Examen de admisión al doctorado en matemáticas
Mayo de 2021

El examen consta de ocho preguntas, cada una con tres partes. Usted debe escoger y desarrollar únicamente <u>*cinco*</u> *de ellas.*

Tiempo total: 3 horas (aproximadamente 30 minutos para el desarrollo de cada pregunta).

Todos los puntos tienen el mismo valor.

Las pruebas deben estar bien redactadas y en correcto español.

I. Sea $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2\}$ y matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}.$$

1. ¿Bajo qué condiciones sobre p y q esta cadena de Markov es irreducible y aperiódica?

2. Encuentre la probabilidad estacionaria para $p = 1/3$ y $q = 2/3$.

3. Pruebe o refute la siguiente afirmación: Para cualquier valor de p y q existe una única probabilidad estacionaria para X.

II. Sea S^n_{++} el conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ que son simétricas estrictamente definidas positivas. Considere también S^n el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ que son simétricas.

1. Dada $X \in S^n_{++}$, demuestre que existe una única matriz $Y \in S^n_{++}$ tal que $Y^2 = X$. Denotamos $Y = X^{\frac{1}{2}}$ la cual es denominada la raíz cuadrada de X.

2. Dada $V \in S^n$ y $X \in S^n_{++}$, demuestre que la matriz $X^{-1}V$ tiene valores propios reales. *Sugerencia:* compare los valores propios de $X^{-1}V$ con los valores propios de $X^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}$. Denotamos $X^{-\frac{1}{2}} = (X^{\frac{1}{2}})^{-1} = (X^{-1})^{\frac{1}{2}}$.

3. Considere $F : S^n_{++} \to \mathbb{R}$ dada por $F(X) = \log\det(X)$, demuestre que $F(X)$ es una función cóncava. *Sugerencia 1:* Considere la concavidad de la función real $g(t) = F(X + tV)$, para $V \in S^n$ y t en un intervalo apropiado.

Sugerencia 2: $g(t)$ se puede expresar en términos de los valores propios de $X^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}$.

III. *Si F es un campo, un polinomio $f(x) \in F[x]$ es un m-polinomio, si todos los ceros de $f(x)$ en una clausura algebraica de F tienen multiplicidad m.*

1. Verifique si $x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ es un 2-polinomio.

2. Pruebe que si $f(x)$ es irreducible sobre F, entonces $f(x)$ es un m-polinomio para algún m.

3. Pruebe o refute: Si F es un campo de característica 0 y $f(x)$ es un polinomio irreducible sobre F, entonces $f(x)$ es un 1-polinomio.

IV. *Si A es un subconjunto de un espacio topológico X, se nota $E(A)$ a la intersección de todos los abiertos de X que contienen a A.*

1. Calcule $E([0,1])$ en $\mathbb{R}$ con la topología generada por $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

2. Pruebe que si X es un espacio T_1, entonces, para cualquier subconjunto A de X se tiene que $E(A) = A$.

3. Pruebe o refute: Si para cualquier subconjunto A de X se tiene que $E(A) = A$, entonces X es un espacio T_1.

V. *Una función f de variable compleja es fuertemente analítica en una vecindad U de 0 si es derivable en U y su serie de Taylor alrededor de 0 converge uniformemente en U.*

1. Verifique si la función definida por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es fuertemente analítica en $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$.

2. Pruebe que si f es fuertemente analítica en $\mathbb{C}$, entonces f es una función polinómica.

3. Pruebe o refute: Si el radio de convergencia de la serie de Taylor de f, alrededor de 0, es infinito, entonces f es fuertemente analítica en $\mathbb{C}$.

VI. *Una función f es de Lipschitz en un conjunto $U \subseteq Dom(f)$, si existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, para todo $x, y \in U$.*

1. Verifique si la función definida por $f(x) = -3x + 8$ es de Lipschitz en $\mathbb{R}$.

2. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable e I es un intervalo acotado, entonces f es de Lipschitz en I.

3. Pruebe o refute: Si f es de Lipschitz en $[a, b]$, entonces f es derivable en (a, b).

VII. *Sean G y H grupos, y $\theta : H \to Aut(G)$ un homomorfismo. Se define la operación binaria $*$ sobre el conjunto $G \times H$ de la siguiente forma*

$$(g, h) * (g_1, h_1) = (g\theta(h)(g_1), hh_1).$$

$(G \times H, *)$ se conoce como el producto semidirecto de G y H con respecto a θ y se denota por $G \rtimes_\theta H$.

1. Determine cuántos homomorfismos hay de $\mathbb{Z}_4$ en $Aut(\mathbb{Z}_5)$.

2. Muestre que $G \rtimes_\theta H$ es un grupo.

3. Pruebe o refute: $G \times \{1\}$ es un subgrupo normal de $G \rtimes_\theta H$.

VIII. *Sea V un espacio vectorial y sea $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un producto interno definido positivo. Sea $\{u_1, \cdots, u_n\}$ una base ortonormal de V y sea P el paralelepípedo generado por una base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V.*
Definimos el volumen de P por

$$Vol_g(P) := |det(h)|$$

donde h es la matriz definida por $h_{ij} = g(v_i, u_j)$.

1. Muestre que $Vol_g(P)$ no depende de la base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_n\}$.

2. Sea $\tilde{g}$ la matriz $n \times n$ definida por $\tilde{g}_{ij} := g(v_i, v_j)$.
Muestre que

$$Vol_g(P) = \sqrt{det(\tilde{g})}.$$

3. Sea P_1 el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1, de coeficientes reales. Defina el producto interno g en P_1 por

$$g(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

donde $p(x), q(x) \in P_1$. Considere el paralelogramo Q generado por los polinomios $1 + x, 3 - x$. Usando los ítems anteriores, calcule $Vol_g(Q)$.