Examen de conocimientos para aspirantes
Posgrado de Maestría en Ciencias Matemáticas
I Semestre de 2022

Responda 5 preguntas de las 8 formuladas. Cada pregunta tiene un valor de 1 punto. Nota mínima 2 puntos. Justifique completamente sus respuestas. La solución del examen debe ser enviada en formato pdf (en un solo documento) al correo jlramirezr@unal.edu.co.

Nombre: ________________________________ *Calificación:* _____

1. Demuestre la siguiente desigualdad:
$$|\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b)| \leqslant |a-b|$$
para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de los polinomios reales de grado menor o igual que 2, y denotemos por W al espacio vectorial de todas las transformaciones lineales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$, es decir,
$$W := \{T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ T \text{ es transformación lineal}\}.$$
Sean $T_1, T_2, T_3 \in W$ definidas por:
$$T_1(p) := \int_{-1}^{0} p(x)\,dx, \quad T_2(p) := \int_{0}^{1} p(x)\,dx \quad \text{y} \quad T_3(p) := \int_{1}^{2} p(x)\,dx,$$
para $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Demuestre que $\{T_1, T_2, T_3\}$ es una base de W.

3. Sea n un entero positivo. Sea A una matriz $n \times n$ con entradas en los reales. Demuestre que
   a) si $A^t = -A$ y n es impar, entonces $\texttt{det}(A) = 0$.
   b) si $A^2 + I = 0$, entonces n debe ser par, donde I es la matriz identidad $n \times n$.

4. Dada la función $f(x,y) := (2\sqrt{m}y - x)^3$, calcule el valor de m para que el valor de la derivada direccional máxima de f en el punto $(-1,0)$ sea igual a $3\sqrt{17}$.

5. Sea S la superficie formada al rotar la curva $x = \cos z$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$, alrededor del eje z.
   a) Encuentre el área de superficie de S.
   b) Encuentre la integral de $F(x,y,z) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sobre S.

6. Calcule la integral
$$\int_C \frac{e^z \operatorname{sen} z}{z - i}\,dz,$$
donde C es la circunferencia $|z - i| = 2$ orientada positivamente.

7. Sea $f(z)$ una función analítica en $z = 0$ y $g(z) := f(z^2)$. Demuestre que $g^{(2n-1)}(0) = 0$ para todo entero positivo n. ($g^{(m)}(x)$ denota la m-ésima derivada de $g(x)$).

8. Encuentre números enteros n, m tales que $x^n\, y^m$ es un factor de integración especial de la ecuación diferencial
$$(5x^2y + 6x^3y^2 + 4xy^2)dx + (2x^3 + 3x^4y + 3x^2y)dy = 0,$$
y encuentre la solución general de la ecuación.