ON LATTICES AND TOPOLOGY

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Luisa Fernanda Rozo Posada
Trabajo dirigido por: Ibeth Marcela Rubio Perilla
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

INTRODUCCIÓN

El primer acercamiento al concepto de *retículo* fue realizado por el matemático Británico George Boole en su esfuerzo de formalizar la lógica proposicional. Observó que las álgebras satisfacían propiedades como son: clausurativa, conmutativa, asociativa y distributiva. Sin embargo, el matemático alemán Ernest Schroder mostró que la propiedad de distributividad era independiente de las otras y comenzó un primer estudio a estas estructuras. Luego, Dedekind, otro matemático alemán, hace un estudio de los retículos en su trabajo llamado *Dualgruppen*. Esta teoría no llamó la atención de la comunidad matemática sino hasta la década de los 30, donde el matemático estadounidense Garret Birkhoff desarrolla gran parte de esta teoría. Su libro es usado hoy como el referente principal para el estudio de la teoría [2].

RETÍCULOS [1]

Sea $L \neq \emptyset$. El conjunto ordenado $\mathcal{L} = (L, \leq)$ se llama retículo si existen

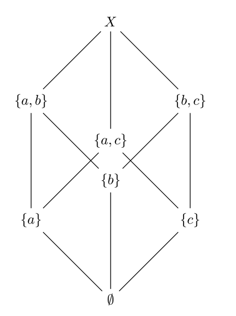
1. $x \vee y = \text{mín}(May(\{x, y\}))$ (supremo).
2. $x \wedge y = \text{máx}(Min(\{x, y\}))$ (ínfimo).

RETÍCULO DE BOOLE

Sea $\mathcal{L}$ un retículo para el cual se satisface:

- $0 = \text{mín}(\mathcal{L})$ y $1 = \text{máx}(\mathcal{L})$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- Cada $l \in \mathcal{L}$ es complementado, es decir, existe $x' \in \mathcal{L}$ tal que:

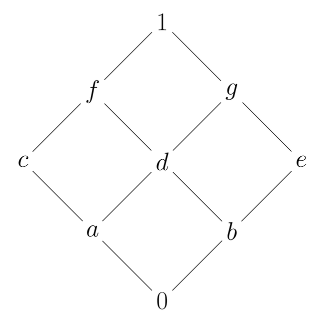
$$x \vee x' = 1 \qquad x \wedge x' = 0$$



RETÍCULO COMPLETO

Sea $\mathcal{L}$ un retículo.
Para cada $A \subseteq \mathcal{L}$ existen:

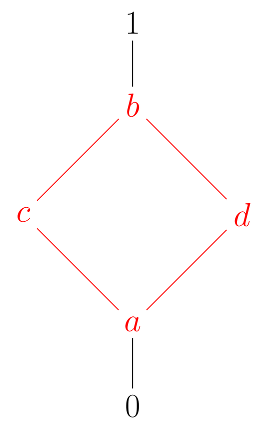
- $\bigvee A = \text{mín}(May(A))$.
- $\bigwedge A = \text{máx}(Min(A))$.



INTERVALOS

Sea $\mathcal{L}$ retículo y $a, b \in \mathcal{L}$

$$[a, b] = \{l \in \mathcal{L} : a \leq l \leq b\}.$$



COLAS

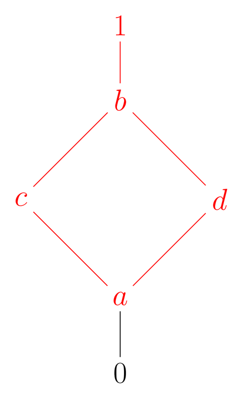
$\mathcal{L}$ retículo, $a \in \mathcal{L}$. Una

- *cola cerrada a derecha*:

$$[a, \rightarrow) = \{l \in \mathcal{L} : a \leq l\}.$$

- *cola cerrada a izquierda:*

$$(\leftarrow, a] = \{l \in \mathcal{L} : l \leq a\}.$$



FILTROS

Sea $\mathcal{L}$ un retículo, $\emptyset \neq F \subseteq \mathcal{L}$.
F es filtro, si:

1. Si $x, y \in F$, entonces

$$x \wedge y \in F.$$

2. Si $x \in F$ y $y \in \mathcal{L}$ tal que $x \leq y$, entonces $y \in F$.

FILTROS MAXIMALES

Sea $\mathcal{L}$ retículo y M filtro.
M es maximal si:

1. $M \subsetneq \mathcal{L}$.
2. Si F es un filtro en $\mathcal{L}$ tal que $M \subseteq F$, entonces $F = M$ o $F = \mathcal{L}$.

HOMOMORFISMOS

$\mathcal{L}$ y $\mathcal{N}$ retículos.

$$\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$$

es un homomorfismo si para $a, b \in \mathcal{L}$:

1. $\phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$.
2. $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$.

Como consecuencia, si $a \leq b$, entonces $\phi(a) \leq \phi(b)$ (Isótona).

ÁLGEBRAS DE BOOLE [6]

Desde el punto de vista algebraico, si $\mathcal{L}$ es un retículo de Boole, $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ con:

- : $\vee, \wedge$ binarias
- : $'$ unaria
- : $0, 1$ neutros.

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE STONE [7]

Teorema 1. *Dada $\mathcal{B}$ álgebra de Boole,*

$$\begin{aligned} h : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{U}(\mathcal{B})) \\ x &\longmapsto \{M \in \mathfrak{U}(\mathcal{B}) : x \in M\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{B}$ con su imagen.

Donde $\mathfrak{U}(\mathcal{B})$ es la colección de filtros maximales de $\mathcal{B}$.
Este teorema nos permite pensar los puntos de un álgebra de Boole como conjuntos.

REFERENCIAS

[1] L. ACOSTA, *Temas de teoría de retículos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2016.

[2] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1940.

[3] E. COGAN, *Lattice Operators and Topologies*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2009.

[4] O. FRINK, *Topology in Lattices*, Transactions of the American Mathematical Society, 1942.

[5] G. RUBIANO, *Topoloía General [un primer curso]*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010.

[6] R. SIRKOSKI, *Boolean Alegebras*, Springer-Verlag, New York, 1964.

[7] M. H. STONE, *Topological representations of distributive lattices and brouwerian logics*, 1938.

RETÍCULOS TOPOLÓGICOS

Sean $\mathcal{L}$ un retículo y Γ una topología. $(\mathcal{L}, \Gamma)$ es un ***retículo topológico*** si

$$\begin{aligned} \vee : \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ (a, b) &\mapsto a \vee b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \wedge : \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ (a, b) &\mapsto a \wedge b. \end{aligned}$$

son continuas, donde $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene la topología producto.

Topología de colas cerradas: Sea $\mathcal{L}$ un retículo y τ la topología cuya subbase de cerrados es: $\{[l, \rightarrow) : l \in \mathcal{L}\}$

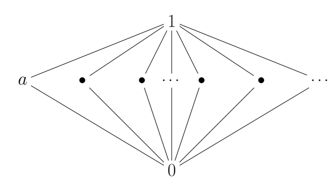
Algunas propiedades son:

Proposición 2. *Sea $\mathcal{L}$ un retículo. Para cada $l \in \mathcal{L}$, $[l, \rightarrow)$ es cerrado para ínfimos (meets). Por lo tanto la función ínfimo es continua.*

Proposición 3. *Sea $(\mathcal{L}, \tau)$ es un retículo topológico no trivial. Entonces:*

1.$(\mathcal{L}, \tau)$ es T_0. 2.$(\mathcal{L}, \tau)$ no es T_1. 3.$(\mathcal{L}, \tau)$ es compacto si y solo si $\mathcal{L}$ tiene 1.

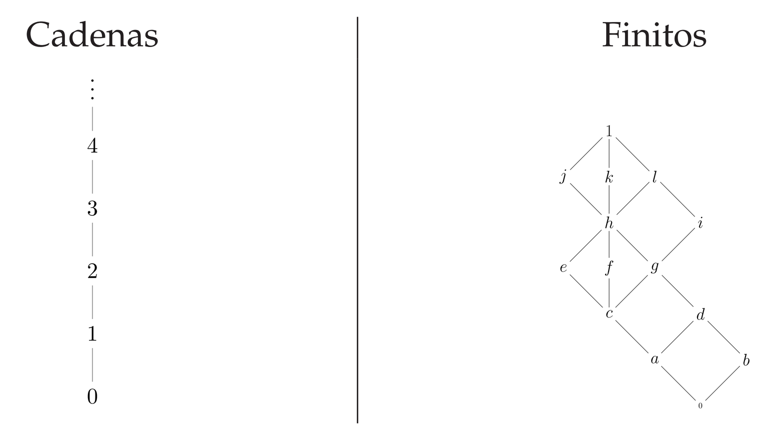
Problema caso infinito: Para el retículo cuyo diagrama de Hasse está dado en la figura abajo, la función supremo (join) no es continua.



Si la subbase de cerrados es $\{(\leftarrow, l] : l \in \mathcal{L}\}$, el problema de continuidad es con la función ínfimo (meet).

Topología del Intervalo [4]: Sea $\mathcal{L}$ un retículo. Defina la topología ζ con subbase cerrada la colección $\{(\leftarrow, x]\}_{l \in \mathcal{L}} \cup \{[l, \rightarrow)\}_{l \in \mathcal{L}}$.

Ejemplos:



Proposición 4. *Cadenas y retículos finitos son retículos topológicos con esta topología.*

Algunas propiedades sobre ζ son:

Proposición 5. *Dado $(\mathcal{L}, \zeta)$ retículo topológico. Entonces:*

1. *$(\mathcal{L}, \zeta)$ es T_1.*
2. *Si $(\mathcal{L}, \zeta)$ es compacto, entonces $\mathcal{L}$ es completo.*

La recíproca de la última propiedad se tiene solo si consideremos como subbase de cerrados únicamente los intervalos.

OTRA VISIÓN

Topología de Cogan [3]

Es un método que permite una *"traducción"* de la definición de un operador de Kuratowski usual de topología general, a un operador de Kuratowski en un retículo de Boole completo, gracias al Teorema de representación de Stone.

Operador Kuratowski (Topología)[5]

Sea X conjunto. El operador $\mathcal{K} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ satisface:

1. $\mathcal{K}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq \mathcal{K}(A)$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
3. $\mathcal{K}(A \cup B) = \mathcal{K}(A) \cup \mathcal{K}(B)$, para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$.
4. $\mathcal{K}(\mathcal{K}(A)) = \mathcal{K}(A)$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

Operador Kuratowski (Retículos) [3]

Sea $\mathcal{B}$ un retículo de Boole completo. El operador $\mathcal{K} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ satisface:

1. $\mathcal{K}(0) = 0$.
2. $a \leq \mathcal{K}(a)$, para todo $a \in \mathcal{L}$.
3. $\mathcal{K}(a \vee b) = \mathcal{K}(a) \vee \mathcal{K}(b)$, para todo $a, b \in \mathcal{L}$.
4. $\mathcal{K}(\mathcal{K}(a)) = \mathcal{K}(a)$, para todo $a \in \mathcal{B}$.

Teorema 6. *Sea $\mathcal{B}$ un retículo de Boole completo. $\mathcal{K}$ un operador Kuratowski. Entonces el conjunto $\kappa_{\mathcal{K}} = \{a \in \mathcal{B} : \mathcal{K}(a) = a\}$ satisface:*

1. *Si $a_i \in \kappa_{\mathcal{K}}$, para $i \in I$, entonces $\bigwedge_{i \in I} a_i \in \kappa_{\mathcal{K}}$.*
2. *Si $a, b \in \kappa_{\mathcal{K}}$, entonces $a \vee b \in \kappa_{\mathcal{K}}$.*
3. *$0, 1 \in \kappa_{\mathcal{K}}$.*

Operador de Cogan

Sea $\mathcal{B}$ un retículo de Boole completo y $\mathcal{L}$ un subretículo de $\mathcal{B}$ que contiene al 0 y al 1. El operador

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B} \\ b &\mapsto \overline{b} = \bigwedge \{a \in \mathcal{L} : a \geq b\}, \end{aligned}$$

es de Kuratowski. Notación: $\kappa_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}(\mathcal{L})$.

Ejemplo: Tome $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ y $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Entonces, $\kappa_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}$.

Proposición 7. *En general se tiene que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{L})$.*

Generalizando conceptos:

Definición Sea $\mathcal{B}$ un retículo de Boole completo, $\mathcal{K}$ un operador de Kuratowski sobre $\mathcal{B}$.

1. $(\mathcal{B}, \mathcal{K})$ es un $\mathcal{K}$ retículo topológico.
2. $(\mathcal{B}, \mathcal{K})$ es $\mathcal{K}$-compacto si dada $\mathcal{C} = \{b_i\}$ con b_i cerrado para cada i, $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i \neq 0 \Rightarrow \bigwedge b_i \neq 0$.
3. $(\mathcal{B}, \mathcal{K})$ es $\mathcal{K} - T_1$ si $b \in \kappa_{\mathcal{K}}$, para todo $b \in \mathcal{B}$.

Algunas de propiedades son:

Proposición 8. *Dados $\mathcal{B}$ un retículo de Boole completo y $\mathcal{L}$ un subretículo de $\mathcal{B}$ que contien al 0 y al 1, se satisface:*

1. *$\mathcal{E}(\mathcal{L})$ es retículo.*
2. *$\bigwedge b_i \in \mathcal{E}(\mathcal{L})$, para $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{L})$.*
3. *Para $\mathcal{B}$ finito, $(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ es $\mathcal{E} - compacto$, y si $\mathcal{L} = \mathcal{B}$, entonces $(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ es $\mathcal{E} - T_1$.*