Distribución de descensos en palabras de Catalan que evitan un patrón consecutivo de longitud a lo más tres

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Alejandra Rojas Osorio
alrojasos@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas

José Luis Ramírez
jlramirezr@unal.edu.co

Profesor Asociado
Director de Trabajo

Palabras de Catalan

Una **palabra de Catalan** de longitud n es una palabra $w_1w_2\cdots w_n$ sobre el conjunto de enteros no negativos con $w_1=0$ y $0\le w_i\le w_{i-1}+1$ para $i=2,3,\ldots,n$.

Descomposición del primer retorno de una palabra de Catalan: Una palabra de Catalan no vacía se puede escribir de manera única como $0(w'+1)w''$, donde w' y w'' son palabras de Catalan, y $w'+1$ se obtiene de w' al sumar uno a cada una de sus entradas.

Denotamos por $\mathcal{C}_n$ el conjunto de palabras de Catalan de longitud n y $\mathcal{C}=\bigcup_{n\ge 0}\mathcal{C}_n$. Por ejemplo, $\mathcal{C}_0=\{\lambda\}$, $\mathcal{C}_1=\{0\}$, $\mathcal{C}_2=\{00,01\}$, $\mathcal{C}_3=\{000,001,010,011,012\}$.

La cardinalidad de $\mathcal{C}_n$ viene dada por el n-ésimo número de Catalan c_n: Sea $\mathcal{C}$ la clase combinatoria de las palabras de Catalan.

$$\mathcal{C}=\{\lambda\}+\{0\}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}\Rightarrow C(x)=1+xC(x)^2\Rightarrow C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Patrones

Un **patrón** p es una palabra que satisface la propiedad de que si x aparece en p, entonces todos los enteros en el intervalo $[0,x-1]$ también aparecen en p.

Patrones de longitud 2: $00, 01, 10$.

Patrones de longitud 3: $000, 001, 010, 011, 012, 021, 100, 101, 102, 110, 120, 201, 210$.

Una **subsecuencia** de una palabra w es una palabra obtenida por quitar algunas (posiblemente ninguna) de las letras en w.

Una palabra $w=w_1w_2\cdots w_n$ **contiene el patrón** $p=p_1\cdots p_m$ si existe una subsecuencia $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_m}$ de w, $i_1<i_2<\cdots<i_m$, tal que $red(w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_m})=p$.

Una palabra **evita el patrón** p siempre y cuando no contenga ninguna aparición de p como subsecuencia.

Denotamos por $\mathcal{C}_n(p)$ el conjunto de palabras de Catalan de longitud n que evitan el patrón p, $\mathcal{C}(p)=\bigcup_{n\ge 0}\mathcal{C}_n(p)$ y $\mathcal{C}(p)^+=\mathcal{C}(p)-\{\lambda\}$.

Un **descenso** en una palabra $w=w_1w_2\cdots w_n$ es una ocurrencia w_iw_{i+1}, tal que $w_i>w_{i+1}$. Denotamos por $d(w)$ el número de descensos de w.

La **forma reducida** de una palabra w sobre un alfabeto de r elementos, se encuentra al reemplazar la i-ésima letra más pequeña de w por $i-1$, para $i=1,\ldots,r$. Denotamos por $red(w)$ la forma reducida de w.

Ejemplo: $red(58329534)=45216423$

Una **subpalabra** de una palabra w es una subsecuencia que consta de letras contiguas en w.

Una palabra $w=w_1w_2\cdots w_n$ **contiene el patrón consecutivo** $\underline{p}=p_1\cdots p_m$ si existe una subpalabra $w_{i+1}w_{i+2}\cdots w_{i+m}$ de w, tal que $red(w_{i+1}w_{i+2}\cdots w_{i+m})=p$.

Una palabra **evita el patrón consecutivo** $\underline{p}$ siempre y cuando no contenga ninguna aparición de p como subpalabra.

Denotamos por $\mathcal{C}_n(\underline{p})$ el conjunto de palabras de Catalan de longitud n que evitan el patrón consecutivo $\underline{p}$, $\mathcal{C}(\underline{p})=\bigcup_{n\ge 0}\mathcal{C}_n(\underline{p})$ y $\mathcal{C}(\underline{p})^+=\mathcal{C}(\underline{p})-\{\lambda\}$.

Una **estadística** st en un conjunto finito S es una asociación de un número entero a cada elemento de S, y la **popularidad** de st es la suma $\sum_{x\in S}st(x)$.

Comparación de resultados

Para el patrón 012, se tiene que $C_{012}(x,y)=\frac{1-x+x^2-x^2y}{1-2x+x^2-x^2y}$.

Esquema de la prueba: Sea $w=0(w'+1)w''\in\mathcal{C}(012)$.

$$\text{Todas las entradas deben ser 0 o 1}\Rightarrow w=01^kw'',\quad k\ge 0,\quad w''\in\mathcal{C}(012).$$

$$\mathcal{C}(012)=\lambda+0+0\times\mathcal{C}(012)^+ + 0\times SEQ_{\ge 1}(1)+0\times SEQ_{\ge 1}(1)\times\mathcal{C}(012)^+$$

Tabla 1: Popularidad de descensos sobre palabras de Catalan evitando un patrón de longitud tres.

Patrón	Función generatriz
012, 001	$\frac{x^3}{(1-2x)^2}$
010	0
021	$\frac{x^3(1-x)}{(1-2x)^3}$
102, 201	$\frac{x^3}{(1-3x)^2}$
120, 101	$\frac{x^3(1-x)}{(1-3x+x^2)^2}$
011	$\frac{x^3}{(1-x)^3}$
000	$\frac{x^3(1-x)(1+2x)(1+x)}{(1-x-3x^2+x^3)^2}$
100	$\frac{x^3\left(1-x-x^2\right)}{(1-3x+2x^3)^2}$
110	$\frac{x^3\left(1-x-x^2\right)^2}{(1-x)^3(1-2x-x^2)^2}$
210	$\frac{x^3(1-2x)}{(1-4x+3x^2+x^3)^2}$

J. Baril, S. Kirgizov, V. Vajnovszki. Descent distribution on Catalan words avoiding a pattern of length at most three. Discrete Mathematics 341 (2018), 2608–2615.

Para el patrón $\underline{012}$, se tiene que $C_{\underline{012}}(x,y)=\frac{1-x-x^2+x^2y-\sqrt{(1-x-x^2+x^2y)^2-4x^2y}}{2x^2y}$.

Esquema de la prueba: Sea $w=0(w'+1)w''\in\mathcal{C}(\underline{012})$.

$$w_2=0\Rightarrow w'=\lambda\Rightarrow w=0w'',\quad w''\in\mathcal{C}(\underline{012}).$$

$$w_2=1\Rightarrow w_3\neq 2\Rightarrow w'=00\ldots=0w''',\quad w'',w'''\in\mathcal{C}(\underline{012}).$$

$$\mathcal{C}(\underline{012})=\lambda+0\times\mathcal{C}(\underline{012})+00\times\mathcal{C}(\underline{012})+00\times\mathcal{C}(\underline{012})\times\mathcal{C}(\underline{012})^+$$

Tabla 2: Popularidad de descensos sobre palabras de Catalan evitando un patrón consecutivo de longitud a lo más tres.

Patrón	Función generatriz
00	$\frac{1-2x-x^2-\sqrt{1-2x-3x^2}+x\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x\sqrt{1-2x-3x^2}}$
012	$\frac{1-2x-2x^2+x^3-(1-x-x^2)\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2\sqrt{1-2x-3x^2}}$
001, 011	$\frac{1-3x+x^2-x^3-(1-x)\sqrt{1-4x+2x^2+x^4}}{2x\sqrt{1-4x+2x^2+x^4}}$
010	$\frac{1-4x+3x^2-2x^3+(2x-1)\sqrt{1-4x+2x^2-4x^3+x^4}}{2x\sqrt{1-4x+2x^2-4x^3+x^4}}$
201	$\frac{3-15x+17x^2+2x^3-10x^4+4x^5-\left(3-9x+5x^2\right)\sqrt{1-4x+4x^3}}{2(2-x)^2x^2\sqrt{1-4x+4x^3}}$
120, 100, 110	$\frac{1-4x+2x^2+2x^3-(1-2x)\sqrt{1-4x+4x^3}}{2(1-x)x\sqrt{1-4x+4x^3}}$
000	$\frac{1-2x-3x^2-2x^3-x^4-\left(1-x-x^2\right)\sqrt{1-2x-5x^2-6x^3-3x^4}}{2x(1+x)\sqrt{1-2x-5x^2-6x^3-3x^4}}$
210	$\frac{1-4x+3x^2-2x^3-(1-2x)\sqrt{(1+x^2)(1-4x+x^2)}}{4x^2\sqrt{(1+x^2)(1-4x+x^2)}}$
101	$\frac{p(x)-q(x)\sqrt{(1+x^2)(1-4x+x^2)}}{2x(1-x+x^2)^2\sqrt{(1+x^2)(1-4x+x^2)}}$ $p(x)=1-6x+14x^2-20x^3+17x^4-13x^5+6x^6-x^7$ $q(x)=1-4x+7x^2-6x^3+2x^4-x^5$

J. L. Ramírez, A. Rojas-Osorio. Consecutive patterns in Catalan words and the descent distribution.