MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autora: Jeanneth Galeano Peñaloza
Edición: Oscar Guillermo Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Álgebra elemental

Leyes de los exponentes

Si n es un entero positivo y a es un número real, se define

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

Leyes de los exponentes

Si n es un entero positivo y a es un número real, se define

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

Si $a \neq 0$, como $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ escribimos $a^{-1} = \frac{1}{a}$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

- $a^m a^n = a^{m+n}$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\bigstar \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad\bigstar \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad\quad\bigstar \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$

Leyes de los exponentes

Propiedades

Para m, n enteros positivos, $a \neq 0$, $b \neq 0$

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad\quad\bigstar \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Radicales

Sean n un entero positivo mayor que 1 y a un número real.

- Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo b tal que $b^n = a$

Radicales

Sean n un entero positivo mayor que 1 y a un número real.

- Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo b tal que $b^n = a$
- Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real negativo b, tal que $b^n = a$

Radicales

Sean n un entero positivo mayor que 1 y a un número real.

- Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo b tal que $b^n = a$
- Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real negativo b, tal que $b^n = a$
- Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Radicales

Sean n un entero positivo mayor que 1 y a un número real.

- Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo b tal que $b^n = a$
- Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real negativo b, tal que $b^n = a$
- Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.
- Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$

Propiedades de los radicales

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real

- $(\sqrt[2]{25})^2 = 25$

Propiedades de los radicales

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a \geq 0$

- $(\sqrt[2]{25})^2 = 25$
- $\sqrt[3]{2^3} = 2$

Propiedades de los radicales

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a \geq 0$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a < 0$ y n es impar

- $(\sqrt[2]{25})^2 = 25$
- $\sqrt[3]{2^3} = 2$
- $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

Propiedades de los radicales

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a \geq 0$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a < 0$ y n es impar
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, si $a < 0$ y n es par

- $(\sqrt[2]{25})^2 = 25$
- $\sqrt[3]{2^3} = 2$
- $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
- $\sqrt[2]{(-4)^2} = 4 = |-4|$

Propiedades de los radicales

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4 \times 9} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{9}$

Propiedades de los radicales

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

- $\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4 \times 9} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{9}$
- $\sqrt[2]{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt[2]{36}}{\sqrt[2]{49}}$

Propiedades de los radicales

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

- $\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4 \times 9} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{9}$
- $\sqrt[2]{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt[2]{36}}{\sqrt[2]{49}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}$

Propiedades de los radicales

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

- $\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4 \times 9} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{9}$
- $\sqrt[2]{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt[2]{36}}{\sqrt[2]{49}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}$

OJO si n es par y a y b son negativos $\sqrt[n]{ab}$ existe, pero $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ no existe.

Propiedades de los radicales

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4 \times 9} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{9}$
- $\sqrt[2]{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt[2]{36}}{\sqrt[2]{49}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}$

OJO si n es par y a y b son negativos $\sqrt[n]{ab}$ existe, pero $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ no existe.

NOTA. Para que estas igualdades se den, recuerde que todas las expresiones involucradas deben existir y ser reales.

Exponentes racionales

Con el fin de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las leyes descritas anteriormente,

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Exponentes racionales

Con el fin de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las leyes descritas anteriormente,

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

entonces, según la definición de la raíz n-ésima

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Exponentes racionales

Con el fin de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las leyes descritas anteriormente,

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

entonces, según la definición de la raíz n-ésima

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

En general, para m/n un número racional, con $n > 1$ y a un número real tenemos

- $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$

Exponentes racionales

Con el fin de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las leyes descritas anteriormente,

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

entonces, según la definición de la raíz n-ésima

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

En general, para m/n un número racional, con $n > 1$ y a un número real tenemos

- $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exponentes racionales

Con el fin de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las leyes descritas anteriormente,

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

entonces, según la definición de la raíz n-ésima

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

En general, para m/n un número racional, con $n > 1$ y a un número real tenemos

- $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Ejemplo

Simplificar

Ejemplo

Simplificar

$$\frac{4^5 \times 6^3}{9^2 \times 10^4}$$

Ejemplo

Simplificar

$$\frac{4^5 \times 6^3}{9^2 \times 10^4} = \frac{(2^2)^5 \times (2 \times 3)^3}{(3^2)^2 \times (5 \times 2)^4}$$

Ejemplo

Simplificar

$$\frac{4^5 \times 6^3}{9^2 \times 10^4} = \frac{(2^2)^5 \times (2 \times 3)^3}{(3^2)^2 \times (5 \times 2)^4}$$
$$= \frac{2^{10} \times 2^3 \times 3^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^4}$$

Ejemplo

Simplificar

$$\begin{aligned}\frac{4^5 \times 6^3}{9^2 \times 10^4} &= \frac{(2^2)^5 \times (2 \times 3)^3}{(3^2)^2 \times (5 \times 2)^4} \\ &= \frac{2^{10} \times 2^3 \times 3^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^4} \\ &= \frac{2^{13} \times 3^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^4}\end{aligned}$$

Ejemplo

Simplificar

$$\begin{aligned}
\frac{4^5 \times 6^3}{9^2 \times 10^4} &= \frac{(2^2)^5 \times (2 \times 3)^3}{(3^2)^2 \times (5 \times 2)^4} \\
&= \frac{2^{10} \times 2^3 \times 3^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^4} \\
&= \frac{2^{13} \times 3^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^4} \\
&= \frac{2^9}{3 \times 5^4}
\end{aligned}$$

Exponentes

Ejercicio

Simplifique las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{(3\times5)^4\times4^{15}}{2^6\times3^8}\left(\frac{3}{5}\right)^9$
2. $\dfrac{2^{2/3}\times5^{1/4}}{4^{5/3}}$
3. $\dfrac{\sqrt[5]{8}\times8^{3/2}}{2^{5/4}}\cdot\sqrt[8]{16^4}$

Parte II

Polinomios

Polinomios

Definición

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 son reales, x representa una variable y n es un número natural.

Polinomios

Definición

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son reales, x representa una variable y n es un número natural.
Si n es la mayor potencia de la variable se dice que el polinomio es de **grado** n.

Polinomios

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1 x + a_0$ se llama **polinomio lineal**.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Polinomios

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1 x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$ NO es un polinomio.

Polinomios

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$ NO es un polinomio.

$x^{2/5} + 3x^4 - 1$

Ejemplo

Si $n = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ se llama **polinomio lineal**. Por ejemplo, $p(x) = 3x + 2$.

Si $n = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se conoce como **polinomio cuadrático**. Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 5x - 4$.

Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Por ejemplo, $p(x) = 5$.

$3\sqrt{x} + 3x^2 + 5$ NO es un polinomio.

$x^{2/5} + 3x^4 - 1$ NO es un polinomio.

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x + 3) + (x^2 - x + 2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

$$(2x+3)+(x^2-x+2)=x^2+(2x-x)+(3+2)$$

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

$$\begin{aligned}(2x+3)+(x^2-x+2) &= x^2+(2x-x)+(3+2)\\ &= x^2+(2-1)x+5\end{aligned}$$

Operaciones entre polinomios

Suma

Para realizar operaciones entre polinomios, como suma, resta, multiplicación y división, simplemente procedemos teniendo en cuenta que son sumas y productos de números reales.
Por ejemplo, al realizar la suma $(2x+3)+(x^2-x+2)$, usando las propiedades asociativa y conmutativa de números reales y factorizando la variable tenemos:

$$\begin{aligned}(2x+3)+(x^2-x+2) &= x^2+(2x-x)+(3+2)\\ &= x^2+(2-1)x+5\\ &= x^2+x+5\end{aligned}$$

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$(2x+3)-(x^2-x+2)$$

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$(2x+3)-(x^2-x+2) = -x^2 + (2x-(-x)) + (3-2)$$

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$\begin{aligned}(2x+3)-(x^2-x+2) &= -x^2+(2x-(-x))+(3-2)\\ &= -x^2+(2+1)x+1\end{aligned}$$

Operaciones entre polinomios

Diferencia

De forma análoga con la diferencia:

$$\begin{aligned}(2x+3)-(x^2-x+2) &= -x^2+(2x-(-x))+(3-2)\\ &= -x^2+(2+1)x+1\\ &= -x^2+3x+1\end{aligned}$$

Producto

Para el producto:

$$(2x + 3)(x^2 - x + 2)$$

Producto

Para el producto:

$$(2x+3)(x^2-x+2) = 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2)$$

Operaciones entre polinomios

Producto

Para el producto:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x^2-x+2) &= 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2)\\ &= 2x^3-2x^2+4x+3x^2-3x+6\end{aligned}$$

Producto

Para el producto:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x^2-x+2) &= 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2)\\ &= 2x^3-2x^2+4x+3x^2-3x+6\\ &= 2x^3+x^2+x+6\end{aligned}$$

Operaciones entre polinomios

Producto

Para el producto:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x^2-x+2) &= 2x(x^2-x+2)+3(x^2-x+2)\\ &= 2x^3-2x^2+4x+3x^2-3x+6\\ &= 2x^3+x^2+x+6\end{aligned}$$

Note que aquí la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma es muy importante.

Factorización

Si un polinomio $p(x)$ se puede expresar como producto de polinomios de menor grado, decimos que el polinomio se encuentra factorizado.

Operaciones entre polinomios

Factorización

Si un polinomio $p(x)$ se puede expresar como producto de polinomios de menor grado, decimos que el polinomio se encuentra factorizado.
Por ejemplo,

$$p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Operaciones entre polinomios

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Operaciones entre polinomios

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Operaciones entre polinomios

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Operaciones entre polinomios

Productos notables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Factorización

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Factorización

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Operaciones entre polinomios

Factorización

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$