Fundamentos matemáticos de la elección racional bajo ambigüedad

Cristhian A. Pinto Rodríguez - Trabajo dirigido por Juan Pablo Gama

Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá - Facultad de Ciencias - Departamento de Matemáticas

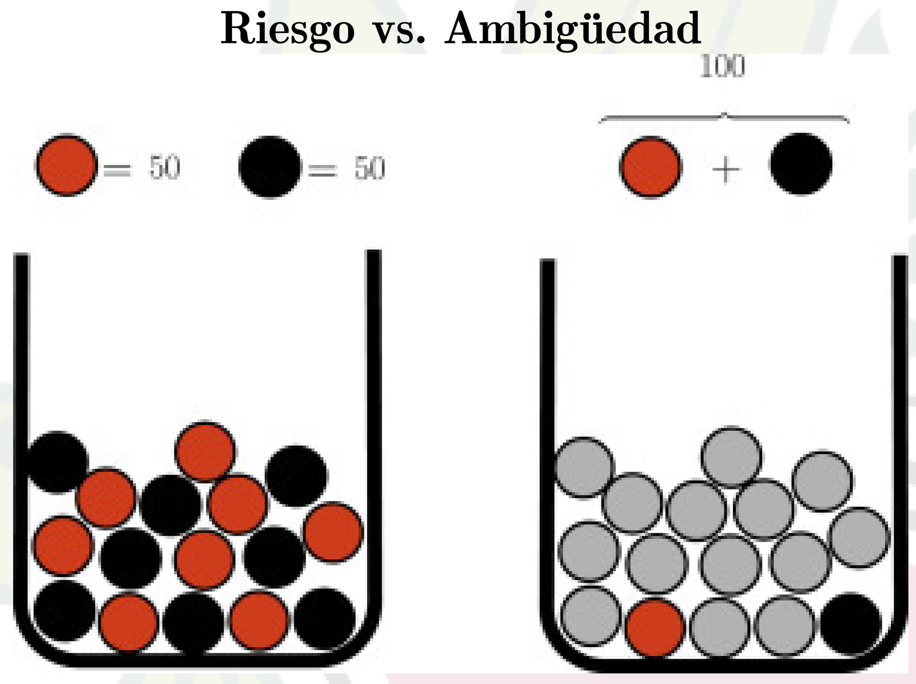
Resumen

Desarrollamos los fundamentos matemáticos de la elección racional bajo ambigüedad de Gilboa-Schmeidler. Entendemos por "ambigüedad" una situación en la que un individuo no puede especificar la probabilidad sobre los estados de la naturaleza en un problema de decisión. En la elección racional se debe elegir la mejor alternativa de acuerdo a una preferencia racional, si diferenciamos entre la acción de elegir una alternativa y la consecuencia de dicha acción, se estudian los conceptos de "riesgo", "incertidumbre" y utilidad esperada. Damos una motivación, mencionamos una definición de probabilidad subjetiva por Anscombe-Aumann, introducimos la terminología necesaria para enunciar el Teorema de Gilboa-Schmeidler y repasamos los resultados previos para su demostración.

Motivación

La motivación principal es resolver la *Paradoja de Ellsberg*. El experimento mental que allí se plantea contradice las hipótesis de utilidad esperada pues muestra que no existe una distribución de probabilidad que valide la preferencia observada. Además, evidencia la idea de que un individuo prefiere situaciones en las que puede especificar la probabilidad de los estados, sobre situaciones donde no puede, es decir, hay *aversión a ambigüedad*.

Riesgo vs. Ambigüedad



Preliminiares

Una definición de *probabilidad subjetiva* por Anscombe-Aumann

Sean $\mathcal{A}$ un conjunto de premios y $\{E_1, \ldots, E_s\}$ una partición de eventos.

Definición 1 (Lotería de ruleta) *Una lotería de ruleta con premios en $\mathcal{A}$ es una k-tupla $(p_1 a_1, \ldots, p_k a_k)$ en donde cada $a_i \in \mathcal{A}$ y $(p_1, \ldots, p_k) \in \Delta^{k-1}$. Cada p_i es la probabilidad objetiva de obtener el premio a_i.*

Definición 2 (Lotería de caballo) *Una lotería de caballo con premios en $\mathcal{A}$ es una s-tupla $[a_1, \ldots, a_s]$ en donde cada $a_j \in \mathcal{A}$. Se obtiene el premio a_j si ocurre E_j.*

Sean $\mathcal{R}_S$ el conjunto de loterías de ruleta con premios en $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}_C$ el conjunto de loterías de ruleta con premios en $\mathcal{R}_S$, $\mathcal{R} \coloneqq \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_C$ y $\succsim$ una preferencia sobre $\mathcal{R}$.
$\mathcal{H}$ es el conjunto de loterías de caballo con premios en $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$ es el conjunto de loterías de ruleta con premios en $\mathcal{H}$ y $\succsim^*$ es una preferencia sobre $\mathcal{R}^*$.

Definición 3 (Monotonicidad en los premios) *Para todo $i = 1, \ldots, s$, se cumple*
$$R_i \succsim R_i' \text{ si y solo si } [R_1, \ldots, R_s] \succsim^* [R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i', R_{i+1}, \ldots, R_s].$$

Definición 4 (Inversión de orden en loterías compuestas) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $(p_1, \ldots, p_k) \in \Delta^{k-1}$ y $R_j^i \in \mathcal{R}$ con $i = 1, \ldots, k$ y $j = 1, \ldots, s$, se satisface*
$$(p_1[R_1^1, \ldots, R_s^1], \ldots, p_k[R_1^k, \ldots, R_s^k]) \sim^* [(p_1 R_1^1, \ldots, p_k R_1^k), \ldots, (p_1 R_s^1, \ldots, p_k R_s^k)].$$

Sean u y u^* funciones de utilidad que representan a $\succsim$ y $\succsim^*$, respectivamente, y que tienen la forma de utilidad esperada. Además, se satisface monotonicidad e inversión.

Teorema 5 (Anscombe-Aumann) *Existe una única s-tupla $(p_1^*, \ldots, p_s^*) \in \Delta^{s-1}$ tal que para todo $[R_1, \ldots, R_s] \in \mathcal{H}$, se tiene $u^*[R_1, \ldots, R_s] = \sum_{j=1}^{s} p_j^* u(R_j)$.*

Teriminología de Gilboa-Schmeidler en su teoría de elección racional bajo ambigüedad:

Loterías

Sean X un conjunto no vacío de resultados deterministas y Y el conjunto de las distribuciones discretas de probabilidad sobre X con soporte compacto.
$$Y \coloneqq \left\{ y : X \to [0,1] \;\middle|\; \operatorname{supp}(y) \text{ es finito y } \sum_{x \in \operatorname{supp}(y)} y(x) = 1 \right\}.$$
Y es un subconjunto convexo de $B(X)$, el $\mathbb{R}$-espacio de Banach de funciones de valor real acotadas sobre X con la norma del supremo.

Actos

Sean S un conjunto no vacío de estados y Σ un álgebra de subconjuntos de S.
L_0 es el subconjunto de Y^S de funciones simples Σ-medibles, es decir, funciones de la forma $f : S \to Y$ con $f(S)$ finito y si U es abierto Y, se tiene $f^{-1}(U) \in \Sigma$.
L_c es el subconjunto de L_0 de funciones constantes.
L es un subconjunto convexo de L_0 tal que $L \supseteq L_c$.

Sea M el conjunto de medidas de probabilidad finitamente aditivas sobre Σ, esto es, funciones de la forma $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ con $\mu(S) = 1$ y si $A, B \in \Sigma$ son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
M es un subconjunto convexo de $ba(\Sigma)$, el $\mathbb{R}$-espacio de Banach de medidas acotadas con signo que son finitamente aditivas sobre Σ con la norma de la variación total.

Preferencia sobre actos

Sea $\succsim$ una preferencia sobre L la cual induce una preferencia sobre Y, denotada $\succsim_Y$.
Denotamos $y_c \in L_c$ el acto constante $y \in Y$.
Para todo $y, z \in Y$ decimos que $y \succsim_Y z$ si y sólo si $y_c \succsim z_c$.

Teorema de Gilboa-Schmeidler

Axiomas de Gilboa-Schmeidler

Definición 6 (Axioma GS1: Orden débil) *$\succsim$ es completa y transitiva (racional).*

Definición 7 (Axioma GS2: C-independencia) *Si $f, g \in L$, $h \in L_c$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $f \succ g$ si y sólo si $\alpha f + (1-\alpha)h \succ \alpha g + (1-\alpha)h$.*

Definición 8 (Axioma GS3: Continuidad) *Si $f, g, h \in L$ son tales que $f \succ g \succ h$, entonces $\{\alpha \in (0,1) \mid \alpha f + (1-\alpha)h \succ g\}$ y $\{\alpha \in (0,1) \mid g \succ \alpha f + (1-\alpha)h\}$ son no vacíos y abiertos en $(0,1)$ con la topología usual.*

Definición 9 (Axioma GS4: Monotonicidad) *Si $f, g \in L$ son tales que $f(s) \succsim_Y g(s)$ para todo $s \in S$, entonces $f \succsim g$.*

Definición 10 (Axioma GS5: Aversión a ambigüedad) *Si $f, g \in L$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $f \sim g$ implica $\alpha f + (1-\alpha) g \succsim f$.*

Definición 11 (Axioma GS6: No degeneración) *Existen $f, g \in L$ tales que $f \succ g$.*

Teorema 12 (Gilboa-Schmeidler) *Si $L = L_0$, entonces son equivalentes:*

(I) *$\succsim$ satisface los Axiomas GS1 a GS5.*

(II) *Existen $u : Y \to \mathbb{R}$ y C un subconjunto de M no vacío, cerrado y convexo tales que si $f, g \in L$, entonces $f \succsim g$ si y solo si*
$$\min \left\{ \int_S (u \circ f)\, d\mu \;\middle|\; \mu \in C \right\} \geq \min \left\{ \int_S (u \circ g)\, d\mu \;\middle|\; \mu \in C \right\}.$$

Además, en la condición (II) se cumple que:

(a) u representa a $\succsim_Y$, tiene la forma de utilidad esperada y es única salvo transformaciones afines positivas.

(b) C es único si y sólo si $\succsim$ satisface el Axioma GS6.

Demostración del Teorema

Asumimos que $L = L_0$ y $\succsim$ satisface los Axiomas GS1 a GS6.

Lema 13 *Existe $u : Y \to \mathbb{R}$ tal que*

(I) *u representa a $\succsim_Y$: Si $y, z \in Y$, entonces $y \succsim_Y z$ si y sólo si $u(y) \geq u(z)$.*

(II) *u tiene la forma de utilidad esperada: Si $y, z \in Y$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $u(\alpha y + (1-\alpha) z) = \alpha u(y) + (1-\alpha) u(z)$.*

Además, u es única salvo transformaciones afines positivas: Se tiene que $v : Y \to \mathbb{R}$ cumple (I) y (II) si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ tales que $v = au + b$.

Lema 14 *Existe única $J : L \to \mathbb{R}$ que representa a $\succsim$ tal que $J(y_c) = u(y)$ con $y \in Y$.*

Sean B el $\mathbb{R}$-espacio de Banach de funciones de valor real acotadas sobre S y Σ-medibles, B_0 el subespacio denso de funciones simples en B y $\gamma^c \in B_0$ es la función constante $\gamma \in \mathbb{R}$.

Lema 15 *Existe un único funcional $I : B_0 \to \mathbb{R}$ tal que:*

(I) *Si $f \in L$, entonces $I(u \circ f) = J(f)$ y $I(1^c) = 1$.*

(II) *I es monótona creciente: Si $f, g \in B_0$, entonces $f \geq g$ implica $I(f) \geq I(g)$.*

(III) *I es superaditiva: Si $f, g \in B_0$, entonces $I(f+g) \geq I(f) + I(g)$.*

(IV) *I es homogénea positiva: Si $f \in B_0$ y $\gamma > 0$, entonces $I(\gamma f) = \gamma I(f)$.*

(V) *I es C-independiente: Si $f \in B_0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$, entonces $I(f + \gamma^c) = I(f) + \gamma$.*

Lema 16 *Existe una única extensión continua de I a B que es monótona creciente, superlineal (superaditiva y homogénea positiva) y C-independiente.*

Lema 17 *Existe C un subconjunto de M que es no vacío, cerrado y convexo tal que si $f \in B$, entonces $I(f) = \min\{\int_S f\, d\mu \mid \mu \in C\}$.*

Conclusiones

- Se resuelve la Paradoja de Ellsberg.
- El individuo tomador de decisiones identifica su preferencia con una actitud pesimista.
- El individuo considera al mismo tiempo más de una creencia del estado del mundo.

Referencias

[1] Anscombe, F. J., & Aumann, R. J. (1963). "A Definition of Subjective Probability". *The Annals of Mathematical Statistics, 34(1)*, 199–205.

[2] Ellsberg, D. (1961). "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms". *The Quarterly Journal of Economics, 75(4)*, 643–669.

[3] Gilboa, I., & Schmeidler, D. (1989). "Maxmin expected utility with non-unique prior". *Journal of Mathematical Economics, 18(2)*, 141-153.