# MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autora: Jeanneth Galeano Peñaloza
Edición: Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

# Parte I

# Conteo

## Tres preguntas básicas

1. ¿Cuántos billetes de lotería (de cuatro cifras y una serie de una letra) hay?

# Conteo

## Tres preguntas básicas

1. ¿Cuántos billetes de lotería (de cuatro cifras y una serie de una letra) hay?
2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?

## Tres preguntas básicas

1. ¿Cuántos billetes de lotería (de cuatro cifras y una serie de una letra) hay?
2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
3. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 7 elementos?

## Tres preguntas básicas

1. ¿Cuántos billetes de lotería (de cuatro cifras y una serie de una letra) hay?
2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
3. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 7 elementos?

Para responder a cada una de estas preguntas es necesario **CONTAR**, pero el método será distinto en los tres casos.

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete, para cada una de las cuatro primeras casillas tenemos 10 posibilidades de escoger entre los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 10 | | | | |

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete, para cada una de las cuatro primeras casillas tenemos 10 posibilidades de escoger entre los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | | | |

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete, para cada una de las cuatro primeras casillas tenemos 10 posibilidades de escoger entre los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 10 | 10 | 10 | | |

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete, para cada una de las cuatro primeras casillas tenemos 10 posibilidades de escoger entre los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 10 | 10 | 10 | 10 | |

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete, para cada una de las cuatro primeras casillas tenemos 10 posibilidades de escoger entre los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ y para la casilla de la serie una letra de a,b,c,. . . , z. Así:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 26 |

## Caso I

Cada casilla representa una cifra o letra del billete, para cada una de las cuatro primeras casillas tenemos 10 posibilidades de escoger entre los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ y para la casilla de la serie una letra de a,b,c,. . . , z. Así:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 26 |

Al buscar **TODAS** las posibles escogencias tenemos
$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 = 260{,}000$ billetes

# Conteo

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | | | | | |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 26 | | | | |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 26 | 26 | | | |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 26 | 26 | 10 | | |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 26 | 26 | 10 | 10 | |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 26 | 26 | 10 | 10 | 10 |

## Ejercicio

En Bogotá las placas de los autos tienen tres letras y tres dígitos. Si el alfabeto tiene 26 letras y se usan los números del 0 al 9, ¿cuántas matrículas posibles hay?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 26 | 26 | 10 | 10 | 10 |

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10$$

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 26 | | | | | |

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 26 | 25 | | | | |

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 26 | 25 | 24 | | | |

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 25 | 24 | 10 | | |

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 25 | 24 | 10 | 9 | |

### Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 25 | 24 | 10 | 9 | 8 |

## Ejercicio

Supongamos que las placas del ejercicio anterior no pueden tener números ni letras repetidas. ¿Cuántas son ahora?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 25 | 24 | 10 | 9 | 8 |

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8$$

Note que el método sigue siendo el mismo.

## Principio fundamental del conteo

Cuando una tarea consiste en $k$ fases separadas,

## Principio fundamental del conteo

Cuando una tarea consiste en $k$ fases separadas, si la primera puede realizarse en $n_1$ formas, la segunda en $n_2$ formas, etc., y así hasta la $k$-ésima fase, que puede hacerse de $n_k$ formas.

## Principio fundamental del conteo

Cuando una tarea consiste en $k$ fases separadas, si la primera puede realizarse en $n_1$ formas, la segunda en $n_2$ formas, etc., y así hasta la $k$-ésima fase, que puede hacerse de $n_k$ formas. Entonces el número total de resultados posibles para completar la tarea está dado por el producto de

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

## Ejercicio

Determine el número de formas posibles de marcar una hoja de respuestas en un examen de selección múltiple con única respuesta, si hay 20 preguntas y cada una tiene cinco opciones.

**Ejercicio**

¿De cuántas maneras es posible escoger 3 personas para los cargos de presidente, vicepresidente y secretario de una junta, de un grupo de 12 personas?

### Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades,

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | | | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos 5 posibilidades

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos 5 posibilidades y así sucesivamente.

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos 5 posibilidades y así sucesivamente.

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos 5 posibilidades y así sucesivamente.

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos 5 posibilidades y así sucesivamente. Para el último lugar sólo nos quedará un disco.

## Caso II

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estuche?
Hagamos de nuevo las casillas que nos representan la posición de cada disco

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Observe que para poner en el primer lugar hay 6 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos 5 posibilidades y así sucesivamente. Para el último lugar sólo nos quedará un disco.
Posibles ordenamientos: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

## Factoriales

Para todo entero positivo $n$, se define **n factorial** como:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

y definimos

$$0! = 1$$

**Ordenamiento de $n$ objetos**

El número total de formas diferentes de acomodar $n$ objetos distintos es $\mathbf{n}!$

## Ejercicio

Evalúe cada una de las siguientes expresiones

- $6!$
- $\frac{10!}{5!}$
- $\frac{8!}{5!\,3!}$
- $\frac{16!}{12!}$
- $\frac{37!}{36!}$
- ¿Es $(n+m)! = n! + m!$?

# Conteo

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | | | | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades,

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | 11 | | | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos ahora 11 posibilidades

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | 11 | 10 | | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos ahora 11 posibilidades y así sucesivamente.

# Conteo

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | 11 | 10 | 9 | | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos ahora 11 posibilidades y así sucesivamente.

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos ahora 11 posibilidades y así sucesivamente.

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos ahora 11 posibilidades y así sucesivamente. Para el último lugar nos quedarán 7 discos.

Supongamos ahora que tenemos 12 discos y de nuevo en el estuche sólo se pueden ordenar 6. ¿Cuántas posibilidades tenemos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

Observe que para poner en el primer lugar hay 12 posibilidades, una vez se escoge el del primer lugar, para el segundo tenemos ahora 11 posibilidades y así sucesivamente. Para el último lugar nos quedarán 7 discos.
Posibles ordenamientos: $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{12!}{6!}$

## Permutaciones

El número de **permutaciones**, o arreglos de $n$ objetos distintos tomados en grupos de $r$ a la vez, donde $r \leq n$, está dado por

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

## Ejercicio

Evalúe cada una de las siguientes expresiones

- $P(5,2)$
- $P(6,3)$
- $P(8,5)$
- $P(4,4)$

## Permutaciones

El número de **permutaciones**, o arreglos de $n$ objetos distintos tomados en grupos de $r$ a la vez, donde $r \leq n$, puede calcularse como

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

## Permutaciones

Las permutaciones solo se aplican cuando:

- No se permiten las repeticiones.
- El orden es importante.

**Ejercicio**

¿Cuántos números de tres dígitos que no se repiten pueden escribirse con los dígitos del conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

## Ejercicio

¿Cuántos números de tres dígitos que no se repiten pueden escribirse con los dígitos del conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

$$P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

## Combinaciones

Encuentre el número de subconjuntos de tamaño 2 del conjunto $\{a, b, c, d\}$.

## Combinaciones

Encuentre el número de subconjuntos de tamaño 2 del conjunto $\{a, b, c, d\}$.

$\{a, b\}, \ \{a, c\}, \ \{a, d\}, \ \{b, c\}, \ \{b, d\}, \ \{c, d\}$

## Combinaciones

Encuentre el número de subconjuntos de tamaño 2 del conjunto $\{a, b, c, d\}$.

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

En total 6 subconjuntos.

## Caso III

¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 7 elementos?

## Caso III

¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 7 elementos? Si queremos contarlos en forma análoga a como lo hemos hecho hasta ahora podríamos pensar que debemos escoger 4 elementos de 7 posibles,

## Caso III

¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 7 elementos? Si queremos contarlos en forma análoga a como lo hemos hecho hasta ahora podríamos pensar que debemos escoger 4 elementos de 7 posibles, usando casillas tendríamos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| 7 | 6 | 5 | 4 |

lo cual nos da $7 \times 6 \times 5 \times 4$ pero en realidad en este conjunto estamos contando varias veces los subconjuntos,

## Caso III

ya que contamos por ejemplo el subconjunto $\{a, b, c, d\}$, el $\{a, c, b, d\}$, el $\{a, d, b, c\}$, etc.

## Caso III

ya que contamos por ejemplo el subconjunto $\{a, b, c, d\}$, el $\{a, c, b, d\}$, el $\{a, d, b, c\}$, etc.

¿Cuántas veces contamos cada uno?

## Caso III

ya que contamos por ejemplo el subconjunto $\{a, b, c, d\}$, el $\{a, c, b, d\}$, el $\{a, d, b, c\}$, etc.

¿Cuántas veces contamos cada uno?

Tantas como permutaciones de sus elementos.

## Caso III

ya que contamos por ejemplo el subconjunto $\{a, b, c, d\}$, el $\{a, c, b, d\}$, el $\{a, d, b, c\}$, etc.

¿Cuántas veces contamos cada uno?

Tantas como permutaciones de sus elementos.
Así, si queremos saber realmente cuántos subconjuntos hay debemos dividir el resultado anterior por 4!

## Caso III

ya que contamos por ejemplo el subconjunto $\{a, b, c, d\}$, el $\{a, c, b, d\}$, el $\{a, d, b, c\}$, etc.

¿Cuántas veces contamos cada uno?

Tantas como permutaciones de sus elementos.

Así, si queremos saber realmente cuántos subconjuntos hay debemos dividir el resultado anterior por 4!

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!}$$

## Caso III

ya que contamos por ejemplo el subconjunto $\{a, b, c, d\}$, el $\{a, c, b, d\}$, el $\{a, d, b, c\}$, etc.

¿Cuántas veces contamos cada uno?

Tantas como permutaciones de sus elementos.

Así, si queremos saber realmente cuántos subconjuntos hay debemos dividir el resultado anterior por 4!

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!}$$

Esta expresión en términos de factoriales la podemos escribir como

$$\frac{7!}{4!\,3!}$$

## Combinaciones

El número de **combinaciones**, o subconjuntos de $n$ objetos distintos tomados en grupos de $r$ a la vez, donde $r \leq n$, está dado por

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

## Combinaciones

Las combinaciones se aplican únicamente cuando:

- No se permiten las repeticiones.
- El orden no es importante.

## ¿Cómo escoger un método de conteo?

- Si los elementos seleccionados se pueden repetir, utilice el principio fundamental del conteo.

## ¿Cómo escoger un método de conteo?

- Si los elementos seleccionados se pueden repetir, utilice el principio fundamental del conteo.
- Si los elementos seleccionados no se pueden repetir y el orden es importante, utilice permutaciones.

## ¿Cómo escoger un método de conteo?

- Si los elementos seleccionados se pueden repetir, utilice el principio fundamental del conteo.
- Si los elementos seleccionados no se pueden repetir y el orden es importante, utilice permutaciones.
- Si los elementos seleccionados no se pueden repetir y el orden no es importante, utilice combinaciones.

# Conteo

## Ejercicio

¿De cuántas formas posibles puede presentarse el podio de la fórmula uno, si hay 18 pilotos en competencia?

## Ejercicio

¿Cuántas manos de cinco cartas son posibles con un mazo de 52 cartas, si la mano consiste en

(a) cuatro tréboles y una carta que no sea trébol?

## Ejercicio

¿Cuántas manos de cinco cartas son posibles con un mazo de 52 cartas, si la mano consiste en

(a) cuatro tréboles y una carta que no sea trébol?

(b) dos cartas de figura y tres cartas que no sean de figura?

## Ejercicio

¿Cuántas manos de cinco cartas son posibles con un mazo de 52 cartas, si la mano consiste en

(a) cuatro tréboles y una carta que no sea trébol?

(b) dos cartas de figura y tres cartas que no sean de figura?

(c) dos cartas rojas, dos tréboles y una pica?