El teorema de los números primos: prueba clásica y elemental

David Tellez
Trabajo dirigido por John Jaime Rodriguez
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia
24 de Junio de 2022

Abstract

El teorema de los números primos dice que, en el límite, el cociente $\frac{\pi(x)\log(x)}{x}$ tiende a 1. Se han encontrado dos formas de deducir este resultado. La primera, denominada clásica, depende del uso de la variable compleja. La segunda, denominada elemental, usa sólo herramientas del análisis real. En este trabajo se presenta un esbozo de la demostración clásica del teorema de los números primos y una reconstrucción de la prueba elemental. Siguiendo una observación de Tao se argumentará que, a pesar de que los métodos usados son distintos, la idea directora subyacente a las dos demostraciones es esencialmente la misma: dar solución a la existencia de un cero de la función zeta, cuyo valor real sea igual a 1. Esto nos llevará a mostrar que la idea principal detrás de la prueba elemental está motivada en el fondo por razones dependientes de la variable compleja.

1 Preliminares

Diremos que, para dos funciones reales f y g, $f(x) \backsim g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ cuando $x \to \infty$. El teorema de los primos será entonces la aserción:

$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log(x)} \tag{1}$$

donde $\log(x)$ denota al logaritmo natural. El primero en proponer (sin demostración) este teorema sería Gauss en 1792. Esta primera conjetura sobre el comportamiento asintótico de $\pi(x)$ sería mejorada en 1793 (aunque sólo sería publicada hasta 1849), usando como función de aproximación la llamada integral logarítmica, definida en la siguiente forma:

$$li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$$

En forma independiente a Gauss, Legendre conjeturaría también el teorema de los números primos en 1798 y propondría una mejor aproximación, a saber:

$$\frac{x}{\log(x) - 1}$$

Estas tres aproximaciones correrían un singular destino, pues se demostraría que las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log(x)}$$
$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log(x) - 1}$$
$$\pi(x) \backsim li(x)$$

Quedaba entonces la pregunta de como demostrar este resultado. Varios acercamientos que usaban sólo las herramientas del análisis real, se presentaron en años subsiguientes. Todos ellos se quedaban cortos ante la demostración deseada. En particular, Chebischev mostraría que:

$$\frac{1}{6}\frac{n}{\log(n)} \leq \pi(n) \leq 6\frac{n}{\log(n)}$$

En estos años se trataría además de trabajar con versiones alternativas del TNP, por lo cual se usó la función $\psi(x)$ definida como:

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log(p)$$

Los resultados obtenidos sin embargo se habían concentrado en la variable real. Riemann cambiaría este estado de cosas en 1859. Ese año él presentaría su ya clásica comunicación a la academia de ciencias en la cuál aparecería un camino de demostración de este teorema. Riemann se basaría en algunos trabajos previos de Euler, que le permitían expresar la función $\zeta(x)$ como un producto infinito de recíprocos de primos y trabajos de Gauss sobre la función $\Pi(x)$. Partiendo de estos resultados, Riemann extendería la definición de $\zeta(x)$ al plano complejo y demostraría un camino para contar primos usando esta función. Aunque Riemann nunca lo llevaría a sus últimas consecuencias, él había encontrado una especie de guía o programa a seguir para encontrar la demostración a este preciado teorema.

Este cambio de foco junto a las ideas de Riemann resultaría fructífero: en 1896, Hadamard y De la Vallée Poussin encontraron demostraciones independientes. Ambos llegarían a una demostración de la siguiente fórmula explícita propuesta, en forma algo distinta, por Riemann:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \log(2\pi) \tag{2}$$

donde ρ recorre todos los ceros no triviales de la ζ. Esta fórmula sugería que el teorema de los números primos era, en cierta forma, equivalente a demostrar que $\zeta(s)$ no tenía ceros con valor real igual a 1. La demostración de este hecho llevaría encontrar la demostración deseada. Este acercamiento hace uso entonces de la variable compleja en forma esencial. A este tipo de propuestas se las ha llamado en la literatura, clásicas.

Ahora bien, el uso de herramientas del análisis complejo para lograr esta demostración no era del agrado de muchos matemáticos. La esperanza era encontrar una prueba que no recurriera a la variable compleja sino que usara métodos elementales *i.e.* del análisis real. Hasta entrados en el siglo XX tal prueba parecía imposible de encontrar y varios matemáticos eran escépticos de su existencia. En 1949 Selberg y Erdös publicaron (independientemente, aunque hay ciertas disputas al respecto) una prueba elemental. Esta prueba elemental demostraría que las intuciones de Hardy estaban erradas: la verdad del teorema de los números primos no estaba ligada a la variable compleja y a sus relaciones con la función $\zeta(x)$. La prueba original de Selberg usaba la siguiente identidad:

$$\psi(x)\log(x) + \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x\log(x) + \mathcal{O}(x) \tag{3}$$

La idea detrás de la prueba era demostrar el TNP usando los resultados de suavizaciones continuas del problema. La primera de ellas es tomar:

$$R(x) = \psi(x) - x$$

El TNP se reformularía como la demostración de que en el límite $\frac{R(x)}{x}$ sea anula. Dos procesos de suavización posterior serán:

$$S(x) = \int_0^x \frac{R(t)}{t} dt$$

$$W(x) = \frac{S(e^x)}{e^x}$$

Allí Selberg derivaba la siguiente igualdad asintótica:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) = 2x\log(x) + \mathcal{O}(x)$$

donde:

$$\Lambda_2 = \Lambda(n)\log(n) + (\Lambda * \Lambda)(n)$$

Y con esta idea, se podía demostrar el TNP. La argumentación original presentada por Selberg ha sido simplificada a lo largo de los años. Todas las formas de ataque al problema, sin embargo, usan fórmulas asintóticas parecidas a (3). Estas fórmulas se han llamado en la literatura formulas de Selberg y las demostraciones que dependen de las mismas son denominadas elementales.

2 El problema

En esta monografía intentaremos dar cuenta de la aparente inexistencia de una motivación para la prueba elemental. Trataremos pues de encontrar un terreno común donde podamos comparar las dos demostraciones del teorema de los números primos. Siguiendo a Tao, mostraremos que este terreno común se encuentra en la derivada logarítmica:

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

También intentaremos de mostrar las relaciones entre los primos y la fórmula asintótica de Selberg. Para ello seguiremos a Levinson quien simplifica la prueba original de Selberg. Así pues, en esta monografía intentaremos dar respuesta a dos preguntas: ¿cómo es posible motivar la fórmula asintótica de Selberg? Y, ¿cuál es la relación de estas dos demostraciones, la clásica y la elemental?

3 Resultados

Siguiendo a Tao, podemos usar una nueva forma de la derivada logarítmica, a saber, $\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)}$. Esta nueva función tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_2(n)}{n^s}$$

Usando ahora la fórmula de Perron podemos llegar a la siguiente expresión analítica:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) = 2x\log(x) + \sum_{\rho} \frac{\zeta''(\rho)}{\zeta'(\rho)} \frac{x^\rho}{\rho} + \mathcal{O}(x)$$

Esperaríamos entonces que, la suma sobre los ceros no triviales de $\zeta(s)$ no tuviera un crecimiento superior a $\mathcal{O}(x)$ y por ello esta ecuación anterior, sugiere la siguiente fórmula asintótica:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) = 2x\log(x) + \mathcal{O}(\log(x)) \tag{4}$$

No es difícil ver que (4) y (3) son análogas. Esto sugiere que, en el fondo, la motivación detrás de la fórmula de Selberg está en la variable compleja y no en la variable real. Como era el uso de la derivada logarítmica en su versión original lo que llevaba a la fórmula explícita (2) este será el terreno común que deseábamos encontrar para trabajar.

Por otra parte, estas fórmulas asintóticas muestran que en el fondo la prueba elemental también intenta eliminar la posibilidad de la existencia de un cero con parte real 1. Para ello notamos, que Λ y Λ_2 están relacionadas por la siguiente relación:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) = \Lambda(n)\log(n) + \sum_{d|n} \Lambda(d)\Lambda\left(\frac{n}{d}\right)$$

Esta ecuación tomada con (4) nos muestra que Λ tiene un valor promedio entre 0 y 2. Esto también es sugerido por la fórmula original de Selberg. Ahora, usando de nuevo (4) y su relación con Λ se sugiere la siguiente identidad:

$$\Lambda(n) \approx 1 - \sum_{\rho} n^{\rho - 1} + \ldots$$

Si existiera un cero de $\zeta(s)$ con parte real igual a 1, esto implicaría que $\Lambda(n)$ sería en algún punto negativa... cosa que ya vimos es imposible. En este sentido, la ecuación asintótica de Selberg sugiere, por sus relaciones con la derivada logarítmica, que no existen ceros de ζ igual a 1. La idea detrás de la prueba elemental sería entonces mostrar que esto último es imposible, gracias al uso camuflado de (3).

4 Conclusiones

Aunque las dos pruebas del teorema de los números primos aparecen, en una primera mirada, como distintas, ellas están en el fondo motivadas por el mismo objetivo: demostrar que $\zeta(s)$ carece de ceros en la recta $\sigma = 1$. La conexión en los dos casos entre los primos y las fórmulas usadas para la demostración están en el trabajo sobre la derivada logarítmica. En este sentido, aun y cuando las dos pruebas usan herramientas conceptualmente distintas se encuentran conectadas a un nivel básico por los requerimientos que (2) y (3) imponen a la estructura analítica de la función $\zeta(s)$.

Por otra parte, hemos visto que la motivación de introducir la fórmula asintótica de Selberg en la prueba elemental es que, gracias a la derivada, logarítmica podemos obtener una versión análoga para Λ_2. En este sentido, Selberg estaba describiendo en forma camuflada la intuición que dirigía la demostración clásica: que el polo de la función $\zeta(s)$ es quien últimas da la mayor contribución al momento de determinar $\psi(x)$, por medio de la derivada logarítmica. En suma, la demostración clásica y la elemental responden en el fondo a preguntas similares. La diferencia está en el ataque a ellas.

References

[1] Bernhard, Riemman. On the Number of Primes less than a given Magnitude *Bernhard Riemann, Complete Works.* (2004)

[2] Terence, Tao. Ideas in the elementary proof of the prime number theorem (Selberg / ErdHos). Recuperado on-line: https://mathoverflow.net/questions/259698/ideas-in-the-elementary-proof-of-the-prime-number-theorem-selberg-erd%C5%91s/259719259719

[3] Jameson G J O, The Prime Number Theorem *The Edinburgh Building, Cambridge, UK*