# Examen de conocimientos para aspirantes
# Posgrado de Maestría en Matemáticas
# II Semestre de 2021

Responda 5 preguntas de las 8 formuladas. Cada pregunta tiene un valor de 1 puntos. Justifique completamente sus respuestas.

*Nombre:* ________________________________ *Calificación:* _____

1. Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}^2$ vale $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$.

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función $n$ veces diferenciable. Suponga que $f$ tiene $m$ raíces distintas en $(a, b)$, esto es, existen, $r_1, r_2, \ldots, r_m$, distintos, tales que $f(r_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$. ¿Puede decir algo del numero de raíces de las derivadas de $f$, $f'$, $f''$, $\ldots$, $f^{(n)}$?

3. Demuestre que $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ es una función cóncava. Recuerde que $\mathbb{R}^2_{++} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$.

4. Haciendo uso del teorema de Stokes calcule $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot dS$, donde $S$ es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$ y $\mathbb{F}(x, y, z) = (-y, x, x + y + z)$.

5. Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)}$. Sugerencia: Recuerde que en variable compleja, para $|z| = 1$, $\cos(\theta) = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ y $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$.

6. Sea $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z(z^4 + z^2 + 1)}$ y sea $R = [-1, 2] \times [-1/2, 2]$. Determinar el valor de la integral $\int_c f(z)\, dz$, donde $c = \partial R$, positivamente orientada.

7. Para el sistema lineal dado por: $X' = \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} X$. Determinar los valores de $\alpha$ para los que el origen es una fuente tipo espiral.

8. Considerar la familia de curvas dadas por $y^2 = 4(x - c)$. Establecer la ecuación diferencial ordinaria satisfecha por la familia y con ayuda de esta determinar la familia de curvas ortogonales a la familia dada e ilustrar con una gráfica varias curvas de las dos familias.