Examen de conocimientos para aspirantes
Posgrado de Maestría en Ciencias Matemáticas
Segundo Semestre de 2022

Responda 5 preguntas de las 8 formuladas. Cada pregunta tiene un valor de 1 punto. Nota mínima 2 puntos. Justifique completamente sus respuestas.

Nombre: ____ *Calificación:* _____

1. Una función f está definida para todo real x por la fórmula
$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin t}{2 + t^2} dt$$
Sin intentar el cálculo de esta integral, hallar un polinomio cuadrático $p(x) = a + bx + cx^2$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, y $p''(0) = f''(0)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por la fórmula
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_2 + 3x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$
Determine si T define un isomorfismo y, si es así, encuentre la fórmula para la transformación lineal inversa T^{-1}.

3. De un ejemplo de un espacio vectorial real V y de una transformación lineal $T : V \to V$, no nula, de tal forma que $\lambda = 0$ sea un valor propio de T.

4. Pruebe que $\operatorname{sen} x$ es continua en todos los reales sabiendo que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas en cero.

5. Calcule la integral
$$\int\int_D (x - y) dx dy,$$
donde D es el plano definido por
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant x^2, x + y \leqslant 2\}.$$

6. Sea α una raíz del polinomio $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ con coeficientes enteros. Demuestre que α es un número entero o un irracional.

7. Calcule la integral
$$\int_C \frac{z - 2}{z(z - 1)} dz,$$
donde C es la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente.

8. Sabemos que $y_1(x) = x$ es solución de la E.D.O.
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{1}$$
Encuentre $u(x)$ de tal forma que $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$ sea una solución de la E.D.O. (1) y al mismo tiempo el conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ sea una base para el espacio de soluciones de (1).