MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autora: Jeanneth Galeano Peñaloza
Edición: Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Sistemas Numéricos

Números Naturales

Números Naturales

Fueron creados por la mente humana para contar los objetos en diversas colecciones.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Números Naturales

Números Naturales

Fueron creados por la mente humana para contar los objetos en diversas colecciones.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Para algunos autores los naturales comienzan en 1 y al conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ lo llaman el conjunto de enteros no-negativos o números cardinales. En éste último caso, el 0 corresponde al cardinal del conjunto vacío.

Números Naturales

Fueron creados por la mente humana para contar los objetos en diversas colecciones.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Para algunos autores los naturales comienzan en 1 y al conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ lo llaman el conjunto de enteros no-negativos o números cardinales. En éste último caso, el 0 corresponde al cardinal del conjunto vacío.

En este curso consideramos que los naturales comienzan en 0.

Números Naturales

Consideremos la suma en el conjunto de los números naturales.

Propiedades de la suma en los naturales

Para todo a, b, c números naturales,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Consideremos la suma en el conjunto de los números naturales.

Propiedades de la suma en los naturales

Para todo a, b, c números naturales,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$

Números Naturales

Consideremos la suma en el conjunto de los números naturales.

Propiedades de la suma en los naturales

Para todo a, b, c números naturales,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$
- Existencia de elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$

Consideremos la suma en el conjunto de los números naturales.

Propiedades de la suma en los naturales

Para todo a, b, c números naturales,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$
- Existencia de elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$
- Existencia de inverso aditivo

$$3 + \square = 0?$$

Falla!!!!

Números Enteros

El conjunto formado por los números naturales y sus opuestos.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

En el conjunto de los números enteros consideramos dos operaciones: suma y multiplicación.

Propiedades de la suma en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

En el conjunto de los números enteros consideramos dos operaciones: suma y multiplicación.

Propiedades de la suma en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$

Números Enteros

En el conjunto de los números enteros consideramos dos operaciones: suma y multiplicación.

Propiedades de la suma en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$
- Existencia de elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$

En el conjunto de los números enteros consideramos dos operaciones: suma y multiplicación.

Propiedades de la suma en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$
- Existencia de elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$
- Existencia de inverso aditivos $a + (-a) = 0$

En el conjunto de los números enteros consideramos dos operaciones: suma y multiplicación.

Propiedades de la suma en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa $a + b = b + a$
- Existencia de elemento neutro $a + 0 = 0 + a = a$
- Existencia de inverso aditivos $a + (-a) = 0$

¿Cuál es el inverso aditivo de cero?

Propiedades de la multiplicación en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a(bc) = (ab)c$

Propiedades de la multiplicación en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a(bc) = (ab)c$
- Conmutativa $ab = ba$

Propiedades de la multiplicación en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a(bc) = (ab)c$
- Conmutativa $ab = ba$
- Existencia de elemento neutro $a1 = 1a = a$

Propiedades de la multiplicación en los enteros

Para todo a, b, c números enteros,

- Asociativa $a(bc) = (ab)c$
- Conmutativa $ab = ba$
- Existencia de elemento neutro $a1 = 1a = a$
- Existencia de inverso multiplicativo

$$5 \cdot \square = 1?$$

Falla!!!!

Números Racionales

Es el conjunto formado por los enteros y cocientes de enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ \ b \neq 0 \right\}$$

Números Racionales

El conjunto de los números racionales, con las operaciones suma y multiplicación satisface las siguientes propiedades.

Propiedades

Para todo a, b, c números racionales,

- Asociativas

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

Propiedades

Para todo a, b, c números racionales,

- Asociativas

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

- Conmutativas

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

Números Racionales

Propiedades

- Existencia de elementos neutros
  Existe un elemento 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$
  Existe un elemento 1 tal que $a1 = 1a = a$

Propiedades

- Existencia de elementos neutros
  Existe un elemento 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$
  Existe un elemento 1 tal que $a1 = 1a = a$
- Existencia de inversos aditivos y multiplicativos
  Para todo a racional existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ Para todo racional $a \neq 0$ existe $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$

Propiedades

- Existencia de elementos neutros
  Existe un elemento 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$
  Existe un elemento 1 tal que $a1 = 1a = a$
- Existencia de inversos aditivos y multiplicativos
  Para todo a racional existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ Para todo racional $a \neq 0$ existe $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$
- Distributiva de la multiplicación respecto de la suma

$$a(b + c) = ab + ac$$

Números Racionales

Los números racionales son de la forma $\frac{a}{b}$, al realizar la división encontramos la expresión decimal del número. Dicha división puede terminar, como en

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

Números Racionales

Los números racionales son de la forma $\frac{a}{b}$, al realizar la división encontramos la expresión decimal del número. Dicha división puede terminar, como en

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

o puede ser infinita, pero con un tramo de cifras que se repite, como en

$$\frac{2}{11} = 0,1818181818\ldots,$$

Los números racionales son de la forma $\frac{a}{b}$, al realizar la división encontramos la expresión decimal del número. Dicha división puede terminar, como en

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

o puede ser infinita, pero con un tramo de cifras que se repite, como en

$$\frac{2}{11} = 0,1818181818\ldots,$$

Podemos decir entonces, que los números racionales son aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica.

Ejercicio

Encontrar la expresión decimal de los siguientes números

1. $\frac{25}{4}$
2. $\frac{17}{3}$
3. $\frac{55}{200}$
4. $\frac{29}{7}$

Para encontrar la expresión racional de $1,\overline{25}$ procedemos de la siguiente forma,

$$x = 1.\overline{25}$$

Para encontrar la expresión racional de $1,\overline{25}$ procedemos de la siguiente forma,

$$x = 1.\overline{25}$$
$$100x = 125.\overline{25}$$

Para encontrar la expresión racional de $1,\overline{25}$ procedemos de la siguiente forma,

$$
\begin{aligned}
x &= 1.\overline{25} \\
100x &= 125.\overline{25} \\
99x &= 124 && \text{Restando}
\end{aligned}
$$

Números Racionales

Para encontrar la expresión racional de $1,\overline{25}$ procedemos de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} x &= 1.\overline{25} \\ 100x &= 125.\overline{25} \\ 99x &= 124 && \text{Restando} \\ x &= \frac{124}{99} \end{aligned}$$

Ejercicio

Encontrar la expresión racional de los siguientes números

1. $6.\overline{1}$
2. $4.\overline{82}$
3. $93{,}47\overline{34}$
4. $78, 46\overline{357}$

Números Irracionales

Existe otro tipo de números, que no pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, éstos se conocen como irracionales.

Números Irracionales

Existe otro tipo de números, que no pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, éstos se conocen como irracionales.

Ejemplos

- $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

Números Irracionales

Existe otro tipo de números, que no pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, éstos se conocen como irracionales.

Ejemplos

- $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$
- $\pi = 3,141592\ldots$

Números Irracionales

Números Irracionales

Existe otro tipo de números, que no pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, éstos se conocen como irracionales.

Ejemplos

- $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$
- $\pi = 3,141592\ldots$
- $0,1234567891011121314151617\ldots$

Números Irracionales

Existe otro tipo de números, que no pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, éstos se conocen como irracionales.

Ejemplos

- $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$
- $\pi = 3,141592\ldots$
- $0,1234567891011121314151617\ldots$
- $1,2122122212222122222122222\ldots$

Ejercicio

Construya un número irracional entre 5 y 6.

- ¿La suma de irracionales es irracional?

Números Irracionales

- ¿La suma de irracionales es irracional?
- ¿La multiplicación de irracionales es irracional?

Números Reales

El conjunto de los números reales está formado por los racionales y los irracionales. Se nota $\mathbb{R}$.

Números Reales

El conjunto de los números reales está formado por los racionales y los irracionales. Se nota $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ satisface todas las propiedades que vimos que cumplen los números racionales. Tanto los reales como los racionales, con estas propiedades reciben el nombre de cuerpos.

Note que

Note que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Note que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Note que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Muestre que estas contenencias son estrictas.

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre?

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$
- $-(-a) = a$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
- $(-a)(-b) = ab$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $(-1)a = -a$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$ entonces $ac = bc$
- Si $ac = bc$ entonces $a = b$ ¿Siempre? si $c \neq 0$
- $a \cdot 0 = 0$ para todo a
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $(-1)a = -a$
- Si $a \neq 0$ entonces el inverso multiplicativo de a se nota a^{-1} y $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Otras propiedades de los números reales

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Para todo a, b, c, d números reales.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Representación gráfica

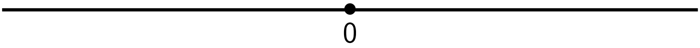
A continuación vemos cómo podemos representar en una recta cada uno de estos conjuntos.

Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta,

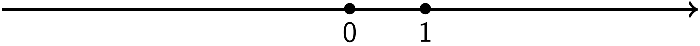
Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta, escogemos un punto que representa el 0



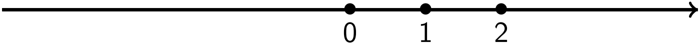
Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta, escogemos un punto que representa el 0 y otro, normalmente a la derecha, que representa el 1.



Representación gráfica de los naturales

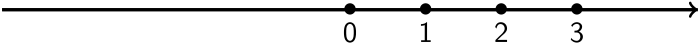
Sobre una recta, escogemos un punto que representa el 0 y otro, normalmente a la derecha, que representa el 1.



Luego, a la misma distancia, marcamos el 2,

Representación gráfica de los naturales

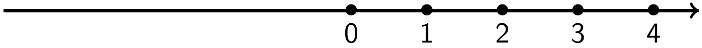
Sobre una recta, escogemos un punto que representa el 0 y otro, normalmente a la derecha, que representa el 1.



Luego, a la misma distancia, marcamos el 2, el 3

Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta, escogemos un punto que representa el 0 y otro, normalmente a la derecha, que representa el 1.



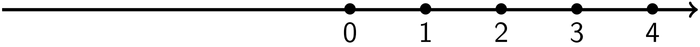
Luego, a la misma distancia, marcamos el 2, el 3 y así sucesivamente, de manera que queden todos los naturales en dicha recta.

Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta,

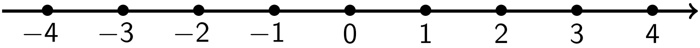
Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta, marcamos los números naturales,



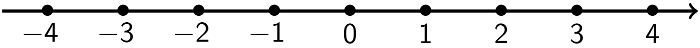
Representación gráfica de los naturales

Sobre una recta, marcamos los números naturales, y luego, hacia la izquierda los inversos aditivos de los números naturales



Representación gráfica de los naturales

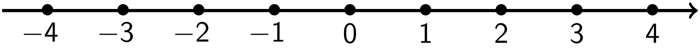
Sobre una recta, marcamos los números naturales, y luego, hacia la izquierda los inversos aditivos de los números naturales



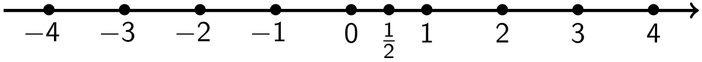
y tenemos la representación en la recta de los números enteros.

Representación gráfica de los racionales

Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo

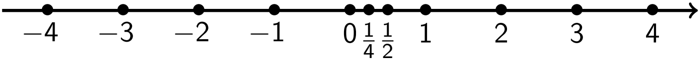


Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo $\frac{1}{2}$,



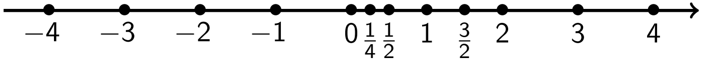
Representación gráfica de los racionales

Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,



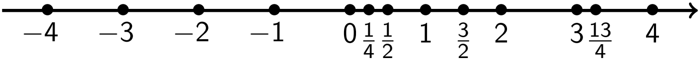
Representación gráfica de los racionales

Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$,



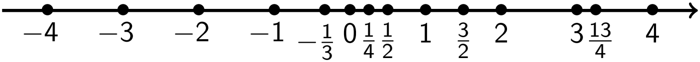
Representación gráfica de los racionales

Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{4}$,



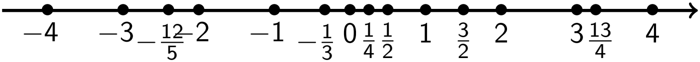
Representación gráfica de los racionales

Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{4}$, $-\frac{1}{3}$,



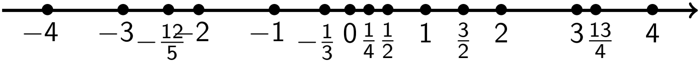
Representación gráfica de los racionales

Sobre la misma recta, podemos ubicar por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{-12}{5}$.



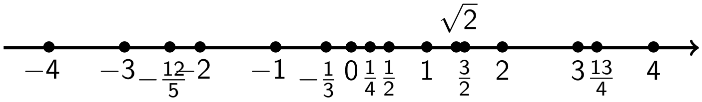
Representación gráfica de los reales

Podemos poner sobre la recta algunos irrracionales, por ejemplo



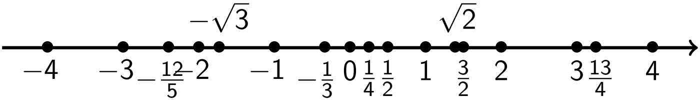
Representación gráfica de los reales

Podemos poner sobre la recta algunos irrracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$,



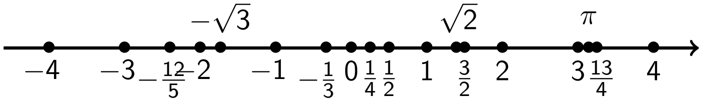
Representación gráfica de los reales

Podemos poner sobre la recta algunos irrracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$,



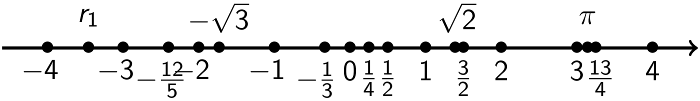
Representación gráfica de los reales

Podemos poner sobre la recta algunos irrracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π,



Representación gráfica de los reales

Podemos poner sobre la recta algunos irrracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π, $r_1 = -3,45789101112\ldots$



Los números que se encuentran a la derecha del cero se llaman **números reales positivos**,

Números reales

Los números que se encuentran a la derecha del cero se llaman **números reales positivos**, los que se encuentran a la izquierda se llaman **números reales negativos**.

Los números que se encuentran a la derecha del cero se llaman **números reales positivos**, los que se encuentran a la izquierda se llaman **números reales negativos**. El número cero no es positivo ni negativo.

Números reales

- Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.

- Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
- Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

- Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
- Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.
- Si a es positivo, entonces $\frac{1}{a}$ es positivo.

- Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
- Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.
- Si a es positivo, entonces $\frac{1}{a}$ es positivo.
- Si a es negativo, entonces $\frac{1}{a}$ es negativo.

Ejercicio

- Si $a = \frac{3}{5}$, entonces $-a =$ y $\frac{1}{a} =$
- Si $a = 281$, entonces $-a =$ y $\frac{1}{a} =$
- Si $a = -\pi$, entonces $-a =$ y $\frac{1}{a} =$
- Si $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $-a =$ y $\frac{1}{a} =$

Parte II

Orden

Orden

$a > b$ se lee a *es mayor* que b,

significa que $a - b$ es positivo.

En la recta real a está a la derecha de b.

Orden

$a > b$ se lee *a es mayor* que b,

significa que $a - b$ es positivo.

En la recta real a está a la derecha de b.

$a < b$ se lee *a es menor* que b,

significa que $a - b$ es negativo.

En la recta real a está a la izquierda de b.

Ejercicio

Organice los siguientes números en orden ascendente.

$\frac{1}{3}$; $0,333$; $0,31323334353637383940414243444 5\ldots$; $0,3$; $0,32$; $\frac{99}{300}$; $\frac{98}{300}$.

Orden

Ley de la tricotomía

Si a y b son números reales, entonces una y solo una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a = b, \qquad a < b \qquad \text{o bien} \qquad a > b$$

Orden

Ley de la tricotomía

Si a y b son números reales, entonces una y solo una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a = b, \qquad a < b \qquad \text{o bien} \qquad a > b$$

Ley de los signos

- Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.

Orden

Ley de la tricotomía

Si a y b son números reales, entonces una y solo una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a = b, \qquad a < b \qquad \text{o bien} \qquad a > b$$

Ley de los signos

- Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.
- Si a y b tienen signos opuestos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Intervalos

Un intervalo es un subconjunto de la recta real, que contiene todos los puntos que cumplen ciertas desigualdades: $x > a$, $x \geq a$, $x < b$, $x \leq b$ o $a < x < b$.

Un intervalo es un subconjunto de la recta real, que contiene todos los puntos que cumplen ciertas desigualdades: $x > a$, $x \geq a$, $x < b$, $x \leq b$ o $a < x < b$.

Note que $a < x < b$ es una expresión resumida de $a < x$ y $x < b$.

Notación para intervalos

1. $(a, b) = \{x|\ a < x < b\}$

Notación para intervalos

1. $(a, b) = \{x |\ a < x < b\}$
2. $(a, b] = \{x |\ a < x \leq b\}$

Notación para intervalos

1. $(a, b) = \{x | \ a < x < b\}$
2. $(a, b] = \{x | \ a < x \leq b\}$
3. $[a, b) = \{x | \ a \leq x < b\}$

Notación para intervalos

1. $(a, b) = \{x|\ a < x < b\}$
2. $(a, b] = \{x|\ a < x \leq b\}$
3. $[a, b) = \{x|\ a \leq x < b\}$
4. $[a, b] = \{x|\ a \leq x \leq b\}$

Notación para intervalos

1. $(a, \infty) = \{x | \ x > a\}$ ♣

♣ Recuerde que ∞ NO es un número, solo nos da la idea de que los elementos de ese intervalo se *extienden* infinitamente en los positivos.

Notación para intervalos

1. $(a, \infty) = \{x |\ x > a\}$ ♣
2. $[a, \infty) = \{x |\ x \geq a\}$

♣ Recuerde que ∞ NO es un número, solo nos da la idea de que los elementos de ese intervalo se *extienden* infinitamente en los positivos.

Notación para intervalos

1. $(a, \infty) = \{x|\ x > a\}$ ♣
2. $[a, \infty) = \{x|\ x \geq a\}$
3. $(-\infty, b) = \{x|\ x < b\}$ ♠

♣ Recuerde que ∞ NO es un número, solo nos da la idea de que los elementos de ese intervalo se *extienden* infinitamente en los positivos.
♠ aquí el signo $-$ nos indica la parte negativa de la recta real.

Notación para intervalos

1. $(a, \infty) = \{x |\ x > a\}$ ♣
2. $[a, \infty) = \{x |\ x \geq a\}$
3. $(-\infty, b) = \{x |\ x < b\}$ ♠
4. $(-\infty, b] = \{x |\ x \leq b\}$

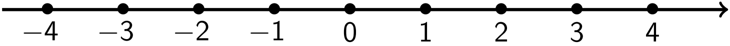
♣ Recuerde que ∞ NO es un número, solo nos da la idea de que los elementos de ese intervalo se *extienden* infinitamente en los positivos.
♠ aquí el signo $-$ nos indica la parte negativa de la recta real.

Notación para intervalos

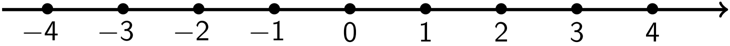
1. $(a, \infty) = \{x|\ x > a\}$ ♣
2. $[a, \infty) = \{x|\ x \geq a\}$
3. $(-\infty, b) = \{x|\ x < b\}$ ♠
4. $(-\infty, b] = \{x|\ x \leq b\}$
5. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

♣ Recuerde que ∞ NO es un número, solo nos da la idea de que los elementos de ese intervalo se *extienden* infinitamente en los positivos.
♠ aquí el signo $-$ nos indica la parte negativa de la recta real.

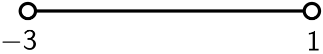
Ejemplos de intervalos



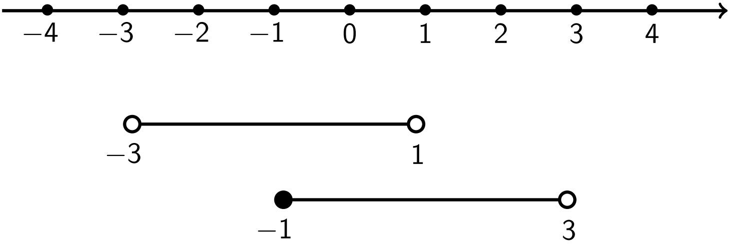
Ejemplos de intervalos



$(-3, 1)$



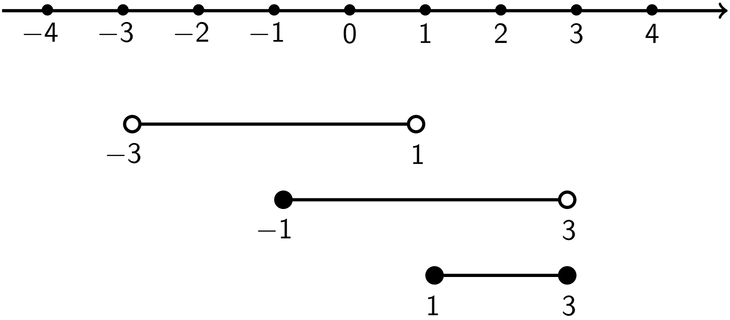
Ejemplos de intervalos



$(-3, 1)$

$[-1, 3)$

Ejemplos de intervalos

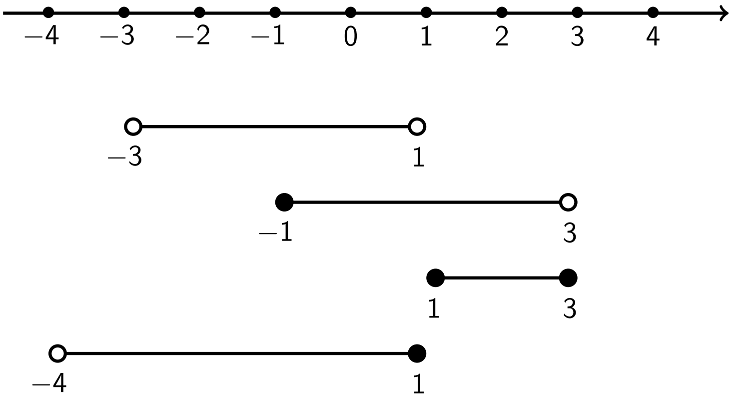


$(-3, 1)$

$[-1, 3)$

$[1, 3]$

Ejemplos de intervalos



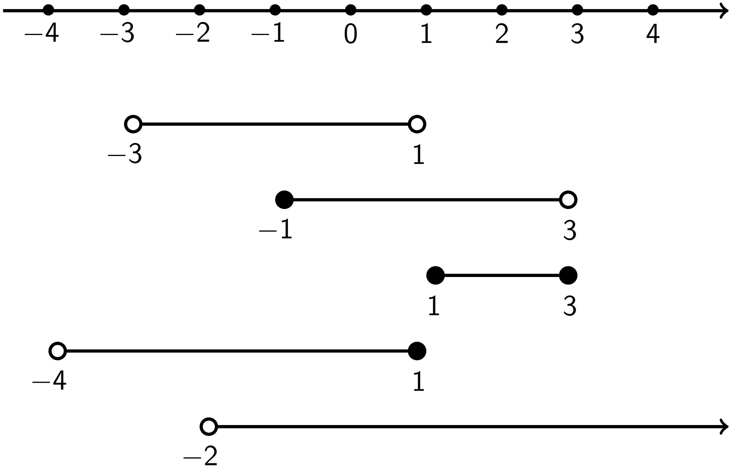
$(-3, 1)$

$[-1, 3)$

$[1, 3]$

$(-4, 1]$

Ejemplos de intervalos



$(-3, 1)$

$[-1, 3)$

$[1, 3]$

$(-4, 1]$

$(-2, \infty)$

Parte III

Valor absoluto

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real corresponde a la distancia que hay entre él y el origen.

El valor absoluto de un número real corresponde a la distancia que hay entre él y el origen.

Definición

Sea x un número real,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

- $|24| =$

Valor Absoluto

Ejemplos

- $|24| = \ 24$
- $|-3,7| =$

Ejemplos

- $|24| = \ 24$
- $|-3,7| = \ 3,7$
- $|-12,4| =$

Valor Absoluto

Ejemplos

- $|24| = \ 24$
- $|-3,7| = \ 3,7$
- $|-12,4| = \ 12,4$

Valor Absoluto

Ejemplos

- $|24| = \ 24$
- $|-3,7| = \ 3,7$
- $|-12,4| = \ 12,4$
-

$$|x - 1|$$

Valor Absoluto

Ejemplos

- $|24| = \ 24$
- $|-3,7| = \ 3,7$
- $|-12,4| = \ 12,4$
- $$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si } x-1 < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

- $|24| = 24$
- $|-3,7| = 3,7$
- $|-12,4| = 12,4$
- $$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si } x-1 < 0 \end{cases}$$
  $$= \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Valor Absoluto

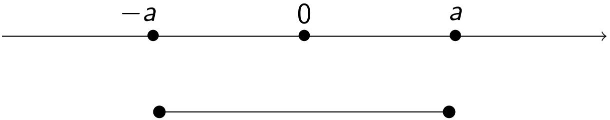
Sea $a \geq 0$

$|x| \leq a$

Valor Absoluto

Sea $a \geq 0$

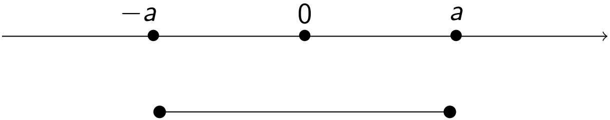
$|x| \leq a$ equivale a $-a \leq x \leq a$



Valor Absoluto

Sea $a \geq 0$

$|x| \leq a$ equivale a $-a \leq x \leq a$

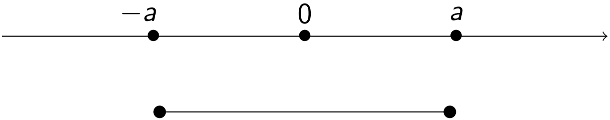


$|x| \geq a$

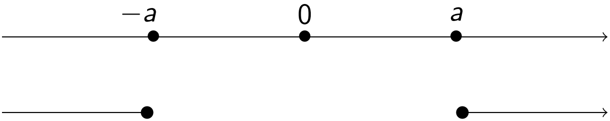
Valor Absoluto

Sea $a \geq 0$

$|x| \leq a$ equivale a $-a \leq x \leq a$



$|x| \geq a$ equivale a $x \geq a$ o $x \leq -a$



Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.

Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$

Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.
- $|x| \geq 0$

Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.
- $|x| \geq 0$ tiene a todos los reales como solución.

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.
- $|x| \geq 0$ tiene a todos los reales como solución.
- $|x| < 0$

Valor Absoluto

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.
- $|x| \geq 0$ tiene a todos los reales como solución.
- $|x| < 0$ no tiene solución.

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.
- $|x| \geq 0$ tiene a todos los reales como solución.
- $|x| < 0$ no tiene solución.
- $|x| > 0$

¿Qué pasa si a es negativo?

- $|x| \leq a$ no tiene solución puesto que el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero.
- $|x| \geq a$ tiene como solución a todos los números reales.

¿Qué pasa si $a = 0$?

- $|x| \leq 0$ tiene a $x = 0$ como única solución.
- $|x| \geq 0$ tiene a todos los reales como solución.
- $|x| < 0$ no tiene solución.
- $|x| > 0$ tiene como solución a todos los reales, excepto al cero.

Valor Absoluto

Propiedades

- $|a| \geq 0$

Valor Absoluto

Propiedades

- $|a| \geq 0$
- $|a| = |-a|$

Valor Absoluto

Propiedades

- $|a| \geq 0$
- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a|\,|b|$

Valor Absoluto

Propiedades

- $|a| \geq 0$
- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a|\,|b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Valor Absoluto

Desigualdad triangular

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Valor Absoluto

Desigualdad triangular

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Ejercicio. Encuentre números a y b para los que se cumpla que

(i) $|a + b| < |a| + |b|$

(ii) $|a + b| = |a| + |b|$

Distancia

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta real está dada por

$$d(a, b) = |b - a| .$$

Distancia

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta real está dada por

$$d(a, b) = |b - a| \,.$$

Observe que $d(a, b) = d(b, a)$.