(0, -1)$ (el corte con el eje y) avanzamos 3 en la dirección positiva de x y 4 en la dirección negativa de y.

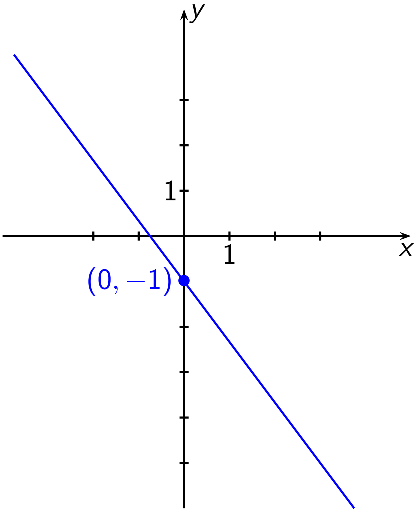
Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



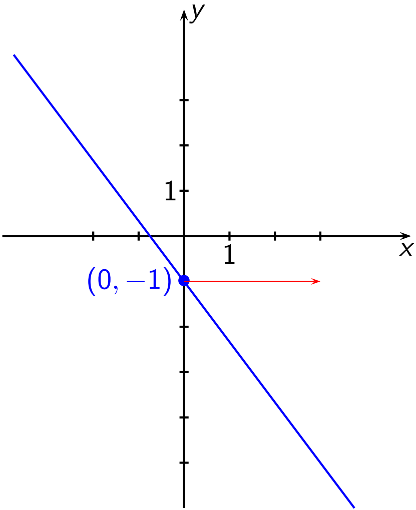
Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



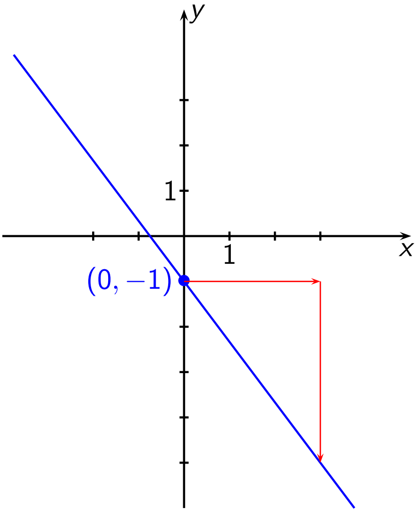
Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



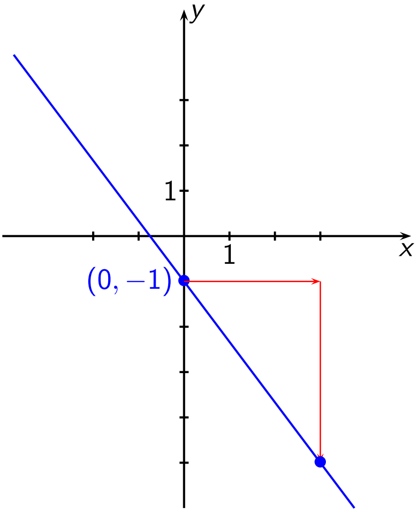
Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



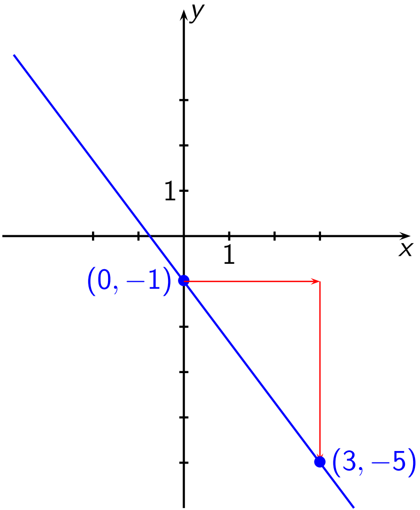
Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



Gráfica de $y = -\frac{4}{3}x - 1$



¿Qué pasa si la pendiente es cero?

Si la pendiente es cero, podemos escribir $m = 0 = \frac{0}{a}$ con $a \neq 0$.

¿Qué pasa si la pendiente es cero?

Si la pendiente es cero, podemos escribir $m = 0 = \frac{0}{a}$ con $a \neq 0$.
Al realizar la gráfica, avanzamos a unidades en la dirección positiva de x y 0 unidades en la dirección positiva de y,

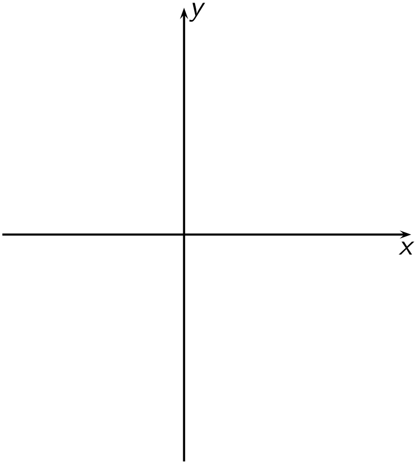
¿Qué pasa si la pendiente es cero?

Si la pendiente es cero, podemos escribir $m = 0 = \frac{0}{a}$ con $a \neq 0$.
Al realizar la gráfica, avanzamos a unidades en la dirección positiva de x y 0 unidades en la dirección positiva de y, la recta resultante es horizontal.

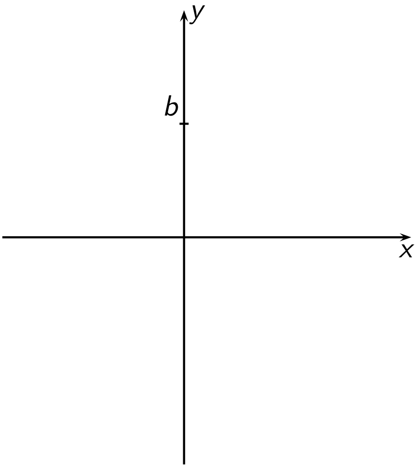
¿Qué pasa si la pendiente es cero?

Si la pendiente es cero, podemos escribir $m = 0 = \frac{0}{a}$ con $a \neq 0$.
Al realizar la gráfica, avanzamos a unidades en la dirección positiva de x y 0 unidades en la dirección positiva de y, la recta resultante es horizontal.
Su ecuación es $y = b$.

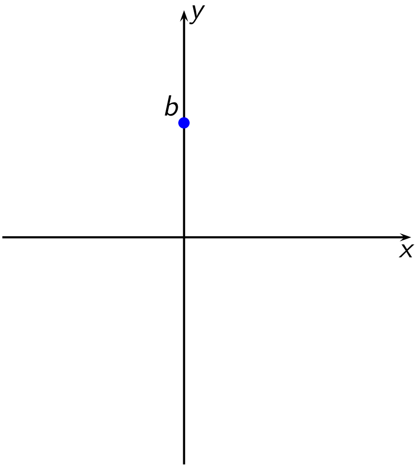
Gráfica de $y = b$



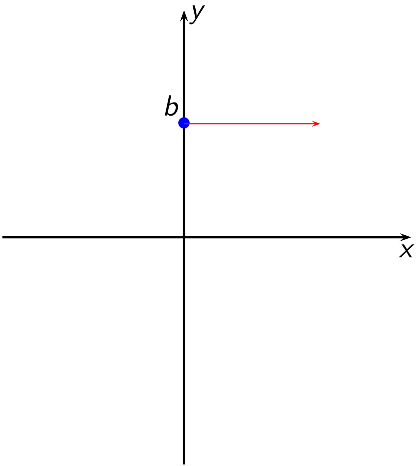
Gráfica de $y = b$



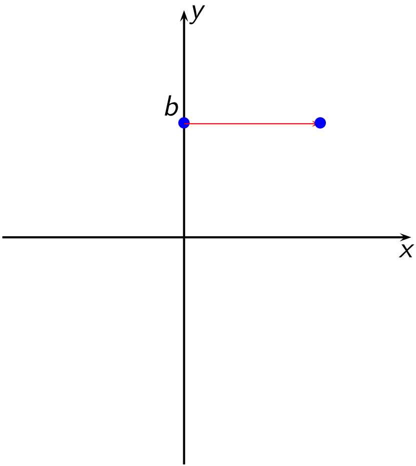
Gráfica de $y = b$



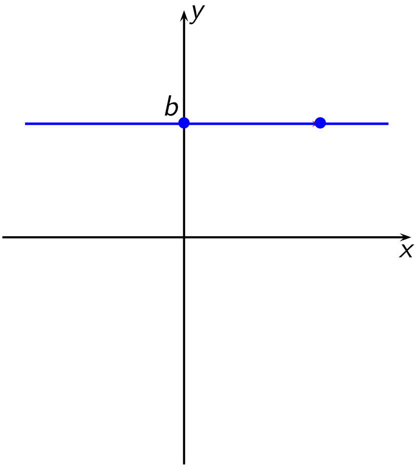
Gráfica de $y = b$



Gráfica de $y = b$



Gráfica de $y = b$



Ejercicio

Realice la gráfica de $y = \frac{3}{2}x - 4$ y de $y = \frac{3}{2}x - 1$ en el mismo plano. ¿Qué relación existe entre las rectas?

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente , ó ambas son verticales.

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente , ó ambas son verticales.

¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

Paralelas y Perpendiculares

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente , ó ambas son verticales.

¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

Rectas Perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1

Paralelas y Perpendiculares

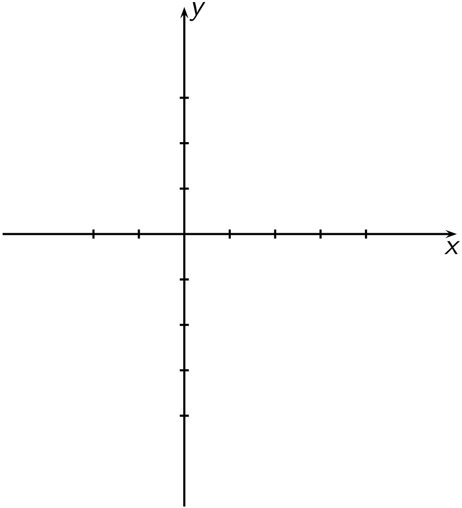
Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente , ó ambas son verticales.

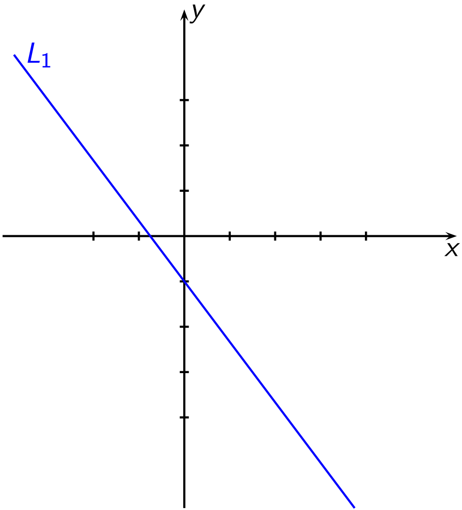
¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

Rectas Perpendiculares

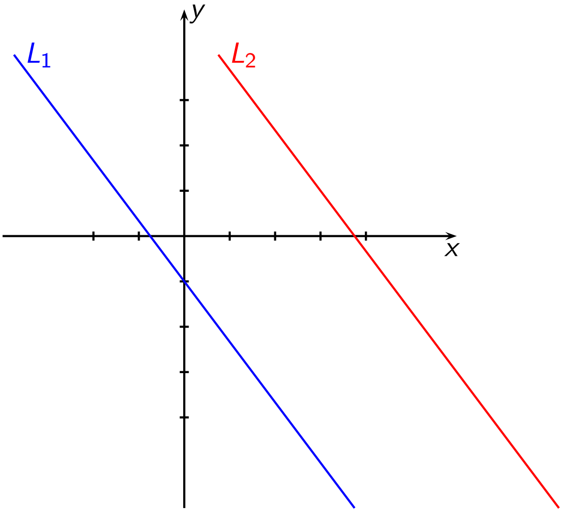
Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 , ó si una es vertical y la otra es horizontal.

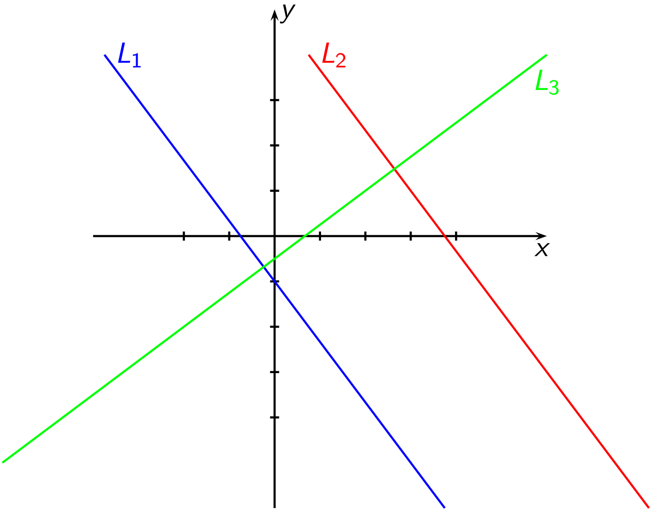

y
x

Rectas paralelas y perpendiculares



Rectas paralelas y perpendiculares





y
L_1
L_2
L_3
x

Ejercicio

Realice la gráfica de $y = \frac{5}{3}x + 2$ y de $y = -\frac{3}{5}x - 1$ en el mismo plano.

Ejercicio

1. Encuentre la ecuación de la paralela a $3y + 4x = 2$ que pasa por el punto $(3, -1)$.
2. Encuentre la ecuación de la perpendicular a $2y - 6x - 5 = 0$ que pasa por el punto $(2, 4)$.
3. Encuentre el punto de corte de las rectas $L_1 : 2y - 4x = 8$ y $L_2 : 3x + 4y = -1$.
4. Encuentre la ecuación de la paralela a L_2 que pasa por $(-3, 3)$.

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Circunferencia

Una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano cuya distancia al centro es r.

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Circunferencia

Una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano cuya distancia al centro es r.
Si un punto arbitrario $P(x, y)$ del plano pertenece a la circunferencia, satisface

$$d(P, C) = r$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Circunferencia

Una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano cuya distancia al centro es r.
Si un punto arbitrario $P(x, y)$ del plano pertenece a la circunferencia, satisface

$$d(P, C) = r$$
$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Circunferencia

Una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano cuya distancia al centro es r.
Si un punto arbitrario $P(x, y)$ del plano pertenece a la circunferencia, satisface

$$d(P, C) = r$$
$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

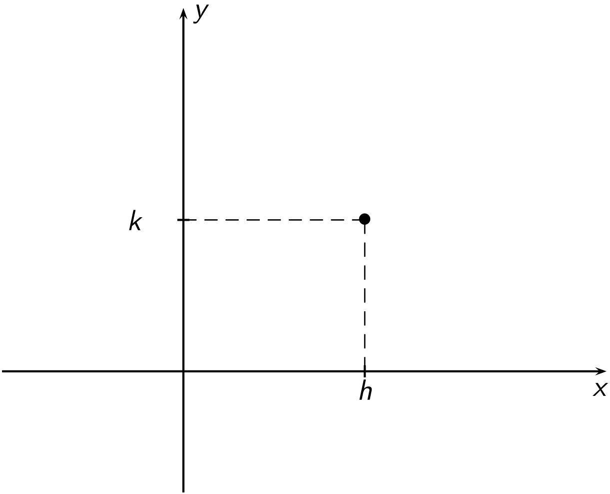
Ecuación cartesiana de la circunferencia

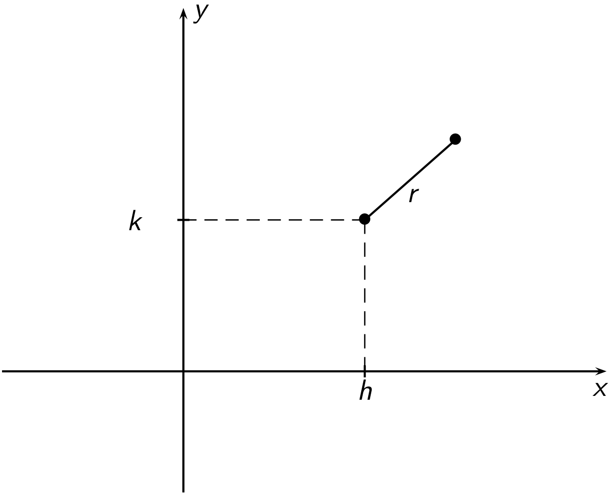
Circunferencia

Una circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano cuya distancia al centro es r.
Si un punto arbitrario $P(x,y)$ del plano pertenece a la circunferencia, satisface

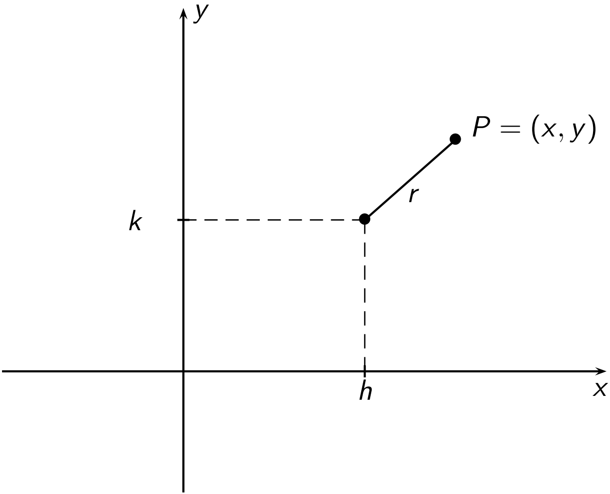
$$d(P,C) = r$$
$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

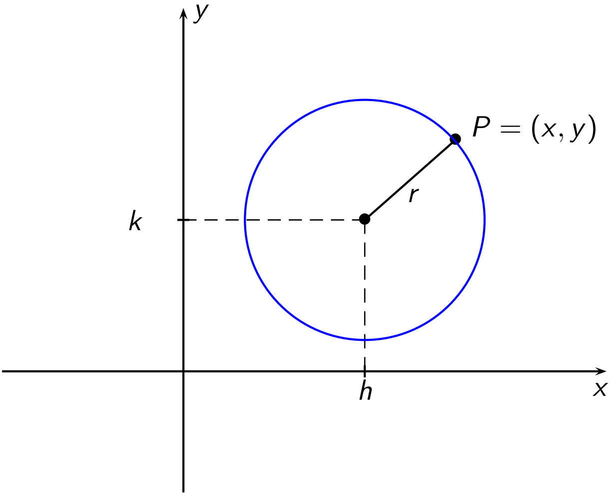



y
k
r
h
x

Ecuación cartesiana de la circunferencia



Ecuación cartesiana de la circunferencia



Ecuación cartesiana de la circunferencia

Si el punto C es el origen

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Si el punto C es el origen la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Si el punto C es el origen la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Si además $r = 1$, la circunferencia se conoce como circunferencia unitaria.

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-2, 4)$ y radio 3.

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-2, 4)$ y radio 3.

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-2, 4)$ y radio 3.

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-2, 4)$ y radio 3.

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + (y-4)^2 &= 3^2 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 &= 9 \\ x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-2, 4)$ y radio 3.

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$
$$x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0.$$

Dada esta ecuación, ¿cómo encontramos el centro y el radio?

Ejemplo

Completamos el cuadrado, así:

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Completamos el cuadrado, así:

$$x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Completamos el cuadrado, así:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 &= 0 \\ x^2 + 4x \qquad + y^2 - 8y \qquad &= -11 \end{aligned}$$

Ejemplo

Completamos el cuadrado, así:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 &= 0 \\
x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y \qquad &= -11 + 4
\end{aligned}
$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Ejemplo

Completamos el cuadrado, así:

$$x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = -11 + 4 + 16$$

Ejemplo

Completamos el cuadrado, así:

$$x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = -11 + 4 + 16$$
$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 &= 0 \\ x^2 - 6x \qquad + y^2 + 4y \qquad &= -12 \end{aligned}$$

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 &= 0 \\ x^2 - 6x \color{red}{+ 9} + y^2 + 4y \qquad &= -12 \color{red}{+ 9} \end{aligned}$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = -12 + 9 + 4$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 &= 0 \\
x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 &= -12 + 9 + 4 \\
(x-3)^2 + (y+2)^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Encontrar el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 &= -12 + 9 + 4 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Esta circunferencia tiene centro en $(3, -2)$ y radio 1.

Ecuación cartesiana de la circunferencia

¿Toda ecuación del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa una circunferencia?

- $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 15 = 0$
- $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0.$